УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], А. А. БЕКОВ[1], А. АБЖАПБАРОВ[2],
С. С. ДАЙЫРБЕКОВ[3],Е. С. АЯШЕВА[3], А. С. САНСЫЗБАЕВА[3]

([1]Институт космических исследований им. академика У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,
[2]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. О. Ауезова, Шымкент, Казахстан,
[3]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан)

АНАЛОГ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ С. В. КОВАЛЕВСКОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Аннотация. Найден новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения. Случай интегрируемости получен для осесимметричного твердого тела, главные центральные моменты инерции которого связаны между собой равенством $A = B = 2C$, причем $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$, где C – центр масс твердого тела. Точно с таким же распределением масс С. В. Ковалевской была решена другая задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Общее решение в этом случае было записано в гиперэллиптических функциях. Это решение было получено в 1889 г. Неподвижная точка была расположена в экваториальной плоскости, т.е. $x_G \neq 0$, $y_G \neq 0$, $z_G = 0$, где G – точка приложения силы тяжести тела. Оказалось, что эта задача тесно связана со многими актуальными проблемами математики и механики и с каждым годом все больше расширяются теоретические и практические приложения достигнутых результатов и методов, которыми они получены [1]. В нашей задаче, в отличие от задачи С. В. Ковалевской, центр, относительно которого совершается вращательное движение, совмещен с центром масс тела, следовательно, момент силы тяжести относительно центра масс равен нулю, и движение тела происходит в центральном ньютоновском поле тяготения.

В нашем случае полная система дифференциальных уравнений вращательных движений относительно центра масс тела в ньютоновском поле тяготения допускает четыре независимых первых интеграла. Согласно общей теории наличие этих четырех интегралов позволяет проинтегрировать полную систему дифференциальных уравнений поставленной задачи. Полученные решения являются модельными решениями, которые могут быть использованы для прогнозирования вращательных движений неуправляемых космических объектов (спутники Земли в нештатных ситуациях, космический мусор и т.д.).

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательные движения, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает движение относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения, тогда полная система дифференциальных уравнений в подвижных осях, направленных по главным центральным осям тела, имеют вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ q &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &A\dot p + (C-B)qr = \varepsilon(C-B)\gamma'\gamma'', \\ &B\dot q + (A-C)pr = \varepsilon(A-C)\gamma''\gamma, \\ &C\dot r + (B-A)pq = \varepsilon(B-A)\gamma\gamma', \quad \varepsilon = \frac{2\mu}{R^3}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\dot\gamma = r\gamma' - q\gamma'', \ \dot\gamma' = p\gamma'' - r\gamma, \ \dot\gamma'' = q\gamma - p\gamma', \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\gamma = \sin\varphi\sin\theta,\quad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma'' = \cos\theta,\quad \psi = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2},\\ &\theta = \arccos\gamma'',\quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где θ, φ, ψ – углы Эйлера; μ – гравитационная постоянная, R – расстояние от центра масс до центра притяжения; p, q, r – проекции угловой скорости тела $\overline{\omega}$ на подвижные оси; γ, γ′, γ″ – направляющие косинусы; A,B,C – главные центральные моменты инерции тела; (1) – кинематические уравнения Эйлера; (2) – динамические уравнения Эйлера; (3) – соотношения Пуассона; (4) – соотношения Ю. А. Архангельского.

Рассмотрим случай, когда главные моменты инерции тела связаны между собой соотношением

$$A = B = 2C. \tag{5}$$

Перепишем (2) с учетом (5)

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{dp}{dt} - qr = -\varepsilon\gamma'\gamma'',\\ &2\frac{dq}{dt} + pr = \varepsilon\gamma\gamma'',\\ &C\frac{dr}{dt} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из последнего уравнения находим первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const}. \tag{7}$$

Перепишем (6), используя (7)

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{dp}{dt} - qr_0 = -\varepsilon\gamma''\gamma'',\\ &2\frac{dq}{dt} + pr_0 = \varepsilon\gamma\gamma''.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (4) находим тривиальный интеграл

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1. \tag{9}$$

Для определения интеграла энергии умножим первое уравнение из (8) на p, второе на q и сложим

$$2p\frac{dp}{dt} + 2q\frac{dq}{dt} = \varepsilon\gamma''(q\gamma - p\gamma'), \tag{10}$$

теперь учтем, что $\dot{\gamma}'' = q\gamma - p\gamma'$, тогда после незначительных преобразований имеем интеграл энергии в следующем виде

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2 + C_1. \tag{11}$$

где C_1 – постоянная интеграла энергии.

Для определения интеграла площадей умножим первое из уравнений (8) на γ, второе на γ′ и сложим

$$2\left(\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt}\right) + r_0(p\gamma' - q\gamma) = 0, \tag{12}$$

учитывая $(p\gamma' - q\gamma) = -\dfrac{d\gamma''}{dt}$, найдем

$$2\left(\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt}\right) + r_0\frac{d\gamma''}{dt} = 0, \tag{13}$$

Преобразуем (13), учитывая (3)

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p+\gamma' q-\frac{1}{2}r_0\gamma''\right)=-r_0\frac{d\gamma''}{dt}, \tag{14}$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p+\gamma' q-\frac{3}{4}r_0\gamma''\right)=0,$$

следовательно, интеграл площадей имеет вид

$$\gamma p+\gamma' q=C_2-\frac{1}{2}r_0\gamma'', \tag{15}$$

где C_2 – постоянная интеграла площадей.

Таким образом, имеем четыре первых интеграла: (7), (9), (11) и (15)

$$\left.\begin{aligned} &r=r_0=const,\\ &\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\\ &p^2+q^2=\frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2+C_1,\\ &\gamma p+\gamma' q=C_2-\frac{1}{2}r_0\gamma''. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Проверим их на линейную независимость, для этого перепишем (16) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &r=r_0,\\ &\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\\ &p^2+q^2-\frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2=C_1,\\ &\gamma p+\gamma' q+\frac{1}{2}r_0\gamma''=C_2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и составим следующую линейную комбинацию

$$\lambda_1 r_0+\lambda_2\cdot 1+\lambda_3 C_1+\lambda_4 C_2=0, \tag{18}$$

где λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 – const, здесь $r_0\neq 0$, $1\neq 0$, $C_1\neq 0$, $C_2\neq 0$, поэтому (18) удовлетворяется только при $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$, т.е. первые интегралы (17) линейно независимы.

Согласно общей теории [2] наличие четырех линейно независимых первых интегралов позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1)-(3).

Найдем углы Эйлера в квадратурах. Из (1) найдем

$$p^2+q^2=\dot\theta^2+\dot\psi^2(1-\gamma''^2). \tag{19}$$

Из уравнения (3) системы (4) найдем

$$\dot\theta^2=\frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2. \tag{20}$$

Из третьего уравнения системы (17) имеем

$$p^2+q^2=C_1-\frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2. \tag{21}$$

Из (4) и последнего уравнения из (17) находим

$$\dot\psi^2=\left(\frac{2C_2-r_0\gamma''}{2(1-\gamma''^2)}\right)^2. \tag{22}$$

Из (19)–(22) исключая (p^2+q^2), $\dot\theta^2$, $\dot\psi^2$, находим

$$a_0 t = \int \frac{d\gamma''}{\sqrt{-\gamma''^4 + b_1\gamma''^3 + b_2\gamma''^2 + b_3\gamma'' + b_4}} + C_3, \tag{23}$$

где $b_1 = 0$, $b_2 = 1 - \frac{2C_1}{\varepsilon} - \frac{r_0^2}{2\varepsilon}$, $b_3 = \frac{2C_2 r_0}{\varepsilon}$, $b_4 = \frac{(2C_1 - 2C_2^2)}{\varepsilon}$, $a_0 = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, C_3 – const.

Из (23) имеем $\gamma'' = F(t, C_3)$, следовательно, из (20) найдем

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \left(\frac{d\gamma''}{dt}\right) dt + C_4. \tag{24}$$

Из (22)

$$\psi = \int \frac{2C_2 - r_0\gamma''}{2(1-\gamma''^2)} dt + C_5. \tag{25}$$

Из последнего уравнения (1) находим

$$r_0 = \dot{\psi}\gamma'' + \dot{\varphi},$$

т.е.

$$\varphi = \int (r_0 - \dot{\psi}\gamma'') dt + C_6. \tag{26}$$

Выражения (24), (25), (26) определяют углы Эйлера в квадратурах.

Результаты исследований важны для разработки модельных расчетов задач небесной механики и динамики космического полета.

ЛИТЕРАТУРА

1 Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 172 с.

2 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

REFERENCES

1 Dokshevych A.I. Reshenya v konechnom vide uravnenii Eulera-Puassona. M.–Igevsk, 2004. 172 p. (in Russ.).

2 Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[1], А. Б. Әбжапбаров[2], С. С. Дайырбеков[3], Е. С. Аяшева[3], А. С. Сансызбаева[3]

([1]Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан, [3]М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан, [2]Сырдария университеті, Жетісай, Қазақстан)

С. В. КОВАЛЕВСКАЯНЫҢ ИНТЕГРАЛДАНУ КЕЗЕҢІНЕ ҰҚСАС ОРТАЛЫҚ НЬЮТОН ӨРІСІНДЕГІ ИНТЕГРАЛДАНУ КЕЗЕҢІ ТУРАЛЫ

Қатты дененің массалық центріне қатысты орталық ньютон өрісіндегі қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің жаңа интегралдану кезеңі анықталды. Интегралдану жолы өстік симметриялық денеге байланысты қорытылды. Мұнда бас орталық инерциялық моменттер байланысы былай ерекшеленеді: $A = B = 2C$, $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$, , C – массалық центр. Тура осындай масса жайылу жағдайында 1889 жылы С. В. Ковалевская жылжымайтын нүктеге қатысты қатты дененің айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің бір шешілу кезеңін ашқан еді. Мұнда жылжымайтын нүкте G дененің экваторлық қимасында орналасқан болатын $x_G \neq 0$, $y_G \neq 0$, $z_G = 0$ және дене қозғалысы G нүктесінен бағытталған ауырлық күшінің әсерінен айналмалы қозғалатын. Шешім жалпы түрде гиперэллипстік интегралдарды қолданып жазылған болатын. Уақыт өте бұл шешім көптеген өзекті математика және механика есептерімен байланысты болып, күннен күнге кеңінен қолданыс тапты. Осы күнге дейін ондағы әдістер мен ой өрістер құндылығын жоймады

[1]. Біз С. В. Ковалевская есебіндегі дененің айналу нүктесін массалық центрге ауыстырдық, және қозғалыс ньютонның орталық күш өрісінде өрбиді деп алдық, өйткені жасанды Жер серігінің қозғалысы екі қозғалысқа жіктеледі: орбиталық (массалық центрімен бірге) және айналмалы массалық центрге қатысты.

Біздің жағдайда дифференциалдық теңдеулер тәуелсіз төрт бірінші интегралдарды қорытуға мүмкіндік береді. Жалпы теория негізінде олар толық шешімге алып келеді. Шешім квадратуралар арқылы Эйлер бұрыштарын өрнектейді. Шешімдер басқарылмайтын ғарыштық нысандардың қозғалысын қадағалауға мүмкіншілік орнатады.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Summary

M. D. Shynybayev[1], A. A. Bekov[1], A. B. Abzhapbarov[2], S. S. Da'yrbekov[3], E. S. Aysheva[3], A. S. Sansyzbayeva[3]

([1] Professor W. M. Sultangazina Institute of space research of JSC «NCKIT», Almaty, Kazakhstan,
[2] M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan,
[3] University Of Syr-Daria, Džetysaj, Kazakhstan)

SIMILAR INTEGRABILITY S. V. KOVALEVSKAYA
IN THE CENTRAL NEWTONIAN GRAVITATIONAL FIELD

Found a new case of integrability of differential equations of rotational motion of a rigid body about the center of mass in a Central Newtonian field cha-gathania. The case of integrability of the obtained for an axisymmetric rigid body, the principal Central moments of inertia which are connected by equality $A = B = 2C$, and $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$, where C is the center of mass of a rigid body. With exactly the same distribu-tion of mass C. V. Kovalevskaya was solved another problem of rotation of a rigid body around a fixed point in a homogeneous field of gravity. A common solution in this case was recorded in hyperelliptic functions. This decision was received in 1889 Fixed point was located in the Equatorial plane, i.e. $x_G \neq 0$, $y_G \neq 0$, $z_G = 0$, where G is the point of application of force of gravity. It turned out that this problem is closely connected with many topical problems of mathematics and mechanics and every year are increasing theoretical and practical application of the results and methods, which they obtained [1]. In our problem, in contrast to the task C. V. Kovalevskaya, Central, regarding which comes rotational motion, combined with the center of mass of the body, consequently, the time of gravity about the center of mass is equal to zero, and the movement of the body occurs in the Central Newtonian gravitational field.

In our case the complete system of differential equations of rotational motion of objections about the center of mass of the body in the Newtonian gravitational field allows four independent first integrals. According to the General theory is the presence of these four integrals allows you to integrate a complete system of differential equations is set objective. The obtained solutions are model solutions that can be used to forecast the rotational motions of unguided outer space objects (the companions of the Earth in emergency situations, space debris, etc.).

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 10.03.2014 г.