УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], А. А. БЕКОВ[1], С. С. ДАЙЫРБЕКОВ[2],
М. ПАРМАНОВ[3], Д. Т. БЕРДАЛИЕВ[3], Т. Д. БЕРДАЛИЕВА[3]

([1]Институт космических исследований им. академика У. М. Султангазина, АО «НЦКИТ»,
Алматы, Казахстан,
[2]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан,
[3]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан)

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ КЛЕБША В СЛУЧАЕ $A = B = 2C$

Аннотация. Найден новый случай разрешимости первых интегралов Клебша и доказана линейная независимость четырех первых интегралов в случае движения осесимметричного тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения. Распределение масс твердого тела принято соответствующим равенству $A = B = 2C$, где A, B, C– главные центральные моменты инерции осесимметричного тела в подвижных осях жестко скрепленных с этим телом. Подвижная система координат имеет начало в центре масс тела и его оси направлены по главным центральным осям тела.

Полная система дифференциальных уравнений вращательного движения тела относительно центра масс допускает при $A = B = 2C$ систему четырех первых интегралов, которые линейно независимы.

Согласно общей теории [1] это дает возможность полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения тела в центральном поле ньютоновского поля тяготения. Углы Эйлера представлены в виде квадратур.

Полученные результаты по разрешимости первых интегралов движения твердого осесимметричного тела в центральном ньютоновском поле тяготения при $A = B = 2C$ представляют собой модельную задачу о движении неуправляемых космических объектов в околоземном космическом пространстве, поэтому

полученные решения актуальны при решении различных прикладных задач небесной механики и динамики космического полета.

Решения, полученные в статье, позволяют определить различные параметры неуправляемого движения космических объектов (спутников в нештатных ситуациях, космического мусора, остатков различных космических объектов и т.д.).

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательные движения, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает вращательное движение относительно центра масс в центральном поле тяготения, тогда полная система дифференциальных уравнений в подвижных осях имеет вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \\ q &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \\ r &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &A\dot p + (C-B)qr = \varepsilon(C-B)\gamma'\gamma'', \\ &B\dot q + (A-C)pr = \varepsilon(A-C)\gamma''\gamma, \\ &C\dot r + (B-A)pq = \varepsilon(B-A)\gamma\gamma', \quad \varepsilon = \frac{3\mu}{R^3}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\dot\gamma = r\gamma' - q\gamma'',\ \dot\gamma' = p\gamma'' - r\gamma,\ \dot\gamma'' = q\gamma - p\gamma', \tag{3}$$

где θ, φ, ψ – углы Эйлера; μ – гравитационный параметр; R – расстояние от центра масс тела до центра притяжения; p, q, r – проекции угловой скорости тела $\overline{\omega}$ на подвижные оси x, y, z; γ, γ', γ'' – направляющие косинусы подвижных осей $x_1y_1z_1$. Начало обоих систем координат находится в центре масс тела.

Условия Клебша имеют вид:

$$A(B-C) + B(C-A) + C(A-B) = 0. \tag{4}$$

Четвертый алгебраический интеграл, полученный Клебшем [2] в 1870 году:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \varepsilon(BC\gamma^2 + AC\gamma'^2 + AB\gamma''^2) = C_4 \tag{5}$$

был получен заново Тиссераном в 1872 году. Этот же интеграл был получен в 1893 году Бруном. Следует иметь в виду, что (5) был получен Клебшем, Тиссераном и Бруном при решении задач, которые не имеют ничего общего с задачей о движении твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения, хотя исследовались уравнения аналогичные с (2).

Получим этот интеграл для нашей задачи. Для этого умножим первое уравнение из (2) на Ap, второе на Bq, третье на Cr и сложим, учитывая (4), тогда получим

$$\begin{aligned} A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} + pqr[A(C-B) + B(A-C) + C(B-A)] = \\ = -\varepsilon[A(B-C)p\gamma'\gamma'' + B(C-A)\gamma\gamma''q + C(A-B)r\gamma\gamma']. \end{aligned} \tag{6}$$

Первые три члена из (6) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2),$$

следующая слагаемая в силу (4) равна нулю.

Далее, раскрывая круглые скобки в правой части (6), после незначительных преобразований получим

$$\varepsilon[A(B-C)p\gamma'\gamma''+B(C-A)\gamma\gamma''q+C(A-B)r\gamma\gamma']=$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2). \qquad (7)$$

Подставив полученные выражения в (6), найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-\varepsilon(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2)]=0,$$

отсюда имеем интеграл Клебша

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-\varepsilon(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2)=C_4.$$

Добавляя к (5) интегралы Белецкого и тривиальный интеграл, получим четыре новых интеграла для системы (2), (3)

$$\left.\begin{aligned}&Ap^2+Bq^2+Cr^2+\varepsilon(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)=C_1,\\&Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=C_2,\\&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1=C_3,\\&A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-\varepsilon(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2)=C_4.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Проверим (8) на линейную независимость. Для этого составим следующую линейную комбинацию:

$$C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+C_3\lambda_3+C_4\lambda_4=0, \qquad (9)$$

где $C_1\neq 0$, $C_2\neq 0$, $C_3\neq 0$, $C_4\neq 0$, следовательно (9) справедлив только тогда и только тогда, когда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4\equiv 0$, т.е. (8) линейно независимы.

Теперь проверим соответствие равенства $A=B=2C$ условию Клебша (4):

$$2C(2C-C)+2C(C-2C)+C(2C-2C)=0 \text{ или } 2C^2-2C^2+0\equiv 0.$$

Подставим $A=B=2C$ в (8) учитывая, что $r=r_0$ в силу последнего уравнения из (2)

$$\left.\begin{aligned}&2(p^2+q^2)-\varepsilon\gamma''^2=C_1^*,\\&2(p\gamma+q\gamma')+r_0\gamma''=C_2^*,\\&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1=C_3,\\&r=r_0=C_4^*.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Следует заметить, что интеграл Клебша повторяет первый интеграл из (10), но вместо него появляется $r=r_0=C_4^*$.

Система первых интегралов (10) линейно независима, так как

$$\lambda_1C_1^*+\lambda_2C_2^*+\lambda_3C_3+\lambda_4C_4^*=0$$

при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4\equiv 0$.

Полученные интегралы позволяют проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (2), (3) в случае $A=B=2C$.

Интегралы (10) позволяют прогнозировать неуправляемые движения космических объектов в центральном поле ньютоновского тяготения.

ЛИТЕРАТУРА

1 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

2 Clebch A. // Math. Ann. – 3, 238-262 (1870).

REFERENCES

1 Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).

2 Clebch A. Math. Ann. 3, 238-262 (1870).

Резюме

М. Д. Шыныбаев[1], *А. А. Беков*[1], *С. С. Дайырбеков*[2], *М. Парманов*[3], *Д. Т. Бердалиев*[3], *Т. Д. Бердалиева*[3]

([1]Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,
[2]Сырдария университеті, Жетісай, Қазақстан,
[3]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан)

$A = B = 2C$ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ КЛЕБШ ИНТЕГРАЛДАРЫНЫҢ ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ

Клебш интегралдарының жаңа шешілу кезеңі анықталып, олардың сызықтық тәуелсіздігі дәлелденді. Төрт бірінші интегралдардың өстік симметриялық дененің орталық ньютон өрісінде массалық центріне қатысты айналмалы қозғалысында талданып зерттелді және Клебш интегралдарының шешілу кезеңі анықталды.

Дененің қозғалысы массасының жайылуы $A = B = 2C$ жағдайында қарастырылды. Мұндағы A, B, C – дененің орталық бас инерциялық моменттері. Олар орталық бас инерциялық қозғалыстағы координаттар жүйесіне қатысты алынды. Бұл жүйенің бастапқы нүктесі массалық центрде орналасқан.

Дененің массалық центріне қатысты қозғалысының барлық дифференциалдық теңдеулері орталық ньютон күш өрісінде дене қозғалғанда тәуелсіз төрт бірінші интегралдарды қорытып алуға мүмкіншілік береді және Эйлер бұрыштарын квадратуралар арқылы жазуға болады.

Жалпы теория бойынша тәуелсіз төрт бірінші интеграл есепті толық шешу болып табылады.

Алынған Клебш интегралдарының шешілуі ньютон өрісіндегі қатты дененің $A = B = 2C$ жағдайындағы массалық центрге қатысты қозғалысы басқарылмайтын ғарыштық нысандарының Жер маңындағы қозғалысының моделі болып табылады. Сондықтан мақаладағы шешімдер түрлі ғарыштық есептерде қолданыс табады. Бұл шешімдер ғарыштық нысандардың параметрлерін орнатуға көмек береді.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Summary

M. D. Shynybayev[1], *A. A. Bekov*[1], *S. S. Da'yrbekov*[2], *M. Parmanov*[3], *D. T. Berdaliyev*[3], *T. D. Berdaliyeva*[3]

(Professor W. M. Sultangazina Institute of space research of JSC «NCKIT», Almaty, Kazakhstan,
[2] University of Syr-Daria, Džetysaj, Kazakhstan,
[3] South Kazakhstan state pedagogical university, Shymkent, Kazakhstan)

ON SOLVABILITY OF INTEGRALS CLEBSCH IN CASE $A = B = 2C$

Found a new case of solvability of the first integrals of Clebsch and proven linear independence of the four first integrals in the case of motion of an axisymmetric body about the center of mass in a Central Newtonian gravitational field. The distribution of mass of a rigid body adopted the relevant equality $A = B = 2C$, where A, B, C – the principal Central moments of inertia of axially symmetric body in the moving axes rigidly fastened with this body. Mobile system of coordinates has started in the center of mass of the body and its axis is directed along the principal Central axes of the body.

A complete system of differential equations of rotational motion of a body about the center of mass makes $A = B = 2C$ a system of four first integrals that are linearly independent.

According to the General theory [1] this allows you to fully integrate a system of differential equations of motion of a body in a Central Newtonian gravitational field. The Euler angles represented in quadratures.

The results obtained for the solvability of the first integrals of axisymmetric motion of a rigid body in a Central Newtonian gravitational field at $A = B = 2C$ represent a model problem of the motion of unguided outer space objects in near-earth space, so the resulting solution is relevant in the decision of various applied problems of celestial mechanics and dynamics of space flight.

Solutions obtained in the paper, allows to define various settings unguided motion of space objects (satellites in emergency situations, space debris, the remnants of various cosmic objects, etc.).

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 10.03.2014г.