УДК 524

Д. КАЙРАТКЫЗЫ[1], *Л. М. ЧЕЧИН*[2]

([1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
[2]Астрофизический институт им. В. Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ АБЕРРАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

Аннотация. В работе предложено аберрационное уравнение гравитационной оптики в дифференциальном виде. С его помощью исследованы положения изображений линзируемого объекта. Показано что при больших красных смещениях положение изображения приближается к положению наблюдаемого объекта. При малых красных смещениях положение изображения будет увеличиваться по отношению к положению объекта.

Ключевые слова: гравитационные линзы, аберрационное уравнение в дифференциальном виде, красное смещение.

Тірек сөздер: гравитациялық линзалар, дифференциалдық түрдегі аберрациялық теңдеу, қызыл ығысу.

Keywords: gravitational lens, aberrational equation in differential form, redshift.

1. Введение. Целью статьи является исследование гравитационных линз на космологических масштабах с помощью дифференциального аберрационного уравнения. Такое уравнение позволяет корректно учесть субстанциональный состав Вселенной.

Дело в том, что при больших z плотность вакуума была меньше плотности барионной материи и положение изображения, как нами показано, приближается к положению наблюдаемого объекта. При малых z, наоборот, плотность вакуума превалирует над плотностью барионной материи. Поэтому при таких значениях красных смещении положение изображения будет увеличиваться по отношению к положению объекта.

Дифференциальное аберрационное уравнение позволяет также учесть переменность плотности барионного вещества. Нами показано, что при плотности барионной материи, предложенной Г. М. Идлисом, происходит уменьшение величины прицельного параметра.

2. Пространство-время Керра-де Ситтера. Наша Вселенная, обладает рядом глобальных внешних физических характеристик. К ним, в частности, относятся расширение Вселенной, ускоренное расширение Вселенной и вращение Вселенной. Эти свойства Вселенной можно объяснить на базе концепции космического вакуума [1].

Известно, что космологический Λ-член при определенном выборе тензора энергии – импульса небарионной материи описывает космический вакуум. Поэтому в качестве метрики пространства-времени Вселенной выберем метрику Керра – де Ситтера. Эта метрика имеет вид [2]

$$ds^2=\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)\left[\frac{dr^2}{\Delta_r}+\frac{d\theta^2}{1+\frac{\Lambda}{3}a^2\cos^2\theta}\right]+\sin^2\theta\frac{1+\frac{\Lambda}{3}a^2\cos^2\theta}{\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)}\left[\frac{adt-\left(r^2+a^2\right)d\varphi}{1+\frac{\Lambda}{3}a^2}\right]^2+$$
$$\frac{\Delta_r}{\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)}\left[\frac{dt-a\sin^2\theta d\varphi}{1+\frac{\Lambda}{3}a^2}\right]^2, \qquad (1)$$

где

$$\Delta_r = (r^2 + a^2)\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) - 2Mr. \tag{2}$$

Последнее выражение целесообразно записать приближенно как

$$\Delta_r = r^2\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{a^2\Lambda}{3}\right). \tag{3}$$

В выражениях (1) – (3) a – вращательный момент, M – масса скопления галактик.

В дальнейшем будем считать, что свет распространяется в плоскости $\pi/2$, а само пространство – время приближенно является сферически-симметричным, так что можно считать $\varphi = 0$.

При этих условиях метрика Керра-де Ситтера приобретает следующий вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{a^2\Lambda}{3}\right)dr^2 + \left(-1 + \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3} + a^2\Lambda - \frac{4M\Lambda}{3r}a^2\right)dt^2. \tag{4}$$

Используя метод, изложенный в работе [3], можно показать, что ей соответствует показатель преломления гравитационного поля [4]

$$n \approx 1 + \frac{2M}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{5}$$

Отсюда легко вычислить угол отклонения лучей света. Он имеет вид

$$\theta \approx \frac{4M}{p} - \frac{a^2}{p^2} + \frac{2\Lambda p^2}{3}, \tag{6}$$

в котором по отдельности выписаны слагаемые, обусловленные массой скопления (M), ее вращением (a) и космологическим Λ-членом.

3. Аберрационное уравнение. Аберрационное уравнение это алгебраическое уравнение, которое позволяет рассчитать положения изображений линзируемого объекта. Количество изображений определяется порядком аберрационного уравнения. Его общее обоснование дано в монографии [5], а в применении к двухкомпонентным гравитационным линзам – в работах [4]. Тем не менее, кратко напомним его вывод.

Обозначая r расстояние по главной оптической оси от проекции ее изображения объекта до наблюдателя, p длину проекции от изображения до главной оптической оси (прицельный параметр), а θ угол между наблюдателем и изображением объекта, из геометрических соображений находим $p = r \cdot \mathrm{tg}\theta$.

Но, учитывая малость угла θ, последнее соотношение удобно записать в приближенном виде $p \approx r \cdot \theta$ и считать его основным уравнением. Величина угла отклонения находится из уравнения нулевой геодезической линии, записанной в заданной метрике. В нашем случае, учитывая выражение (6), аберрационное уравнение приобретает вид

$$r\left(\frac{4M}{p} - \frac{a^2}{p^2} + \frac{2\Lambda p^2}{3}\right) = p. \tag{7}$$

Преобразуем это уравнение в алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно прицельного параметра

$$\frac{2\Lambda}{3}p^4 - \frac{1}{r}p^3 + 4Mp = a^2. \tag{8}$$

Из нашей работы [6] следует, что слагаемыми, пропорциональными вращательному моменту, можно пренебречь потому, что они на пять порядков меньше остальных членов. Поэтому вместо (8) получаем алгебраическое уравнение третьего порядка

$$\frac{2\Lambda}{3}p^3 - \frac{1}{r}p^2 + 4M = 0. \tag{9}$$

С помощью формулы Кардано находим два действительных решения для аберрационного параметра

$$p_{1,2}=\frac{1}{2\Lambda x}+\sqrt[3]{-\frac{\frac{6M}{\Lambda}-\frac{2}{27}\left(\frac{3}{2x\Lambda}\right)^3}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{6M}{\Lambda}-\frac{2}{27}\left(\frac{3}{2x\Lambda}\right)^3\right)^2}{4}\pm\frac{\left(\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2x\Lambda}\right)^2\right)^3\right)}{27}}}. \tag{10}$$

Поставляя сюда необходимые численные величины, а также полагая, что линзируемый объект отстоит от наблюдателя на тестовом расстоянии $r = 10^{26}$ см, получаем два значения для прицельного параметра

$$p_1=5\cdot 10^{30}\text{см},\qquad p_2=6{,}9\cdot 10^{30}\text{см}. \tag{11}$$

Следовательно, наблюдатель будет видеть две светящиеся точки, являющиеся изображениями одного линзируемого объекта и отстоящие от него на расстояниях (11).

4. Аберрационное уравнение в дифференциальном виде. Аберрационное уравнение, приведенное в предыдущем разделе, записано в алгебраическом виде. Однако такая запись, строго говоря, допустима лишь в плоском пространстве-времени. В нашем же случае пространство-время является искривленным, что приводит к необходимости перехода к аберрационному уравнению в дифференциальном виде.

Как это следует из [5] дифференциальное аберрационное уравнение можно записать следующим образом

$$\frac{dp}{\theta(p)}=dr, \tag{12}$$

где угол отклонения задается выражением (6). Из физических свойств вращающихся объектов во Вселенной следует, что $a/p << 1$ [6]. Тогда угол отклонения света массивной гравитационной линзой во Вселенной де - Ситтера имеет вид

$$\theta(p)=\frac{4M}{p}+\frac{2\Lambda p^2}{3}. \tag{13}$$

Преобразуем это выражение, пользуясь определением Λ-члена [7], –

$$\begin{gathered}\theta(p)=4\frac{GM}{p}+2\frac{\Lambda p^2}{3}=\left|\Lambda=8\pi G\rho_V;M=M_B\right|=4\frac{GM_B}{p}+2\frac{8\pi G\rho_V p^3}{3p}=\\ 4\frac{GM_B}{p}+4\left(\frac{4}{3}\pi G\rho_V p^3\right)\frac{1}{p}=4G\frac{M_B+M_V}{p}=\left|\mathrm{M}=M_B+M_V\right|=4G\frac{\mathrm{M}}{p}\to 4\frac{\mathrm{M}}{p},\end{gathered} \tag{14}$$

При выводе (14) было принято, что обе плотности постоянны, т.е. $\rho_B=\text{const}$, $\rho_V=\text{const}$. Тогда, интегрируя левую часть (12), имеем

$$I_1=\int\frac{dp}{\theta(p)}=\int\frac{dp}{4M/p}=\frac{1}{4M}\int pdp=\frac{p^2}{8M}. \tag{15}$$

Что касается интеграла от правой части (12), то его удобно выразить через красное смещение [8]

$$I_2=\int dr=\int\frac{dz}{H(z)}=\int\frac{dz}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda+\Omega_M(z+1)^3}}. \tag{16}$$

Известно [9], что при больших z плотность вакуума была меньше плотности барионной материи, то есть $\Omega_\Lambda<\Omega_M$. Поэтому на таких масштабах можно пренебречь плотностью космического вакуума по сравнению с плотностью барионной материи. Тогда, интегрируя (16), получаем

$$I_2=\int\frac{dz}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda+\Omega_M(z+1)^3}}=-\frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z+1}}=-\aleph(z+1)^{-1/2}. \tag{17}$$

Объединяя (15) и (17), аберрационное уравнение запишем следующим образом

$$p^2 = -8M\aleph(z+1)^{-1/2}. \tag{18}$$

Для исследования этого уравнения возведем его в квадрат и получим уравнение четвертой степени

$$p^4 = -8^2 M^2 \aleph^2 (z+1)^{-1}. \tag{19}$$

Из (19) следует такая зависимость прицельного параметра от красного смещения

$$p = \sqrt{8M\aleph} \cdot (z+1)^{-1/4}. \tag{20}$$

Отсюда вытекает естественный вывод о том, что при больших z положение изображения приближается к положению наблюдаемого объекта.

Исследуем теперь аберрационное уравнение при малых z, когда $\Omega_\Lambda > \Omega_M$ [9]. Это позволяет интеграл (17) записать как

$$I_2 = \frac{1}{H_0}\int dz = \frac{z}{H_0}, \tag{21}$$

а решение аберрационного уравнения – в следующем виде

$$p(z) = \sqrt{\frac{8Mz}{H_0}} = \sqrt{\frac{8M}{H_0}} z^{1/2}. \tag{22}$$

Таким образом, при малых z положение изображения будет увеличиваться по отношению к положению объекта.

Рассмотрим теперь случай, когда плотность барионной материи является величиной переменной. Одна из таких зависимостей была предложена Г. М. Идлисом в работе [10], которая с незначительным переобозначением имеет вид

$$\rho_B = \rho_B(p) = \widetilde{\rho}_B \frac{3-\zeta}{(1+\zeta)^3}, \tag{23}$$

где $\zeta = \aleph \frac{l^2}{l_0^2}$, $\aleph = \frac{3}{l_0^2}$, $\widetilde{\rho}_B$ – параметр, связанный с истинной плотностью барионной материи в центре галактики, l_0 – ее размеры, l – текущий пространственный параметр. Полагая $\zeta < 1$, можно разложить (23) в ряд Тейлора и получить такой профиль плотности барионной материи

$$\rho_B(l) = 3\widetilde{\rho}_B\left(1 - 10\frac{l^2}{l_0^2}\right) = \rho_0\left(1 - 10\frac{l^2}{l_0^2}\right), \tag{24}$$

где ρ_0 – истинная плотность барионной материй в центре галактики. Подставим (24) в (13) и сконцентрируем внимание только на его первом слагаемом. В результате получаем угол отклонения, состоящий из двух частей ($l \to p$, $l_0 \to p_0$),

$$\theta_1(p) = \theta_1^{'}(p) + \theta_1^{''}(p), \tag{25}$$

где

$$\theta_1^{'}(p) = 4\frac{M}{p}, \tag{26}$$

$$\theta_1^{''}(p) = -4 \cdot 10 \cdot \frac{M}{p_0^2}\delta p. \tag{27}$$

Отсюда следует, что угол $\theta_1^{'}(p)$ полностью совпадает с ранее найденным выражением (14) и для него справедливы все наши предыдущие рассуждения. Отличие же угла отклонения (25) от угла (14) заключается в наличии второго слагаемого (27). Его физический смысл состоит в том, что он описывает отклонение лучей света, зависящее от распределения плотности барионной материи.

Для анализа аберрационного уравнения (12), как уже отмечалось, будем учитывать лишь малые значения z. Тогда при интегрировании (12) с углом отклонения (27) получаем следующее выражение

$$\frac{p_0^2}{4\cdot 10M}\ln\left(\frac{p_0}{\delta p}\right)=\frac{z}{z_0}. \tag{28}$$

Его потенцирование приводит к такому выражению для прицельного параметра

$$\delta p = p_0\cdot\exp\left(-\frac{z_0}{z}\right), \tag{29}$$

где $z_0=\dfrac{4\cdot 10\cdot M}{H_0 p_0^2}$. Из (29) видно, что учет неоднородности в распределении плотности барионной материи приводит к уменьшению прицельного параметра.

Подводя итог исследованию аберрационного уравнения в дифференциальном виде можно сделать следующие выводы:

1. учет в отклонении лучей света космического вакуума имеет смысл только при рассмотрении скоплений галактик, то есть для достаточно больших масс и пространственных расстояний;

2. при таких масштабах положения изображения и объекта начинают сближаться, что приводит к повышению сложности наблюдения эффекта гравитационного линзирования;

3. наблюдение эффекта гравитационного линзирования от скоплений галактик, следовательно, должно проводиться на оптимальных красных смещениях.

ЛИТЕРАТУРА

1 Chechin L.M. The Universe Evolution – Global Astrophysical Properties // In book «The Universe Evolution – Astrophysical and Nuclear Aspects». – Nova Science Publishers, 2013.

2 Aksay S., Matzner, Kerr R.M. – de Sitter Universe // Class. Quant. Grav. – 2011, 28, 085012.

3 Иваницкая О. С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. – Мн.: Наука и техника, 1979.

4 Чечин Л.М., Авхунбаева Г.М. Двухкомпонентная гравитационная линза // Известия вузов. Физика. – 2013, 56, 30.

5 Блиох П.В., Минаков А.А. Гравитационные линзы. – Киев: Наукова думка, 1989.

6 Чечин Л.М., Кайраткызы Д. К теории гравитационной линзы на фоне Вселенной де Ситтера // Доклады НАН РК. – 2013. – № 4. – 60.

7 Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. – М.: МГУ, 1988.

8 Frieman J.A. Lectures on Dark Energy and Cosmic Acceleration // ArXiv:0904.1832v1 [astro-ph.CO] 12 Apr 200. – P. 8-10.

9 Byrd G.G., Chernin A.D., Valtonen M.J. Cosmology: Foundations and Frontiers. – M.: URSS, 2007.

10 Идлис Г.М. Структура и динамика звездных систем. – Алма-Ата: АН КазССР, 1961.

REFERENCES

1 Chechin L.M. The Universe Evolution – Global Astrophysical Properties. In book «The Universe Evolution – Astrophysical and Nuclear Aspects». Nova Science Publishers, 2013.

2 Aksay S., Matzner, Kerr R.M. – de Sitter Universe. Class. Quant. Grav. 2011, 28, 085012.

3 Ivanitskaya O.S. Lorentz basis and gravitational effects in the Einsteinian theory of gravitation. Mn.: Science and Technology, 1979.

4 Chechin L.M., Avhunbaeva G.M. Two-component gravitational lens. Proceedings of the universities. Physics. 2013, 56, 30.

5 Bliokh P.V., Minakov A.A. Gravitational Lenses. Kiev: Naukova Dumka, 1989.

6 Chechin L.M., Kayratkyzy D. On the theory of gravitational lensing on the background of de Sitter Universe. Reports of NAS RK. 2013. № 4. 60.

7 Dolgov A.D., Zel'dovich I.B., Sazhin M.V. Early Universe Cosmology. M.: Moscow State University, 1988.

8 Frieman J.A. Lectures on Dark Energy and Cosmic Acceleration. ArXiv: 0904.1832v1 [astro-ph.CO] 12 Apr 200. P. 8-10.

9 Byrd G.G., Chernin A.D., Valtonen M.J. Cosmology: Foundations and Frontiers. M.: URSS, 2007.

10 Idlis G.M. Structure and dynamics of stellar systems. Alma-Ata: Kazakh SSR Academy of Sciences, 1961.

Резюме

Д. Қайратқызы[1], Л. М. Чечин[2]

([1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
[2]В. Г. Фесенков атындағы Астрофизикалық институты, Алматы, Қазақстан)

ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ОПТИКАДАҒЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ АБЕРРАЦИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУ

Жұмыста гравитациялық оптика үшін аберрациялық теңдеудің дифференциалдық түрі ұсынылған. Оның көмегімен линзалаушы объекті бейнесінің орналасуын бақылауға болады. Үлкен қызыл ығысу кезінде бейнесі орналасуы бақылаушы объектінің орналасуына жақындай түседі. Ал кіші қызыл ығысу кезінде бейнесі орналасуы бақылаушы объектінің орналасуына байланысты ұлғая түсетіні көрсетілген.

Тірек сөздер: гравитациялық линзалар, дифференциалдық түрдегі аберрациялық теңдеу, қызыл ығысу.

Summary

D. Kairatkyzy[1], L. M. Chechin[2]

([1]Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,
[2]Fesenkov astrophysical institute, Almaty, Kazakhstan)

DIFFERENTIAL ABERRATIONAL EQUATION IN GRAVITATIONAL OPTICS

The purpose of paper is the study of gravitational lenses on cosmological equation scales by the differential aberration equation. We introduced such type of aberration equation because its well-known algebraic form, strictly talking, is applicable for the flat space-time. For the curved space-time it must have the local form, hence.

This equation allows correctly take into account the substantial structure of the Universe. The fact is that for the large redshifts the vacuum density was smaller than the density of baryonic matter, and the positions of the images, as we have shown, are closed to the position of observing object. For small redshifts, in contrary to the previous result, the vacuum density prevails over the density of baryonic matter. Therefore, for these values of redshift the position of image will increase relative to the position of a cosmic object.

Differential aberration equation allows take into account the space-variability of baryonic matter density, also. We have shown that the density of baryonic matter proposed by GM Idliss decreases the total magnitude of the impact parameter.

Keywords: gravitational lens, aberrational equation in differential form, redshift.

Поступила 11.05.2014г.