

А. БАРАЕВ, М. Ж. ЖУМАБАЕВ, А. С. ТУЛЕП

(Южно-Казахстанский государственный институт, Шымкент, Казахстан,
Международный Казахско-турецкий университет им. А. Ясави, Туркистан, Казахстан)

МЕТОДИКА РАСЧЕТА НАТЯЖЕНИЯ НИТИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХ НЕПОДВИЖНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Аннотация. Построена математическая модель скольжения нити, движущегося в стационарном режиме по поверхности трех неподвижных твердых тел. Получено аналитическое решение, позволяющее устанавливать зависимости сил натяжения, давления и трения от свойства материала, формы поперечного сечения и координаты расположения твердых тел в заданной плоскости, условия контакта и скорости продольного удара.

Ключевые слова: нить, скольжение, математическая модель, удар, поверхность, трения, сила, реакция, натяжение.

Тіпек сөздер: жіп, сырғанау, математикалық үлгі, соққы, бет, үйкеліс, күш, реакция, тартылу.

Keywords: thread, slip, mathematical model, blow, surface, friction, force, reaction, tension.

Вопросы динамики нити, теории распространения волн в гибких связях и взаимодействия нити с различными твердыми телами рассматривались, например, в работах [1–6]. В данной работе исследуются две задачи о скольжении движущегося в стационарном режиме нерастяжимой нити по поверхности трех неподвижных твердых тел.

Построены математические модели и получены аналитические решения рассмотренных задач.

Пусть при $t < 0$ нить огибает поверхности трех неподвижных твердых тел B_1, B_2, B_3 , расположенных в плоскости (x, y) и находится в состоянии покоя (рисунок 1). При $t \geq 0$ по левому концу нити производится продольный удар с постоянной скоростью u . Областям $AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3E$ нити присвоим номера 1, 2, 3, 4 соответственно.

Предполагается, что на левом конце нити действует груз заданной массы m , скользящей вдоль плоскости, расположенной параллельно к прямой EB_3 . На практике это может означать, что левый конец нити двигается несвободно. Например, в заданной текстильной машине левый конец нити отпускается из паковки, вращающийся под действием силы натяжения T_4 . Натяжение T_4 при равновесии нити будет уравновесить силы сопротивления движению паковки, а при движении паковки – превосходит эту силу.

Во многих работах по механике и в большинстве научной литературе в задачах о равновесии или скольжении идеальной нити по поверхности твердых тел предполагают, что вектор силы реакции поверхности контакта направлен по биссектрисе угла обхвата. Однако, большинство реальных нитей, используемых на практике, не являются идеальными. Например, текстильные нити, как известно, имеют сложные структуры по сечению и неоднородны по длине. Одним из основных показателей текстильных нитей является неровнота. Поэтому, здесь, следуя работам [2–5], предполагается, что вектор силы реакции направлен не по биссектрисе угла обхвата, а образует некоторый угол с нормалью к поверхности контакта, т.е. линии действия реактивных сил R_1, R_2, R_3 , возникающих на поверхности твердых тел B_1, B_2, B_3 образуют с вертикальной осью y углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ соответственно. Углы θ_j характеризуют условия контакта и могут быть функционально связаны с неровнотой текстильной нити, где $j = 1, 2, 3$. В дальнейшем углы θ_j считаются положительными, если силы R_j направлены так, как показано на рис. 1 и отрицательными – на рисунке 2. Здесь рассматривается плоская задача и поэтому в постановке задачи направления векторов реактивных сил R_j задаются условно, а знаки углов θ_j следуют из заданные направления этих сил. Заметим, что теоретическая задача установления функциональной связи неровноты текстильной нити с углами θ_j (рисунок 1) или какими-либо другими параметрами, например, движения нити продолжает оставаться нерешенной.

Далее предполагается, что силы трения связаны силами давления с помощью закона Кулона. Предположим, что возмущенные области 1, 2, 3, 4 нити, в каждый момент времени, имеют постоянные параметры движения – нить на каждом из участков 1, 2, 3, 4 совершает стационарное движение.

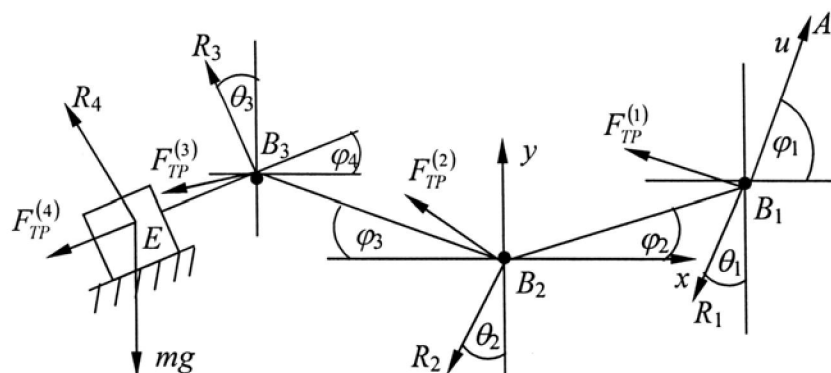


Рисунок 1

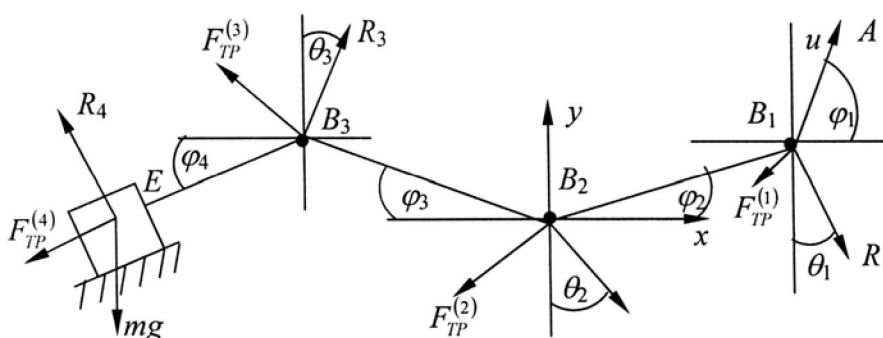


Рисунок 2

Введем обозначения: $x^{\bullet}$ и $y^{\bullet}$ – составляющие скорости частиц нити на оси x и y соответственно; ds – длина рассматриваемого элемента нити; s – лагранжева координата, отсчитываемая от точки A нити; T – натяжение; ρ – плотность материала нити; F – площадь поперечного сечения нити; f – коэффициент трения; φ – угол, образованный между касательной к данной точке нити и горизонтальной осью x . Неизвестные параметры движения будем снабжать соответствующими принятой нумерации рассматриваемых областей нити индексами. Индекс 0 соответствует начальным параметрам материала нити.

При принятых выше предположениях и обозначениях, уравнения закона сохранения количества движения, написанные в проекциях на оси x и y , условия нерастяжимости нити, неразрывности смещения и закона сохранения массы принимают вид [2-6]:

– в областях 1 и 2

$$\rho_1 F_1 ds_1 (x_1^{\bullet} - x_2^{\bullet}) = (T_1 \cos \varphi_1 - T_2 \cos \varphi_2 \mp R_1 \sin \theta_1 - f R_1 \cos \theta_1) dt, \quad (1)$$

$$\rho_1 F_1 ds_1 (y_1^{\bullet} - y_2^{\bullet}) = (T_1 \sin \varphi_1 - T_2 \sin \varphi_2 - R_1 \cos \theta_1 \pm f R_1 \sin \theta_1) dt, \quad (2)$$

$$ds_1 = \frac{|x_1^{\bullet}| dt}{\cos \varphi_1} = \frac{|y_1^{\bullet}| dt}{\sin \varphi_1}, \quad x_1^{\bullet} = u \cos \varphi_1, \quad y_1^{\bullet} = u \sin \varphi_1, \quad ds_0 = ds_1 = ds_2,$$

$$ds_2 = \frac{|x_2^{\bullet}| dt}{\cos \varphi_2} = \frac{|y_2^{\bullet}| dt}{\sin \varphi_2}, \quad x_2^{\bullet} = u \cos \varphi_2, \quad y_2^{\bullet} = u \sin \varphi_2, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_1 F_1 ds_1 = \rho_2 F_2 ds_2;$$

– в областях 2 и 3

$$\rho_2 F_2 ds_2 (x_2^{\bullet} - x_3^{\bullet}) = (T_2 \cos \varphi_2 - T_3 \cos \varphi_3 \mp R_2 \sin \theta_2 - f R_2 \cos \theta_2) dt, \quad (3)$$

$$\rho_2 F_2 ds_2 (y_2^{\bullet} - y_3^{\bullet}) = (T_2 \sin \varphi_2 + T_3 \sin \varphi_3 - R_2 \cos \theta_2 \pm f R_2 \sin \theta_2) dt, \quad (4)$$

$$ds_2 = \frac{|x_2^{\bullet}| dt}{\cos \varphi_2} = \frac{|y_2^{\bullet}| dt}{\sin \varphi_2}, \quad x_2^{\bullet} = u \cos \varphi_2, \quad y_2^{\bullet} = u \sin \varphi_2, \quad ds_0 = ds_2 = ds_3,$$

$$ds_3 = \frac{|x_3^*|dt}{\cos \varphi_3} = \frac{|y_3^*|dt}{\sin \varphi_3}, \quad x_3^* = u \cos \varphi_3, \quad y_3^* = -u \sin \varphi_3, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_2 F_2 ds_2 = \rho_3 F_3 ds_3;$$

– в областях 3 и 4

$$\rho_3 F_3 ds_3 (x_3^* - x_4^*) = (T_3 \cos \varphi_3 - T_4 \cos \varphi_4 \mp R_3 \sin \theta_3 - f R_3 \cos \theta_3) dt, \quad (5)$$

$$\rho_3 F_3 ds_3 (y_3^* - y_4^*) = (-T_3 \sin \varphi_3 - T_4 \sin \varphi_4 + R_3 \cos \theta_3 \mp f R_3 \sin \theta_3) dt, \quad (6)$$

$$ds_3 = \frac{|x_3^*|dt}{\cos \varphi_3} = \frac{|y_3^*|dt}{\sin \varphi_3}, \quad x_3^* = u \cos \varphi_3, \quad y_3^* = -u \sin \varphi_3, \quad ds_0 = ds_3 = ds_4,$$

$$ds_4 = \frac{|x_4^*|dt}{\cos \varphi_4} = \frac{|y_4^*|dt}{\sin \varphi_4}, \quad x_4^* = u \cos \varphi_4, \quad y_4^* = u \sin \varphi_4, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_3 F_3 ds_3 = \rho_4 F_4 ds_4.$$

В уравнениях (1)–(6) и в дальнейшем верхние знаки берутся, если равнодействующие силы реакции поверхности контакта направлены, так как показано на рисунке 1, а нижние знаки – на рисунке 2.

Уравнения (1)–(6) приводим к виду

$$u^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) = T_1^* \cos \varphi_1 - T_2^* \cos \varphi_2 - R_1^* (\pm \sin \theta_1 + f \cos \theta_1), \quad (7)$$

$$u^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) = T_1^* \sin \varphi_1 - T_2^* \sin \varphi_2 - R_1^* (\cos \theta_1 \mp f \sin \theta_1), \quad (8)$$

$$u^2 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3) = T_2^* \cos \varphi_2 - T_3^* \cos \varphi_3 - R_2^* (\pm \sin \theta_2 + f \cos \theta_2), \quad (9)$$

$$u^2 (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_3) = T_2^* \sin \varphi_2 + T_3^* \sin \varphi_3 - R_2^* (\cos \theta_2 \mp f \sin \theta_2), \quad (10)$$

$$u^2 (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_4) = T_3^* \cos \varphi_3 - T_4^* \cos \varphi_4 - R_3^* (\pm \sin \theta_3 + f \cos \theta_3), \quad (11)$$

$$u^2 (-\sin \varphi_3 - \sin \varphi_4) = -T_3^* \sin \varphi_3 - T_4^* \sin \varphi_4 + R_3^* (\cos \theta_3 \mp f \sin \theta_3), \quad (12)$$

где

$$T_k^* = \frac{T_k}{\rho_0 F_0}, \quad R_j^* = \frac{R_j}{\rho_0 F_0}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3.$$

В общем случае с помощью системы (7)–(12) можно рассматривать следующие три задачи:

1⁰. Пусть на правой границе известны скорость движения частиц нити u и натяжение T_1 . В этом случае неизвестные натяжения T_2, T_3, T_4 и реактивные силы R_1, R_2, R_3 выражаются через заданные скорость u и натяжение T_1 . При этом общее решение задачи будет иметь следующий вид $T_2 = T_2(u, T_1)$, $T_3 = T_3(u, T_1)$, $T_4 = T_4(u, T_1)$, $R_1 = R_1(u, T_1)$, $R_2 = R_2(u, T_1)$, $R_3 = R_3(u, T_1)$.

Проектируя на оси, параллельной отрезке EB_3 и перпендикулярной к последней сил действующих грузу при $t < 0$, т. е. в равновесном положении нити, получаем

$$T_4 - F_{TP}^{(4)} - mg \sin \varphi_4 = 0, \quad R_4 - mg \cos \varphi_4 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $F_{TP}^{(4)} = f R_4 = f mg \cos \varphi_4$ по закону Кулона и второе уравнение равновесия последней системы, найдем

$$T_4 = mg(f \cos \varphi_4 + \sin \varphi_4).$$

При $\varphi_4 = 0$ отсюда получаем $T_4 = fmg$, а при $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$ будем иметь $T_4 = mg$. Первое из этих

выражений означает, что при $\varphi_4 = 0$ в области 4 на нить прилагается действия силы сопротивления груза, скользящего вдоль горизонтальной оси x , а второе – на вертикально весящей области 4 нити действует сила тяжести груза массы m .

Условием движения нити в заданном направлении и под действием силы натяжения T_4 будет

$$T_4 > mg(f \cos \varphi_4 + \sin \varphi_4).$$

2⁰. На левой границе известны скорость частиц нити u и натяжение T_4 . Это означает, что закон движения груза заранее известно и натяжение T_4 удастся определить из заданного закона движения груза. В данном случае, натяжения T_1, T_2, T_3 и реактивные силы R_1, R_2, R_3 выражаются через

заданные скорость u и натяжение T_4 . Общее решение задачи будет иметь вид $T_1 = T_1(u, T_4)$, $T_2 = T_2(u, T_4)$, $T_3 = T_3(u, T_4)$, $R_1 = R_1(u, T_4)$, $R_2 = R_2(u, T_4)$, $R_3 = R_3(u, T_4)$.

3⁰. В частности, если левый конец нити движется свободно и $T_4 = 0$, то натяжения областей 1–3 и все реактивные силы можно выразить через скорость u .

Очевидно, что случай 3⁰ можно рассматривать как частный случай задачи 2⁰. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только случаев 1⁰ и 2⁰.

Легко проверить, что при граничных условиях задачи 1⁰ уравнения (7)–(12) имеют следующее решение

$$R_1^* = \frac{(u^2 - T_1^*)\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f\sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \quad T_2^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_1^*)[\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f\sin(\varphi_1 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f\sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \quad (13)$$

$$R_2^* = \frac{(u^2 - T_2^*)\sin(\varphi_2 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_3 \mp \theta_2) + f\sin(\varphi_3 \mp \theta_2)}, \quad T_3^* = u^2 - \frac{(T_2^* - u^2)[\cos(\varphi_2 \pm \theta_2) - f\sin(\varphi_2 \pm \theta_2)]}{\cos(\varphi_3 \mp \theta_2) + f\sin(\varphi_3 \mp \theta_2)}, \quad (14)$$

$$R_3^* = \frac{(T_3^* - u^2)\sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f\sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}, \quad T_4^* = u^2 - \frac{(T_3^* - u^2)[\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f\sin(\varphi_3 \pm \theta_3)]}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f\sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}. \quad (15)$$

Выражения (13)–(15) являются решением задачи 1⁰ и служат для определения неизвестных натяжения T_2 , T_3 , T_4 и реактивные силы R_1 , R_2 , R_3 .

Исключая неизвестные натяжения T_2 и T_3 , полученное решение можно привести к более удобной для теоретического анализа и проведения численно-экспериментальных исследований форме, т.е. к виду $T_1 = T_1(u, T_4)$, $T_2 = T_2(u, T_4)$, $T_3 = T_3(u, T_4)$, $R_1 = R_1(u, T_4)$, $R_2 = R_2(u, T_4)$, $R_3 = R_3(u, T_4)$.

Заметим, что в большинство научной литературе вместе решение (13)–(15) используют известную формулу Эйлера, который в применении к данной задаче принимает вид

$$T_1 = T_2 e^{f(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad T_2 = T_3 e^{f(\varphi_2 + \varphi_3)}, \quad T_3 = T_4 e^{f(\varphi_3 + \varphi_4)}.$$

Однако, в таком случае во-первых в решение задачи не будет входить скорость движения нити, во-вторых для определения реактивных сил приходится использовать какие-то подходы имея ввиду, что формула Эйлера следствием закона сохранения количества движения (или импульса).

В случае идеальной нити $\theta = 0$ уравнения (1)–(6) и решение (13)–(15) принимают соответственно:

$$\begin{aligned} \rho_1 F_1 ds_1 (\dot{x}_1^* - \dot{x}_2^*) &= (T_1 \cos \varphi_1 - T_2 \cos \varphi_2 - fR_1)dt, \\ \rho_1 F_1 ds_1 (\dot{y}_1^* - \dot{y}_2^*) &= (T_1 \sin \varphi_1 - T_2 \sin \varphi_2 - R_1)dt, \\ \rho_2 F_2 ds_2 (\dot{x}_2^* - \dot{x}_3^*) &= (T_2 \cos \varphi_2 - T_3 \cos \varphi_3 - fR_2)dt, \\ \rho_2 F_2 ds_2 (\dot{y}_2^* - \dot{y}_3^*) &= (T_2 \sin \varphi_2 + T_3 \sin \varphi_3 - R_2)dt, \\ \rho_3 F_3 ds_3 (\dot{x}_3^* - \dot{x}_4^*) &= (T_3 \cos \varphi_3 - T_4 \cos \varphi_4 - fR_3)dt, \\ \rho_3 F_3 ds_3 (\dot{y}_3^* - \dot{y}_4^*) &= (-T_3 \sin \varphi_3 - T_4 \sin \varphi_4 + R_3)dt; \\ R_1^* &= \frac{(u^2 - T_1^*)\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - f\sin \varphi_2}, \quad T_2^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_1^*)(\cos \varphi_1 - f\sin \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - f\sin \varphi_2}, \\ R_2^* &= \frac{(u^2 - T_2^*)\sin(\varphi_2 + \varphi_3)}{\cos \varphi_3 + f\sin \varphi_3}, \quad T_3^* = u^2 - \frac{(T_2^* - u^2)(\cos \varphi_2 - f\sin \varphi_2)}{\cos \varphi_3 + f\sin \varphi_3}, \\ R_3^* &= \frac{(T_3^* - u^2)\sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos \varphi_4 + f\sin \varphi_4}, \quad T_4^* = u^2 - \frac{(T_3^* - u^2)(\cos \varphi_3 - f\sin \varphi_3)}{\cos \varphi_4 + f\sin \varphi_4}. \end{aligned}$$

При $t < 0$, т.е. когда нить находится в равновесном состоянии ($u = 0$), уравнения (1)–(6) и полученное решение принимают вид:

$$\begin{aligned} T_1 \cos \varphi_1 - T_2 \cos \varphi_2 \mp R_1 \sin \theta_1 - fR_1 \cos \theta_1 &= 0, \\ T_1 \sin \varphi_1 - T_2 \sin \varphi_2 - R_1 \cos \theta_1 \pm fR_1 \sin \theta_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_2 \cos \varphi_2 - T_3 \cos \varphi_3 \mp R_2 \sin \theta_2 - f R_2 \cos \theta_2 = 0, \\
& T_2 \sin \varphi_2 + T_3 \sin \varphi_3 - R_2 \cos \theta_2 \pm f R_2 \sin \theta_2 = 0, \\
& T_3 \cos \varphi_3 - T_4 \cos \varphi_4 \mp R_3 \sin \theta_3 - f R_3 \cos \theta_3 = 0, \\
& -T_3 \sin \varphi_3 - T_4 \sin \varphi_4 + R_3 \cos \theta_3 \mp f R_3 \sin \theta_3 = 0; \\
& R_1^* = \frac{-T \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \quad T_2^* = \frac{T_1^* [\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \\
& R_2^* = \frac{-T_2^* \sin(\varphi_2 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_3 \mp \theta_2) + f \sin(\varphi_3 \mp \theta_2)}, \quad T_3^* = -\frac{T_2^* [\cos(\varphi_2 \pm \theta_2) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_2)]}{\cos(\varphi_3 \mp \theta_2) + f \sin(\varphi_3 \mp \theta_2)}, \\
& R_3^* = \frac{T_3^* \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}, \quad T_4^* = -\frac{T_3^* [\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)]}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь задачу 2^0 . На правой границе нити известны скорость движения частиц u и натяжение T_4 . Требуется найти неизвестные натяжения T_1, T_2, T_3 и реактивные силы R_1, R_2, R_3 , т.е. определить функции $T_1 = T_1(T_4, u)$, $R_1 = R_1(T_4, u)$, $T_2 = T_2(T_4, u)$, $R_2 = R_2(T_4, u)$, $T_3 = T_3(T_4, u)$, $R_3 = R_3(T_4, u)$.

В принятой постановке задачи 2^0 , уравнения (7)–(12) имеют следующее решение

$$T_3^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_4^*) [\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)]}{\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)}, \quad R_3^* = \frac{(T_4^* - u^2) \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)}, \quad (16)$$

$$T_2^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_3^*) [\cos(\varphi_3 \mp \theta_2) - f \sin(\varphi_3 \mp \theta_2)]}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_2) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_2)}, \quad R_2^* = \frac{(T_3^* - u^2) \sin(\varphi_2 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_2) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_2)}, \quad (17)$$

$$T_1^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_2^*) [\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}, \quad R_1^* = \frac{(u^2 - T_2^*) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}. \quad (18)$$

В случаях скольжения идеальной нити ($\theta = 0$) и в равновесном состоянии ($u = 0$), решение задачи 2^0 принимает вид соответственно:

$$\begin{aligned}
T_3^* &= u^2 - \frac{(u^2 - T_4^*) (\cos \varphi_4 + f \sin \varphi_4)}{\cos \varphi_3 - f \sin \varphi_3}, & R_3^* &= \frac{(T_4^* - u^2) \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos \varphi_3 - f \sin \varphi_3}, \\
T_2^* &= u^2 - \frac{(u^2 - T_3^*) (\cos \varphi_3 - f \sin \varphi_3)}{\cos \varphi_2 - f \sin \varphi_2}, & R_2^* &= \frac{(T_3^* - u^2) \sin(\varphi_2 + \varphi_3)}{\cos \varphi_2 - f \sin \varphi_2}, \\
T_1^* &= u^2 - \frac{(u^2 - T_2^*) (\cos \varphi_2 - f \sin \varphi_2)}{\cos \varphi_1 - f \sin \varphi_1}, & R_1^* &= \frac{(u^2 - T_2^*) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_1 - f \sin \varphi_1}; \\
T_3^* &= \frac{T_4^* [\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)]}{\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)}, & R_3^* &= \frac{T_4^* \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)}, \\
T_2^* &= \frac{T_3^* [\cos(\varphi_3 \mp \theta_2) - f \sin(\varphi_3 \mp \theta_2)]}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_2) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_2)}, & R_2^* &= \frac{T_3^* \sin(\varphi_2 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_2) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_2)}, \\
T_1^* &= \frac{T_2^* [\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}, & R_1^* &= \frac{-T_2^* \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}.
\end{aligned}$$

Пусть твердое тело B_2 и груз массы m в плоскости (x, y) расположены так, как показано на рисунке 3. В первой задаче (рисунки 1 и 2) правый конец нити (точка A) и груз массы m двигаются в направлении роста оси y , а во второй задаче (рисунок 3) направления движения правого конца нити и груза m меняются на противоположные – двигаются в направлении убывания оси y . Схема движения нити в окрестности точки B_2 совпадает с предыдущим случаем. Поэтому уравнения движения (3)–(4) остаются без изменения, а уравнения (1), (2) и (5), (6) принимают вид соответственно:

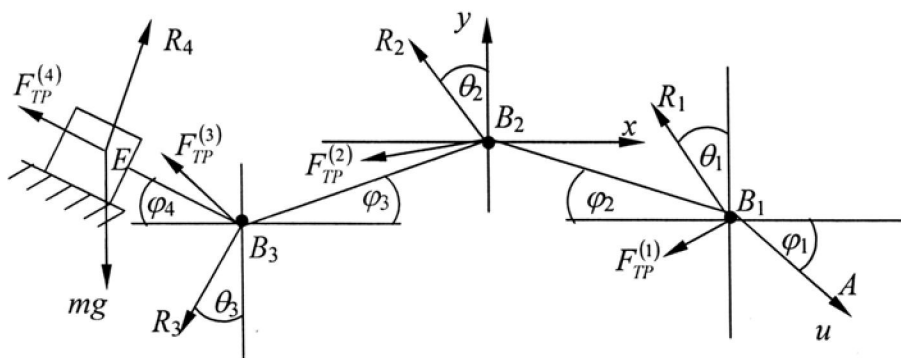


Рисунок 3

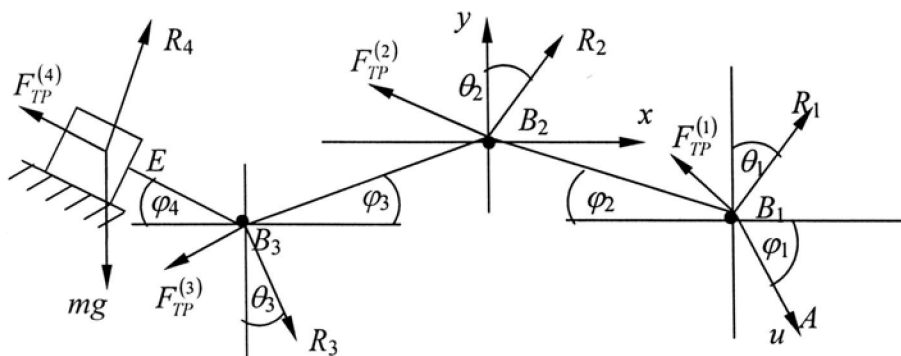


Рисунок 4

– в областях 1 и 2

$$\rho_1 F_1 ds_1 (x_1^* - x_2^*) = (T_1 \cos \varphi_1 - T_2 \cos \varphi_2 \mp R_1 \sin \theta_1 - f R_1 \cos \theta_1) dt, \quad (19)$$

$$\rho_1 F_1 ds_1 (y_1^* - y_2^*) = (-T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 + R_1 \cos \theta_1 \mp f R_1 \sin \theta_1) dt, \quad (20)$$

$$ds_1 = \frac{|x_1^*| dt}{\cos \varphi_1} = \frac{|y_1^*| dt}{\sin \varphi_1}, \quad x_1^* = u \cos \varphi_1, \quad y_1^* = -u \sin \varphi_1, \quad ds_0 = ds_1 = ds_2,$$

$$ds_2 = \frac{|x_2^*| dt}{\cos \varphi_2} = \frac{|y_2^*| dt}{\sin \varphi_2}, \quad x_2^* = u \cos \varphi_2, \quad y_2^* = -u \sin \varphi_2, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_1 F_1 ds_1 = \rho_2 F_2 ds_2;$$

– в областях 3 и 4

$$\rho_3 F_3 ds_3 (x_3^* - x_4^*) = (T_3 \cos \varphi_3 - T_4 \cos \varphi_4 \mp R_3 \sin \theta_3 - f R_3 \cos \theta_3) dt, \quad (21)$$

$$\rho_3 F_3 ds_3 (y_3^* - y_4^*) = (T_3 \sin \varphi_3 + T_4 \sin \varphi_4 - R_3 \cos \theta_3 \pm f R_3 \sin \theta_3) dt, \quad (22)$$

$$ds_3 = \frac{|x_3^*| dt}{\cos \varphi_3} = \frac{|y_3^*| dt}{\sin \varphi_3}, \quad x_3^* = u \cos \varphi_3, \quad y_3^* = u \sin \varphi_3, \quad ds_0 = ds_3 = ds_4,$$

$$ds_4 = \frac{|x_4^*| dt}{\cos \varphi_4} = \frac{|y_4^*| dt}{\sin \varphi_4}, \quad x_4^* = u \cos \varphi_4, \quad y_4^* = -u \sin \varphi_4, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_3 F_3 ds_3 = \rho_4 F_4 ds_4,$$

верхние знаки берутся, если равнодействующие силы реакции поверхности контакта направлены, так как показано на рисунке 3, а нижние знаки – на рисунке 4.

Сравнивая уравнения (1), (2), (5), (6) и (19)–(21) видим, что уравнения закона сохранения движения (1), (5), написанные в проекциях на ось x в обеих задачах, изображенных на рисунках 1, 2 и 3, 4 остаются без изменения, а в уравнениях (2), (6), написанных в проекциях на ось y меняются некоторые знаки. Аналогично, выражения составляющих скорости x_1^* , x_2^* , x_3^* и x_4^* в обеих задачах

остаются без изменения, а выражениях составляющих скорости y_1^* , y_2^* , y_3^* и y_4^* некоторые знаки меняются на противоположные. Поэтому, в дальнейшем уравнения (7), (11), следующие из уравнения (1), (5), остаются без изменения, а уравнения (8) и (12) в рассматриваемой задаче принимают вид соответственно:

$$u^2(-\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = -T_1^* \sin \varphi_1 + T_2^* \sin \varphi_2 + R_1^*(\cos \theta_1 \mp f \sin \theta_1), \quad (23)$$

$$u^2(\sin \varphi_3 + \sin \varphi_4) = T_3^* \sin \varphi_3 + T_4^* \sin \varphi_4 + R_3^*(-\cos \theta_3 \pm f \sin \theta_3). \quad (24)$$

Эти уравнения будем рассматривать совместно с уравнениями (7) и (11).

Пусть граничные условия совпадают условиями задачи 1⁰. Уравнения (7), (11) и (23), (24) имеют решение

$$R_1^* = \frac{(u^2 - T_1^*) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \quad T_2^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_1^*) [\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \quad (25)$$

$$R_3^* = \frac{(u^2 - T_3^*) \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}, \quad T_4^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_3^*) [\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)]}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}. \quad (26)$$

Общий вид решения (13), (1) и (25), (26) совпадает. Однако, входящие в решение (13) параметры φ_1 и T_1^* отличаются от аналогичных параметров, входящих в решение (25). Поэтому эти решения в общем случае совпадают только качественно, а количественно они могут совпадать только в некоторых частных случаях.

Выражения (25)–(26) совместно с, полученными выше в задаче 1⁰ формулами для R_2^* и T_3^* , образуют систему решения задачи.

При $\theta = 0$ и $u = 0$, последнее решение принимает вид соответственно:

$$R_1^* = \frac{(u^2 - T_1^*) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - f \sin \varphi_2}, \quad T_2^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_1^*) (\cos \varphi_1 - f \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - f \sin \varphi_2},$$

$$R_3^* = \frac{(u^2 - T_3^*) \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos \varphi_4 + f \sin \varphi_4}, \quad T_4^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_3^*) (\cos \varphi_3 - f \sin \varphi_3)}{\cos \varphi_4 + f \sin \varphi_4},$$

$$R_1^* = \frac{-T_1^* \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)}, \quad T_2^* = \frac{T_1^* [\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)},$$

$$R_3^* = \frac{-T_3^* \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}, \quad T_4^* = \frac{T_3^* [\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)]}{\cos(\varphi_4 \mp \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)}.$$

Задача 2⁰ в рассматриваемом случае имеет следующее решение

$$T_3^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_4^*) [\cos(\varphi_4 \pm \theta_3) + f \sin(\varphi_4 \mp \theta_3)]}{\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)}, \quad R_3^* = \frac{(T_4^* - u^2) \sin(\varphi_4 + \varphi_3)}{\cos(\varphi_3 \pm \theta_3) - f \sin(\varphi_3 \pm \theta_3)}, \quad (27)$$

$$T_1^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_2^*) [\cos(\varphi_2 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_2 \pm \theta_1)]}{\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}, \quad R_1^* = \frac{(u^2 - T_2^*) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_1 \pm \theta_1) - f \sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}. \quad (28)$$

Полученные выражения (27) – (28) совместно с (17) образуют схему аналитического решения задачи 2⁰.

Выводы:

1. Построена математическая модель скольжения нити, движущегося в стационарном режиме по поверхности трех неподвижных твердых тел.

2. Получено аналитическое решение, позволяющее устанавливать зависимости сил натяжения, давления и трения от свойства материала, формы поперечного сечения и координаты расположения твердых тел в заданной плоскости, условия контакта и скорости продольного удара.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Каган В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 218 с.
- 2 Бараев А., Эргашов М., Дасибеков А. Натяжение, деформация и неровнота гибкой связи. – Астана, 2008. – 354. с
- 3 Бараев А., Юнусов А., Авдеев А. Исследование влияний граничных условий на параметры скольжения нерастяжимой нити // Мат-лы междунаучно-метод. конф. «Актуальные проблемы образования, науки и производства – 2008». – Т. 1. – Шымкент, 2008. – С. 145-149.
- 4 Бараев А. Математические модели скольжения намоточных связей // Технология Машиностроения. – М., 2009. – № 7. – С. 38-42.
- 5 Бараев А. Скольжения нерастяжимой гибкой нити по поверхности твердого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М., 2009. – № 3. – С. 9-12.
- 6 Бараев А., Дасибеков А.Д., Кудтурсинов Ж.К. О проблеме решения задачи скольжения гибкой связи по поверхности твердого тела // Междунаучно-технич. конф. «Механика деформируемого твердого тела», посвящ. 70-летию акад. АН Р.Уз Ш. Т. Ширинкулова. – Самарканд, 2007. – С. 78-81.

REFERENCES

- 1 Kagan V.M. Vzaimodejstvie niti s rabochimi organami tekstil'nyh mashin. M.: Legkaja i pishhevaja promyshlennost', 1984. 218 s.
- 2 Baraev A., Jergashov M., Dasibekov A. Natjazhenie, deformacija i nerovnota gibkoj svjazi. Astana, 2008. 354. s
- 3 Baraev A., Junusov A., Avdeev A. Issledovanie vlijanij granichnyh uslovij na parametry skol'zhenija nerastjazhimoj niti. Mat-ly mezhdun. nauchno-metod. konf. «Aktual'nye problemy obrazovanija, nauki i proizvodstva – 2008». T. 1. Shymkent, 2008. S. 145-149.
- 4 Baraev A. Matematicheskie modeli skol'zhenija namotochnyh svjazej. Tehnologija Mashinstroenija. M., 2009. № 7. S. 38-42.
- 5 Baraev A. Skol'zhenija nerastjazhimoj gibkoj niti po poverhnosti tverdogo tela. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. M., 2009. № 3. S. 9-12.
- 6 Baraev A., Dasibekov A.D., Kul'tursinov Zh.K. O probleme reshenija zadachi skol'zhenija gibkoj svjazi po poverhnosti tverdogo tela/ Mezhdun. nauchno-tehnich. konf. «Mehanika deformiruemogo tverdogo tela», posvjashh. 70-letiju akad. AN R.Uz Sh. T. Shirinkulova. Samarkand, 2007. S. 78-81.

Резюме

А. Бараев, М. Ж. Жұмабаев, А. С. Төлеп

(Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік институты, Шымкент, Қазақстан,
Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық Қазақ-Түрік университеті, Түркістан, Қазақстан)

ҚОЗҒАЛМАЙТЫН ҮШ ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ БЕТІМЕН СЫРҒЫП ҚОЗҒАЛАТЫН СОЗЫЛМАЙТЫН ЖІП ЕСЕБІНІҢ ӨДІСТЕМЕСІ

Қозғалмайтын үш қатты дененің бетімен стационарлық режимде сырғып қозғалатын созылмайтын жіптің жазық есебі қарастырылады. Қарастырылған есептің математикалық үлгісі және аналитикалық шешімі келтірілген.

Тірек сөздер: жіп, сырғанау, математикалық үлгі, соққы, бет, үйкеліс, күш, реакция, тартылу.

Summary

A. Baraev, M. Zh. Zhumabayev, A. S. Tulep

(South-Kazakhstan state institute, Shymkent, Kazakhstan,
International Kazakh-Turkish University named by Kh. A. Yassavi, Turkestan, Kazakhstan)

THE CALCULATION METHOD OF THE THREAD TENSION ON SKOLEASE SURFACE THREE FIXED SOLIDS

The method of calculation of stretching of non-elongation yarn, which moves on the surface solid body. In this paper given a flat problems about sliding of moving non-elongation yarn on the surface of the three solid body in the stationary regime. Mathematical model and analytical solution of the problem is given as well.

Keywords: thread, slip, mathematical model, blow, surface, friction, force, reaction, tension.

Поступила 10.03.2014 г.