Казахский национальный педагогический университет имени Абая УДК 519.62/64 На правах рукописи

АЛИМОВА АНЕЛЬ НУРДАНБЕКОВНА

Сравнительный анализ методов, сходимости и устойчивости в некорректных задачах для гиперболических уравнений

6D060100 - Математика Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD)

Научные консультанты член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Кабанихин С.И. доктор физико-математических наук, профессор Бектемесов М.А. кандидат физико-математических наук, Нурсеитов Д.Б.

Республика Казахстан Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

1. Задача Дирихле для волнового уравнения в одномерном случае ........................11
   1. Постановка задачи 11
      1. Классическое решение 11
      2. Обобщенное решение 11
   2. Некорректность задачи 11
      1. Неустойчивость задачи Дирихле 11
      2. Неустойчивость обратной задачи 13
   3. Сведение исходной некорректной задачи к эквивалентной об­ратной задаче 14
      1. Прямая задача 14
      2. Обратная задача 14
   4. Сведение к операторному уравнению *Aq = f* 14
   5. Сведение к задаче минимизации целевого функционала 14
   6. Вычисление градиента функционала J(q) 15
   7. Элементы теории градиентных методов 18
   8. Численные результаты 20
      1. Алгоритм метода Ландвебера (Метод простой итерации) 20
      2. Алгоритм метода наискорейшего спуска 21
      3. Схема решения прямой задачи 21
      4. Схема решения сопряженной задачи 22
      5. Описание численного эксперимента 23
   9. Сравнительный анализ методов МИЛ и МНС 52
2. Задача Дирихле для волнового уравнения в двумерном случае . . . 58
   1. Постановка задачи 58
   2. Единственность решения обратной задачи 58
   3. Решение задачи Дирихле методом Фурье 60
      1. Метод решения 60
      2. Вычисление градиента функционала J(k)(q) 61
      3. Алгоритм метода итераций Ландвебера 64
   4. Конечно-разностный метод решения задачи ...............................................65
      1. Вычисление градиента функционала J(q) 65
      2. Схема решения прямой задачи 69
      3. Схема решения сопряженной задачи 70
      4. Алгоритм метода итераций Ландвебера 70
      5. Алгоритм метода наискорейшего спуска 71
      6. Описание численного эксперимента 72

Заключение 99

Список использованных источников ..........................................................................101

6В060100-Математика мамандығы бойынша (PhD) философия докторы ғылыми дђреже алу њшін диссертация

**Аһдатпа**

**ЂЛІМОВА ЂНЕЛ НҰРДАНБЕКҚЫЗЫ**

**ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҺДУ ЊШІН ҚИСЫНДЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДЕГІ ЂДІСТЕРДІҺ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУЫ, ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ,**

**ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ**

**Диссертациялық зерттеу тақырыбыныһ љзектілігі:** Жұмыс бірљлшемді, екіљлшемді толқын теһдеуі њшін Дирихле есеп шешуініһ сандық ђдістерін тұрғызу жђне зерттеуге арналған.

Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебі математикалық физиканыһ аса књрделі моделдерініһ бірі болып табылады. Толқын теһдеуі газдағы, сұйықтағы, қатты денедегі бойлық дыбыстық тербеліс, ішектегі кљлденеһ тербеліс сияқты механикалық жњйеде таралатын аз тербелістердіһ барлық тњрлерін сипаттайды.

Жазықтықта математикалық физиканыһ іргелі есептерініһ бірі - тербелмелі ішектіһ жњрісін зерттеу - қисынды емес, егер шектік шарттар облыстыһ барлық шекараларында берілсе, Дирихле есебі тек толқын теһдеуі њшін ғана емес, сондай-ақ барлық гиперболалық теһдеулер њшін де қисынды емес. Бұл кері есеп берілгендерініһ вариациясына қатысты қатты орнықсыздықты тудырады жђне жуық шешімді, яғни қолданыста кіретін мђліметтер жуықтап берілгендіктен, сандық шешім, тұрғызу кезінде њлкен қиыншылықтарды тудырады. Ұсынылған есептіһ кљптеген практикалық қолданысы бар, мысалы, цунами мђселесі. Іс жњзінде, заманауи спутникалық, суњсті, суасты су бетін бақылау құралдары ережеге сай уақыттыһ ђртњрлі кезінде цунами толқыныһ формасы жайлы мђлімет ала алады. Осы мђліметтер жиынтығы сђйке шекаралық шарттарымен жуық таяз судағы толқын теһдеуі њшін екіљлшемді Дирихле есебіне алып келеді.

Диссертацияда жњргізілген зерттеулер љзекті жђне соһғы жылдары толқын теһдеуі њшін Дирихле есебі цунами толқынын зерттеу кезінде жаһа қолданысқа ие болғандықтан, оныһ маһызды қолданбалы мағынасы бар.

**Зерттеу нысаны.** Осы жұмыста зерттеу нысаны толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ есеп қойылымыныһ қисындылығы, сандық шешімін тұрғызу алгоритмі болып табылады.

**Зерттеу пђні.** Зерттеу пђні кері есепке келтірілген, толқын теһдеуі њшін қисынды емес, бастапқы-шектік есебі, қисынды емес жђне кері есептерді шешудіһ оһтайлы ђдістері.

**Зерттеу мақсаты мен тапсырмалары.** Диссертацияныһ зерттеу мақсаты мен тапсырмалары толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ шешімі жђне шешімніһ сандық оһтайлы ђдістерін тұрғызу; осы ђдістердіһ салыстырмалы талдауы, олардыһ орнықтылығы мен жинақтылығы; жылдам тњсу ђдісімен, Ландвебер ђдісімен бір, екі љлшем жағдайында қарастырылған есептіһ шешімініһ сандық алгоритмін ђзірлеу, сонымен бірге функционала градиентін тұрғызу болып табылады. Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ бағджарламалық пакетін ђзірлеу. Қарастырылған есеп њшін ђзірленген сандық алгоритмдердіһ салыстырмалы талдауын жњргізу.

**Зерттеу ђдістері.** Диссертацияда қисынды емес есеп шешімініһ сандық ђдістері, итерациялы оһтайлы ђдістер, градиенттік ђдістер, Фурье ђдісі, ақырлы-айырымдық ђдістер, Ландвебер итерациялы ђдісі, жылдам тњсу ђдісі пайдалынылады.

**Зерттеудіһ ғылыми жаһашылдығы.** Диссертацилық жұмыста келесі жаһа нђтижелер алынды:

- Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ қисындылық мђселесі зерттелді;

- Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ сандық оһтайлы ђдіс шешімі тұрғызылды;

- Ландвебер итерациялы ђдісімен бірљлшемді, екіљлшемді жағдайында толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ сандық алгоритм шешімі тұрғызылды;

- Жылдам тњсу ђдісімен бірљлшемді, екіљлшемді жағдайында толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ сандық алгоритм шешімі тұрғызылды;

- Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ шешімі њшін бағдарламалық пакеті ђзірленді;

- Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебі њшін функционал градиенті тұрғызылды;

- Бірљлшемді, екіљлшемді жағдайында толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ бірінші рет сандық есептеулері жњргізілді;

- Толқын теһдеуі њшін Дирихле есебініһ Ландвебер итерациялы ђдісі, жылдам тњсу ђдісі шешім жинақтылығыныһ салыстырмалы талдауы жасалды.

**Зерттеудіһ теориялық маһыздылығы.** Диссертациялық жұмыстыһ нђтижелері кері жђне қисынды емес есептерді шешудіһ сандық алгоритмін тұрғызуда елеулі њлесін қосады.

**Зерттеудіһ практикалық маһыздылығы.** Жұмыстыһ практикалық маһыздылығы зерттеу нђтижелері цунами құбылысын зерттеуде қолданылады. Ђзірленген алгоритмдер берілген жағалау маһындағы аймақтарда цунами таралуыныһ болжамын жђне салдарын болжау жњйесін жетілдіруге, құруға кљмектеседі.

**Жұмыстыһ құрылымы мен кљлемі.** Диссертациялық жұмыс екі бљлімнен, қорытындыдан, пайдалынылған ђдебиет кљздер тізімінен, қосымшалардан тұрады. Жұмыс машинамен терілген 106 бетті мђтінде мазмұндалған, 97 сурет жђне 13 таблица бар.

**АННОТАЦИЯ**

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100-Математика

**АЛИМОВОЙ АНЕЛЬ НУРДАНБЕКОВНЫ**

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ, СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Актуальность темы диссертационного исследования:** Работа посвящена построению и исследованию численных методов решения задачи Дирихле для волнового уравнения как одномерного, так и двумерного.

Задача Дирихле для волнового уравнения является одной из наиболее сложных моделей математической физики. Волновое уравнение описывает почти все разновидности малых колебаний в распределенных механических системах, таких как продольные звуковые колебания в газе, жидкости, твердом теле; поперечные колебания в струнах и т. п.

На плоскости одна из фундаментальных задач математической физики - изучение поведения колеблющейся струны - некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области, задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. Это порождает сильную неустойчивость по отношению к вариациям данных обратной задачи и большие проблемы при построении приближенных решений, то есть численных решений, поскольку на практике входные данные известны приближенно. Указанные задачи имеют много практических приложений, например, проблема цунами. Дело в том, что современные спутниковые, надводные и подводные средства наблюдения водной поверхности в принципе позволяют получать данные о форме волны цунами в различные моменты времени. Эти данные в совокупности с соответствующими граничными условиями приводят к двумерной задаче Дирихле для волнового уравнения в приближении мелкой воды.

Исследования, проведенные в диссертации, актуальны и имеют важное прикладное значение, поскольку в последние годы задача Дирихле для волнового уравнения получила новые применения при исследовании волн цунами.

**Объект исследования.** В данной работе объектом исследования является задача Дирихле для волнового уравнения, вопросы корректности постановки задачи, алгоритм построения численных решений.

**Предмет исследования.** Предметом исследования является некорректная начально-краевая задача для волнового уравнения, сведенная к обратной задаче, оптимизационные методы решения некорректных и обратных задач.

**Цель и задачи исследования.** Целью и задачами исследования диссертации является решение задачи Дирихле для волнового уравнения и построение численных оптимизационных методов решения; сравнительный анализ этих методов, их устойчивости и сходимости; разработка численных алгоритмов решения рассматриваемой задачи в одномерном и двумерном случаях методом наискорейшего спуска и методом итераций Ландвебера; а также построение градиента функционала. Разработка программных пакетов для решения задачи Дирихле для волнового уравнения. Проведение сравнительного анализа разработанных численных алгоритмов для рассматриваемой задачи.

**Методы исследования.** В диссертации используются численные методы решения некорректных задач, итерационные оптимизационные методы, градиентные методы, метод Фурье, конечно-разностные методы, метод итераций Ландвебера, метод наискорейшего спуска.

**Научная новизна исследования.** В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- исследован вопрос корректности задачи Дирихле для волнового уравнения;

- построен численный оптимизационный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения;

- построен численный алгоритм решения задачи Дирихле для волнового уравнения в одномерном и двумерном случае методом итераций Ландвебера;

- построен численный алгоритм решения задачи Дирихле для волнового уравнения в одномерном и двумерном случае методом наискорейшего спуска;

- разработаны программные пакеты для решения задачи Дирихле для волнового уравнения;

- построен градиент функционала для задачи Дирихле для волнового уравнения;

- впервые проведены численные расчеты задачи Дирихле для волнового уравнения в одномерном и в двумерном случае;

- проведен сравнительный анализ метода итераций Ландвебера и метода наискорейшего спуска, решения сходимости задачи Дирихле для волнового уравнения.

**Теоретическая значимость исследования.** Результаты диссертационной работы вносят существенный вклад в построение алгоритмов численных методов решения обратных и некорректных задач.

**Практическая значимость исследования.** Практическая значимость работы состоит в том, что результаты исследований могут быть применены в изучении явлений цунами. Разработанные алгоритмы способствуют созданию и совершенствованию систем предсказания распространения цунами и прогноза последствий в заданных районах береговой зоны.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников. Работа изложена на 106 страницах машинописного текста, содержит 97 рисунков и 13 таблиц.

**ABSTRACT**

to the doctoral thesis for scientific degree Doctor of Philosophy (PhD)

on the specialty 6D060100-Mathematics

**Alimova Anel Nurdanbekovna**

**THE COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS, CONVERGENCE AND STABILITY IN IIL-POSED PROBLEMS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS**

**Relevance of thesis theme research:** The work is devoted to the construction and sudy of numerical methods for solving the Dirichlet problem for the wave equation as a one-dimensional and two-dimensional.

The Dirichlet problem for the wave equation is one of the most sophisticated models of mathematical physics. The wave equation describes almost all varieties of small vibrations in distributed mechanical systems, such as the longitudinal sound waves in gases, liquids, solids, transverse vibrations in the strings, etc.

One of the fundamental problems of mathematical physics on the plane - the study of vibrating string behavior - is ill-posed, when the boundary conditions are given on the entire boundary, the Dirichlet problem is not well-posed, not only for the wave equation , but also for the general hyperbolic equations. It gives rise to a strong instability with respect to data variations of the inverse problem and a big problem in the construction of approximate solutions, that is, numerical solutions, so far as in practice the input data are known only approximately. These problems have many practical applications, for example, the problem of the tsunami. The fact that modern satellite, above-water and underwater surveillance tool allow to obtain information about the shape of the tsunami waves at different times. These data, together with the appropriate boundary conditions lead to a two-dimensional Dirichlet problem for the wave equations in the shallow water.

The research conducted in the thesis are relevant and have important practical meaning, because in recent years the Dirichlet problem for the wave equation has the new application in the study of tsunami waves.

**The object of research.** In this work, the object of study is the Dirichlet problem for the wave equation, correctness questions of the problem formulation, the algorithm for constructing numerical solutions.

**The subject of research.** The subject of the research is ill-posed initial boundary problem for the wave equation, reduced to the inverse problem, optimization methods for solving ill-posed and inverse problems.

**The purpose and task of research.** The purpose and task of thesis research is to find the solution of the Dirichlet problem for the wave equation and the construction of numerical optimized solving methods; comparative analysis of these methods, their stability and convergence , the development of numerical algorithms of solution of the considered problem in one-dimensional and two-dimensional cases by the steepest descent method and Landweber iteration method, and construction of functional gradient. Development of software packages for solving the Dirichlet problem for the wave equation. Carry out the comparative analysis of numerical algorithms for the problem.

**Research methods.** There are numerical methods for solving ill-posed problems, iterative optimization methods, gradient methods, Fourier method, finite-difference methods, Landweber iteration method, steepest descent method in this thesis.

**Scientific novelty of research.** The following new results were obtained in this thesis:

- the question of correctness of the Dirichlet problem for the wave equation was researched;

- the numerical optimization method was built for solving the Dirichlet problem for the wave equation ;

- numerical algorithm was built for solving the Dirichlet problem for the wave equation in one-dimensional and two-dimensional case by Landweber iteration;

- numerical algorithm was built for solving the Dirichlet problem for the wave equation in one-dimensional and two-dimensional case by the steepest descent method;

- software packages were developed for the solution of the Dirichlet problem for the wave equation;

- constructed the functional gradient for the Dirichlet problem for the wave equation;

- numerical calculations for solving Dirichlet problem for the wave equation in one-dimensional and two-dimensional case were carried for the first time;

- carried out a comparative analysis of the Landweber iteration method and the steepest descent method , the convergence of solutions of the Dirichlet problem for the wave equation.

**The theoretical significance of the research.** The results of the thesis make a significant contribution to the algorithms construction of numerical methods for solving inverse and ill-posed problems.

**The practical significance of the research.** The practical significance of this work is that research results can be applied to study the tsunamis phenomena. The developed algorithms allow for creation and improvement of prediction systems of tsunami distribution and forecast consequences in specified regions of the coastal zone.

**The structure and scope of work.** The thesis consists of an introduction, two chapters, conclusion, list of sources, applications. The work is on 106 pages of typescript, contains 97 figures and 13 tables.