

Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 519.62/64

На правах рукописи

АЛИМОВА АНЕЛЬ НУРДАНБЕКОВНА

Сравнительный анализ методов, сходимости и устойчивости в некорректных задачах для гиперболических уравнений

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание ученой степени

доктора философии (PhD)

Научные консультанты
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор Кабанихин С.И.
доктор физико-математических наук, профессор Бектемесов М.А.
кандидат физико-математических наук, Нурсеитов Д.Б.

Республика Казахстан
Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Задача Дирихле для волнового уравнения в одномерном случае . . .	11
1.1 Постановка задачи	11
1.1.1 Классическое решение	11
1.1.2 Обобщенное решение	11
1.2 Некорректность задачи	11
1.2.1 Неустойчивость задачи Дирихле	11
1.2.2 Неустойчивость обратной задачи	13
1.3 Сведение исходной некорректной задачи к эквивалентной об- ратной задаче	14
1.3.1 Прямая задача	14
1.3.2 Обратная задача	14
1.4 Сведение к операторному уравнению $Aq = f$	14
1.5 Сведение к задаче минимизации целевого функционала	14
1.6 Вычисление градиента функционала $J(q)$	15
1.7 Элементы теории градиентных методов	18
1.8 Численные результаты	20
1.8.1 Алгоритм метода Ландвебера (Метод простой итерации)	20
1.8.2 Алгоритм метода наискорейшего спуска	21
1.8.3 Схема решения прямой задачи	21
1.8.4 Схема решения сопряженной задачи	22
1.8.5 Описание численного эксперимента	23
1.9 Сравнительный анализ методов МИЛ и МНС	52
2 Задача Дирихле для волнового уравнения в двумерном случае	58
2.1 Постановка задачи	58
2.2 Единственность решения обратной задачи	58
2.3 Решение задачи Дирихле методом Фурье	60
2.3.1 Метод решения	60
2.3.2 Вычисление градиента функционала $J_{(k)}(q)$	61
2.3.3 Алгоритм метода итераций Ландвебера	64
2.4 Конечно-разностный метод решения задачи	65
2.4.1 Вычисление градиента функционала $J(q)$	65
2.4.2 Схема решения прямой задачи	69
2.4.3 Схема решения сопряженной задачи	70
2.4.4 Алгоритм метода итераций Ландвебера	70
2.4.5 Алгоритм метода наискорейшего спуска	71
2.4.6 Описание численного эксперимента	72
Заключение	99
Список использованных источников	101

6D060100–Математика мамандығы бойынша (PhD) философия докторы ғылыми дәреже алу үшін диссертация

Аңдатпа

ӘЛІМОВА ӘНЕЛ НҰРДАНБЕКҚЫЗЫ

**ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДУ ҮШІН ҚИСЫНДЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДЕГІ
ӘДІСТЕРДІҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУЫ, ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ,
ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ**

Диссертациялық зерттеу тақырыбының өзектілігі: Жұмыс бірөлшемді, екіөлшемді толқын теңдеуі үшін Дирихле есеп шешуінің сандық әдістерін тұрғызу және зерттеуге арналған.

Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебі математикалық физиканың аса күрделі моделдерінің бірі болып табылады. Толқын теңдеуі газдағы, сұйықтағы, қатты денедегі бойлық дыбыстық тербеліс, ішектегі көлденең тербеліс сияқты механикалық жүйеде таралатын аз тербелістердің барлық түрлерін сипаттайды.

Жазықтықта математикалық физиканың іргелі есептерінің бірі – тербелмелі ішектің жүрісін зерттеу – қисынды емес, егер шектік шарттар облыстың барлық шекараларында берілсе, Дирихле есебі тек толқын теңдеуі үшін ғана емес, сондай-ақ барлық гиперболаалық теңдеулер үшін де қисынды емес. Бұл кері есеп берілгендерінің вариациясына қатысты қатты орнықсыздықты тудырады және жуық шешімді, яғни қолданыста кіретін мәліметтер жуықтап берілгендіктен, сандық шешім, тұрғызу кезінде үлкен қиыншылықтарды тудырады. Ұсынылған есептің көптеген практикалық қолданысы бар, мысалы, цунами мәселесі. Іс жүзінде, заманауи спутникалық, суүсті, суасты су бетін бақылау құралдары ережеге сай уақыттың әртүрлі кезінде цунами толқының формасы жайлы мәлімет ала алады. Осы мәліметтер жиынтығы сәйке шекаралық шарттарымен жуық таяз судағы толқын теңдеуі үшін екіөлшемді Дирихле есебіне алып келеді.

Диссертацияда жүргізілген зерттеулер өзекті және соңғы жылдары толқын теңдеуі үшін Дирихле есебі цунами толқынын зерттеу кезінде жаңа қолданысқа ие болғандықтан, оның маңызды қолданбалы мағынасы бар.

Зерттеу нысаны. Осы жұмыста зерттеу нысаны толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің есеп қойылымының қисындылығы, сандық шешімін тұрғызу алгоритмі болып табылады.

Зерттеу пәні. Зерттеу пәні кері есепке келтірілген, толқын теңдеуі үшін қисынды емес, бастапқы-шектік есебі, қисынды емес және кері есептерді шешудің оңтайлы әдістері.

Зерттеу мақсаты мен тапсырмалары. Диссертацияның зерттеу мақсаты мен тапсырмалары толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімі және шешімнің сандық оңтайлы әдістерін тұрғызу; осы әдістердің салыстырмалы талдауы, олардың орнықтылығы мен жинақтылығы; жылдам түсу әдісімен,

Ландвебер әдісімен бір, екі өлшем жағдайында қарастырылған есептің шешімінің сандық алгоритмін әзірлеу, сонымен бірге функционала градиентін тұрғызу болып табылады. Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің бағдарламалық пакетін әзірлеу. Қарастырылған есеп үшін әзірленген сандық алгоритмдердің салыстырмалы талдауын жүргізу.

Зерттеу әдістері. Диссертацияда қисынды емес есеп шешімінің сандық әдістері, итерациялы оңтайлы әдістер, градиенттік әдістер, Фурье әдісі, ақырлы-айырымдық әдістер, Ландвебер итерациялы әдісі, жылдам түсу әдісі пайдаланылады.

Зерттеудің ғылыми жаңашылдығы. Диссертациялық жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

- Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің қисындылық мәселесі зерттелді;

- Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің сандық оңтайлы әдіс шешімі тұрғызылды;

- Ландвебер итерациялы әдісімен бірөлшемді, екіөлшемді жағдайында толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің сандық алгоритм шешімі тұрғызылды;

- Жылдам түсу әдісімен бірөлшемді, екіөлшемді жағдайында толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің сандық алгоритм шешімі тұрғызылды;

- Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімі үшін бағдарламалық пакеті әзірленді;

- Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебі үшін функционал градиенті тұрғызылды;

- Бірөлшемді, екіөлшемді жағдайында толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің бірінші рет сандық есептеулері жүргізілді;

- Толқын теңдеуі үшін Дирихле есебінің Ландвебер итерациялы әдісі, жылдам түсу әдісі шешім жинақтылығының салыстырмалы талдауы жасалды.

Зерттеудің теориялық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері кері және қисынды емес есептерді шешудің сандық алгоритмін тұрғызуда елеулі үлесін қосады.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы. Жұмыстың практикалық маңыздылығы зерттеу нәтижелері цунами құбылысын зерттеуде қолданылады. Әзірленген алгоритмдер берілген жағалау маңындағы аймақтарда цунами таралуының болжамын және салдарын болжау жүйесін жетілдіруге, құруға көмектеседі.

Жұмыстың құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс екі бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиет көздер тізімінен, қосымшалардан тұрады. Жұмыс машинамен терілген 106 бетті мәтінде мазмұндалған, 97 сурет және 13 таблица бар.

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100–Математика

АЛИМОВОЙ АНЕЛЬ НУРДАНБЕКОВНЫ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ, СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Актуальность темы диссертационного исследования: Работа посвящена построению и исследованию численных методов решения задачи Дирихле для волнового уравнения как одномерного, так и двумерного.

Задача Дирихле для волнового уравнения является одной из наиболее сложных моделей математической физики. Волновое уравнение описывает почти все разновидности малых колебаний в распределенных механических системах, таких как продольные звуковые колебания в газе, жидкости, твердом теле; поперечные колебания в струнах и т. п.

На плоскости одна из фундаментальных задач математической физики – изучение поведения колеблющейся струны - некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области, задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. Это порождает сильную неустойчивость по отношению к вариациям данных обратной задачи и большие проблемы при построении приближенных решений, то есть численных решений, поскольку на практике входные данные известны приближенно. Указанные задачи имеют много практических приложений, например, проблема цунами. Дело в том, что современные спутниковые, надводные и подводные средства наблюдения водной поверхности в принципе позволяют получать данные о форме волны цунами в различные моменты времени. Эти данные в совокупности с соответствующими граничными условиями приводят к двумерной задаче Дирихле для волнового уравнения в приближении мелкой воды.

Исследования, проведенные в диссертации, актуальны и имеют важное прикладное значение, поскольку в последние годы задача Дирихле для волнового уравнения получила новые применения при исследовании волн цунами.

Объект исследования. В данной работе объектом исследования является задача Дирихле для волнового уравнения, вопросы корректности постановки задачи, алгоритм построения численных решений.

Предмет исследования. Предметом исследования является некорректная начально-краевая задача для волнового уравнения, сведенная к обратной задаче, оптимизационные методы решения некорректных и обратных задач.

Цель и задачи исследования. Целью и задачами исследования диссертации является решение задачи Дирихле для волнового уравнения и

построение численных оптимизационных методов решения; сравнительный анализ этих методов, их устойчивости и сходимости; разработка численных алгоритмов решения рассматриваемой задачи в одномерном и двумерном случаях методом наискорейшего спуска и методом итераций Ландвебера; а также построение градиента функционала. Разработка программных пакетов для решения задачи Дирихле для волнового уравнения. Проведение сравнительного анализа разработанных численных алгоритмов для рассматриваемой задачи.

Методы исследования. В диссертации используются численные методы решения некорректных задач, итерационные оптимизационные методы, градиентные методы, метод Фурье, конечно-разностные методы, метод итераций Ландвебера, метод наискорейшего спуска.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- исследован вопрос корректности задачи Дирихле для волнового уравнения;
- построен численный оптимизационный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения;
- построен численный алгоритм решения задачи Дирихле для волнового уравнения в одномерном и двумерном случае методом итераций Ландвебера;
- построен численный алгоритм решения задачи Дирихле для волнового уравнения в одномерном и двумерном случае методом наискорейшего спуска;
- разработаны программные пакеты для решения задачи Дирихле для волнового уравнения;
- построен градиент функционала для задачи Дирихле для волнового уравнения;
- впервые проведены численные расчеты задачи Дирихле для волнового уравнения в одномерном и в двумерном случае;
- проведен сравнительный анализ метода итераций Ландвебера и метода наискорейшего спуска, решения сходимости задачи Дирихле для волнового уравнения.

Теоретическая значимость исследования. Результаты диссертационной работы вносят существенный вклад в построение алгоритмов численных методов решения обратных и некорректных задач.

Практическая значимость исследования. Практическая значимость работы состоит в том, что результаты исследований могут быть применены в изучении явлений цунами. Разработанные алгоритмы способствуют созданию и совершенствованию систем предсказания распространения цунами и прогноза последствий в заданных районах береговой зоны.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников. Работа изложена на 106 страницах машинописного текста, содержит 97 рисунков и 13 таблиц.

ABSTRACT

to the doctoral thesis for scientific degree Doctor of Philosophy (PhD)

on the specialty 6D060100-Mathematics

Alimova Anel Nurdanbekovna

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS, CONVERGENCE AND STABILITY IN ILL-POSED PROBLEMS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Relevance of thesis theme research: The work is devoted to the construction and study of numerical methods for solving the Dirichlet problem for the wave equation as a one-dimensional and two-dimensional.

The Dirichlet problem for the wave equation is one of the most sophisticated models of mathematical physics. The wave equation describes almost all varieties of small vibrations in distributed mechanical systems, such as the longitudinal sound waves in gases, liquids, solids, transverse vibrations in the strings, etc.

One of the fundamental problems of mathematical physics on the plane - the study of vibrating string behavior - is ill-posed, when the boundary conditions are given on the entire boundary, the Dirichlet problem is not well-posed, not only for the wave equation, but also for the general hyperbolic equations. It gives rise to a strong instability with respect to data variations of the inverse problem and a big problem in the construction of approximate solutions, that is, numerical solutions, so far as in practice the input data are known only approximately. These problems have many practical applications, for example, the problem of the tsunami. The fact that modern satellite, above-water and underwater surveillance tool allow to obtain information about the shape of the tsunami waves at different times. These data, together with the appropriate boundary conditions lead to a two-dimensional Dirichlet problem for the wave equations in the shallow water.

The research conducted in the thesis are relevant and have important practical meaning, because in recent years the Dirichlet problem for the wave equation has the new application in the study of tsunami waves.

The object of research. In this work, the object of study is the Dirichlet problem for the wave equation, correctness questions of the problem formulation, the algorithm for constructing numerical solutions.

The subject of research. The subject of the research is ill-posed initial boundary problem for the wave equation, reduced to the inverse problem, optimization methods for solving ill-posed and inverse problems.

The purpose and task of research. The purpose and task of thesis research is to find the solution of the Dirichlet problem for the wave equation and the construction of numerical optimized solving methods; comparative analysis of these methods, their stability and convergence, the development of numerical algorithms of solution of the

considered problem in one-dimensional and two-dimensional cases by the steepest descent method and Landweber iteration method, and construction of functional gradient. Development of software packages for solving the Dirichlet problem for the wave equation. Carry out the comparative analysis of numerical algorithms for the problem.

Research methods. There are numerical methods for solving ill-posed problems, iterative optimization methods, gradient methods, Fourier method, finite-difference methods, Landweber iteration method, steepest descent method in this thesis.

Scientific novelty of research. The following new results were obtained in this thesis:

- the question of correctness of the Dirichlet problem for the wave equation was researched;
- the numerical optimization method was built for solving the Dirichlet problem for the wave equation ;
- numerical algorithm was built for solving the Dirichlet problem for the wave equation in one-dimensional and two-dimensional case by Landweber iteration;
- numerical algorithm was built for solving the Dirichlet problem for the wave equation in one-dimensional and two-dimensional case by the steepest descent method;
- software packages were developed for the solution of the Dirichlet problem for the wave equation;
- constructed the functional gradient for the Dirichlet problem for the wave equation;
- numerical calculations for solving Dirichlet problem for the wave equation in one-dimensional and two-dimensional case were carried for the first time;
- carried out a comparative analysis of the Landweber iteration method and the steepest descent method , the convergence of solutions of the Dirichlet problem for the wave equation.

The theoretical significance of the research. The results of the thesis make a significant contribution to the algorithms construction of numerical methods for solving inverse and ill-posed problems.

The practical significance of the research. The practical significance of this work is that research results can be applied to study the tsunamis phenomena. The developed algorithms allow for creation and improvement of prediction systems of tsunami distribution and forecast consequences in specified regions of the coastal zone.

The structure and scope of work. The thesis consists of an introduction, two chapters, conclusion, list of sources, applications. The work is on 106 pages of typescript, contains 97 figures and 13 tables.