

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева

УДК 517.956.6

На правах рукописи

## **ИГИСИНОВ САБИТ ЖАНДАРБЕКОВИЧ**

### **О разрешимости и свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений смешанного типа в неограниченной области**

6D060100-Математика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора философии (PhD)

Научные консультанты  
доктор физико-математических наук,  
профессор М.Б.Муратбеков  
доктор физико-математических наук,  
профессор К.Н.Оспанов  
профессор математики  
Г.Бегер (Берлин, Германия)

Республика Казахстан  
Астана, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ</b>	3
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	4
<b>ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ</b>	10
<b>1 О СУЩЕСТВОВАНИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, ЗАДАННЫХ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ</b>	13
1.1 Формулировка основных результатов	13
1.2 Вспомогательные леммы и оценки в одномерном случае	14
1.3 Доказательства основных теорем	29
<b>2 О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СМЕШАННОГО ТИПА, ЗАДАННЫХ НА ПОЛОСЕ</b>	32
2.1 Формулировка основных результатов	32
2.2 Вспомогательные леммы и оценки в одномерном случае	33
2.3 О свойствах резольвенты дифференциального оператора с постоянными коэффициентами	37
2.4 Об одном покрытии	43
2.5 О построении правого обратного оператора	46
2.6 Представление обратного оператора и доказательства основных теорем	52
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	65
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	67

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно уравнениями смешанного типа называются уравнения, которые в одной части рассматриваемой области принадлежат эллиптическому типу, а в другой – гиперболическому. Эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение либо вырождается в параболическое, либо не определено.

Теория уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и наличием их практических приложений в газовой динамике трансзвуковых течений, магнитной гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибов поверхностей и в других областях естественных наук.

Впервые на практическую значимость таких уравнений обратил внимание С.А.Чаплыгин 1902г. в своей работе «О газовых струях» [1]. А с конца сороковых годов прошлого столетия уравнения смешанного типа стали объектами систематических исследований. Основоположниками теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются Ф.Трикоми [2-3] и С.Геллерстедт [4]. Интерес к этой теории еще больше возрос после работы Ф.Франкля [5] опубликованного в 1945 году, где он впервые показал приложения краевых задач для уравнений смешанного типа в трансзвуковой газовой динамике. В дальнейшем существенный вклад в развитие этой теории внесли математики М.А.Лаврентьев [6], А.В.Бицадзе [7-8], К.И.Бабенко [9], А.М.Нахушев [10-11], М.М.Смирнов [12-13], Т.Ш.Кальменов [14], Е.И.Моисеев [15-16], Т.Д.Джураев [17], М.С.Салахатдинов [18-19], S.Moravetz [20], M.Protter и др. В частности, Ф.Трикоми поставил и решил первую граничную задачу для уравнения  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , а С.Геллерстедт развил результаты Ф.Трикоми для уравнения  $y^{2n+1}u_{xx} + u_{yy} = 0$ . М.Лаврентьевым была предложена более простая модель уравнения смешанного типа  $u_{xx} + \operatorname{sgn}y u_{yy} = 0$ . А.В.Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для уравнения Лаврентьева. Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались начиная с 80-х годов прошлого столетия. Здесь следует отметить работу Т.Ш.Кальменова [21], где впервые доказано существование хотя бы одного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, работу Е.И.Моисеева, в которой указаны секторы, где нет собственного значения задачи Трикоми для ряда уравнений смешанного типа, и работу С.М.Пономарева, где найдены собственные значения и собственные функции задачи Трикоми для уравнения  $u_{xx} + \operatorname{sgn}y u_{yy} - \lambda u = 0$ .

Все эти работы были посвящены краевым задачам в ограниченной области.

Исследованию дифференциальных уравнений смешанного типа в неограниченной области с ограниченными коэффициентами, где гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник, посвящены работы М.С.Салахитдинова, Р.С.Хайруллина [22], М.Х.Рузиева [23-

24], М. Е. Лернер, О. А. Репин [25] и др. Однако, в приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения, заданные в неограниченной области и имеющие растущие и колеблющиеся коэффициенты. Исследования таких задач на примере сингулярного уравнения Штурма-Лиувилля были начаты в работах В.Н.Эверитта и М.Гирца [26-27], которые, в основном, выясняли условия на потенциальную функцию  $q(x)$ , обеспечивающие существование, единственность и гладкость (разделимость) решений уравнения  $Ly \equiv -y'' + q(x)y = f \in L_2(R)$  ( $R = (-\infty, \infty)$ ). В терминах В.Н.Эверитта и М.Гирца уравнение  $Ly \equiv -y'' + q(x)y = f \in L_2(R)$  называется разделимым в пространстве  $L_2(R)$ , если из  $y \in D(L)$ ,  $f \in L_2$  следует  $q(x)y \in L_2$ . Затем эти результаты были усилены и распространены на многомерный случай в работах М.О.Отелбаева [28-31], К.Х.Бойматова [32-33], Р.О.Ойнарова, М.Б.Муратбекова, К.Н.Оспанова, Л.Шустера и др. Разрешимость дифференциальных уравнений в неограниченной области также рассматривались в работах Т.Като [34], Ю.М.Березанского, И.М.Глазмана [35], А.Г.Костюченко [36], Б.М.Левитана, М.С.Саргсяна и др. Все эти работы посвящены дифференциальным операторам эллиптического типа.

Случай неэллиптических уравнений, заданных в двумерной некомпактной области и имеющих неограниченные коэффициенты (сингулярный случай), изучался в меньшей степени. Задача о разрешимости и свойствах решений уравнений гиперболического типа в случае неограниченной области с ограниченными коэффициентами изучены в работах С.Л.Соболева, А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [37], П.Д.Лакса, К.Фридрихса, М.Нагумо [38], Г.И.Кигурадзе, Д.С.Джумабаева, А.Г.Асановой и др. В работах М.Б.Муратбекова, М.А.Ахметжанова и Р.М.Жусипназарова [39-40] изучались вопросы разрешимости, гладкости и аппроксимативные свойства решений для дифференциального уравнения гиперболического типа. К исследованию таких задач для уравнений смешанного типа посвящены работы М.Б.Муратбеков, К.Н.Оспанова и А.Иманбаевой [41-46]. При этом оставались нерассмотренными сингулярные уравнения смешанного типа, заданные на всей плоскости. Основные трудности, встречающиеся при их изучении связаны с тем, что спектры соответствующих им дифференциальных операторов могут быть непрерывными.

В целом, теория дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов в случае неограниченной области с быстро растущими коэффициентами имеет сравнительно недолгую историю.

Выше приведенные факты свидетельствуют об актуальности темы диссертации.

### **Цель работы**

1. Исследовать на предмет существования и единственности решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа, заданных на всей плоскости.

2. Исследование вопросов о замыкаемости и непрерывной обратимости сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе.

### **Методика исследования**

В работе использованы: метод локализации, разработанный в работах М.Отелбаева, метод априорных оценок, преобразование Фурье, методы теорий линейных операторов, а также модификации метода исследования однопараметрического семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, предложенного в работах [37-44].

### **Научная новизна темы**

В работе получены следующие новые результаты:

- на плоскости, в терминах коэффициентов уравнения получено достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа;
- доказана замыкаемость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе;
- найдены условия, обеспечивающие непрерывную обратимость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе, коэффициенты которых зависят только от одной переменной;
- для указанных уравнений смешанного типа получены коэрцитивные оценки решений.

**Объект исследования** – дифференциальные уравнения и операторы смешанного типа с сингулярными коэффициентами, заданные в двумерных некомпактных областях.

**Предмет исследования** – вопросы существования, единственности и о дифференциальных свойствах решений уравнений смешанного типа в неограниченной области.

### **Выбор направлений исследования**

Диссертация состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников.

Остановимся на результатах работы.

На плоскости  $R^2$  рассмотрим следующее уравнение

$$L_{\lambda} u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u = f(x, y), \quad (1)$$

где  $f(x, y) \in L_2 \equiv L_2(R^2)$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $k(y)$  – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на  $R = (-\infty; \infty)$ , коэффициенты  $a(y)$ ,  $c(y)$  непрерывные функций в  $R$  и удовлетворяют условию

$$i) |a(y)| \geq \delta_0 > 0, \quad c(y) \geq \delta > 0.$$

В зависимости от знака коэффициента  $k(y)$  оператор (1) может соответственно принадлежат эллиптическому, параболическому, гиперболическому и смешанному типу.

В случае  $k(y) = -1$  оператор (1) принадлежит эллиптическому типу. Как известно вопрос о существовании резольвенты сингулярных эллиптических операторов, заданных в неограниченных областях достаточно хорошо изучен,

например в работах В.Н.Эверитта, М.Гирца, М.Отелбаева, К.Х.Бойматова, Т.Като и др.

В случае  $k(y) = 1$  уравнение (1) принадлежит гиперболическому типу. В случае ограниченной области вопросам существования, единственности и гладкости решения краевых задач для уравнения смешанного типа (1) посвящена обширная литература. В случае бесконечной области указанные вопросы изучены недостаточно и, вообще говоря, зависят от поведения коэффициентов  $a$  и  $c$ . Например, решение задачи без начальных условий

$$u_{tt} = u_{yy} - \alpha u_t \quad (0 < y < l, t \in R), \quad u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t),$$

где слагаемое  $\alpha u_t, \alpha > 0$  в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости, может быть неединственным, а при  $\alpha = 0$  не всегда существует [37]. Задачи без начальных условий представляют собой важный класс задач о распространении граничного режима. Младшие члены и правая часть в уравнении (1) характеризуют силы трения, которые присущи всякой физической системе. Дифференциальный оператор гиперболического типа во всем пространстве  $E^n$  (евклидово пространство размерности  $n$ ) исследован в работе М.Нагумо [38], где коэффициенты оператора и их производные непрерывные и ограниченные функции в  $E^n$ .

**Определение 1.** Функцию  $u \in L_2(R^2)$  назовем решением уравнения (1), если найдется последовательность  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R^2)$  такая, что  $\|u_n - u\|_2 \rightarrow 0$ ,  $\|L_\lambda u_n - f\|_2 \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для уравнения (1) при любой  $f(x, y) \in L_2(R^2)$  существует единственное решение  $u(x, y) \in L_2(R^2)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для любого решения  $u(x, y)$  уравнения (1) справедлива оценка

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \|\sqrt{c(y) + \lambda} u\|_2 \leq c \|f\|_2,$$

где  $c > 0$  – постоянное число.

**Пример 1.** Условиям теорем 1 и 2 удовлетворяет уравнение вида (1) с коэффициентами  $k(y) = \text{sign}(\sin y)$ ,  $a(y) = e^{|y|} \sin^2 e^{|y|} + 1$ ,  $c(y) = e^y + 1$ . Как видно, здесь функция  $a(y) = e^{|y|} \sin^2 e^{|y|} + 1$  может, не только расти на бесконечности, но и быстро колебаться.

Основной метод применяемый при доказательстве полученного результата является метод локальных оценок, развитого М.Отелбаевым [28-29], и модифицированного для применения к уравнению (1) на полосе  $\Omega = \{(x, y) : -\infty < y < +\infty, -\pi < x < \pi\}$  в работах М.Б.Муратбекова [41-43].

Приводим результаты второго раздела работы.

Пусть  $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$ . Рассмотрим дифференциальный оператор смешанного типа

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u \quad (2)$$

первоначально определенный на  $\tilde{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$ -множестве, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию  $u(x; -1) = u(x; 1) = 0$  и финитных по переменной  $x$ , коэффициенты  $a(x)$  и  $c(x)$  непрерывные функции в  $R = (-\infty; \infty)$ , а  $k(y)$  – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на отрезке  $[-1; 1]$ .

В отличие от (1) коэффициенты рассматриваемого оператора (2) при  $u_x(x, y)$  и  $u(x, y)$  зависят от аргумента  $x$ . При исследовании этого оператора возникает совершенно иная ситуация. В частности, применить подход работ вышеуказанных авторов, базирующийся на разделении переменных становится невозможным.

Определим класс  $K(\tau, b)$  коэффициентов удовлетворяющих следующим условиям:

i)  $|a(x)| \geq \delta_0 > 0, c(x) \geq \delta > 0$  – непрерывные функций в  $R(-\infty, +\infty)$ ;

ii)  $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$  для любого  $x \in R$ ; где  $c_0 > 0, c_1 > 0$  – постоянные числа;

iii)  $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau c(t)$  для всех  $x, t \in R$  таких, что  $|x - t| \leq bd(t), d(t) = \frac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}, b > 0, \tau > 0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ . Тогда найдутся такие числа  $\tau_0$  и  $b_0$ , что при  $\tau \in (0, \tau_0)$  и  $b > b_0$  замыкание оператора  $L$  в  $L_2(\Omega)$  существует.

**Теорема 4.** Пусть  $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ . Тогда найдутся такие числа  $\tau_0$  и  $b_0$ , что при  $\tau \in (0, \tau_0)$  и  $b > b_0$  оператор  $L$  имеет непрерывный обратный оператор в  $L_2(\Omega)$ .

Данный результат охватывают случай, когда коэффициенты при слагаемых  $u_x(x, y)$  и  $u(x, y)$  неограниченны. Вопрос о существовании резольвенты, в случае неограниченной области, для эллиптических и псевдодифференциальных операторов хорошо изучен и выяснены типичные трудности встречающиеся в связи с «плохим» поведением коэффициентов.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда найдутся такие числа  $\tau_0$  и  $b_0$ , что при  $\tau \in (0, \tau_0)$  и  $b > b_0$ , что для любого  $u \in D(L)$  справедлива следующая оценка

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \|u\| \leq c \|Lu\|_2,$$

где  $c > 0$  – постоянное число.

**Пример 2.** Рассмотрим оператор

$$l_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + (|x| + 32)u_x + (4x^2 + 4^6)u.$$

Нетрудно проверить, что условия вышеуказанных теорем выполняются. Следовательно, оператор  $l_0$  допускает замыкание и для него существует непрерывный обратный оператор.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих международных научных конференциях:

- Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики, Караганда, КарГУ, 2010 г.;

- Ломоносов-2011: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых – Астана: Казахский филиал МГУ им.М.В. Ломоносова, 2011 г.;

- 8-ой международной конгресс ISAAC, Москва, Российский университет дружбы народов, 2011 г.;

- Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II, Алматы, 2011 г.;

- Теоретические и прикладные проблемы математики и информационных технологий, Караганда, КарГУ, 2012 г.;

- Функциональный анализ и его приложения, Астана, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2012 г.;

а также на научном семинаре под руководством академика НАН РК д.ф.-м.н., проф. М.О.Отелбаева, член-корреспондента НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Р.О.Ойнарова, д.ф.-м.н., проф. Е.Нурсултанова, д.ф.-м.н., проф. К.Н.Оспанова (Астана, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева); результаты диссертационной работы также неоднократно докладывались и обсуждались на общегородском научном семинаре «Спектральные вопросы дифференциальных операторов» под руководством д.ф.-м.н., проф. М.Б.Муратбекова (Тараз, ТарГПИ).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [47-58].

В заключение выражаю искреннюю благодарность научным руководителям – доктору физико-математических наук, профессору М.Б.Муратбекову, доктору физико-математических наук, профессору К.Н.Оспанову, зарубежному научному консультанту профессору Берлинского свободного университета Г.Бегеру за постановку задачи, постоянное внимание к работе, полезные замечания и за ценные советы при обсуждении полученных результатов.