УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], *А. А. БЕКОВ*[1], *С. С. ДАЙЫРБЕКОВ*[2],
М. Ж. ЖУМАБАЕВ[3], *К. С. АСТЕМЕСОВА*[4]

([1]Институт космических исследований им. академика У. М. Султангазина, АО «НЦКИТ»,
Алматы, Казахстан,
[2]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан,
[3]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,
[4]Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан)

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ КЛЕБША В СЛУЧАЕ $A = B = 4C$

Аннотация. Доказана линейная независимость системы интегралов Клебша. Решена новая задача о разрешимости интегралов Клебша в случае, когда распределение масс осесимметричного тела соответствует следующей зависимости между главными центральными моментами инерции тела $A = B = 4C$.

В статье рассматриваются вращательные движения твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения, которые в подвижных осях допускают четыре первых интеграла. Один из этих интегралов является алгебраическим интегралом Клебша, который он получил в 1870 году [1]. Этот интеграл встречается в исследованиях Тиссерана (1872 г.) и Бруна (1893 г.).

В статье рассматривается вопрос о разрешимости интегралов Клебша при $A = B = 4C$. Подвижная система координат имеет начало в центре масс тела, а ее оси направлены по главным центральным осям инерции тела и жестко связаны с телом. Вращательные движения тела относительно центра масс рассматриваются в этих подвижных осях координат.

Согласно общей теории интегрирования дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела относительно центра масс наличие четырех независимых первых интегралов равносильно интегрированию этих уравнений.

В случае разрешимости интегралов Клебша они позволят прогнозировать вращательные движения неуправляемых космических объектов в околоземном космическом пространстве, что актуально сегодня при нештатных движениях спутников Земли в ньютоновском поле тяготения.

Решение задачи об интегрировании дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения представляет собой модельную задачу, которая будет полезна для практических расчетов различных проблем динамики космического полета.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательные движения, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает вращательное движение относительно центра масс в центральном поле тяготения Ньютона, тогда полная система дифференциальных уравнений в подвижных осях имеет вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \\ q &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \\ r &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} A\dot p + (C-B)qr &= \varepsilon(C-B)\gamma'\gamma'', \\ B\dot q + (A-C)pr &= \varepsilon(A-C)\gamma''\gamma, \\ C\dot r + (B-A)pq &= \varepsilon(B-A)\gamma\gamma', \quad \varepsilon = \frac{3\mu}{R^3}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\dot\gamma = r\gamma' - q\gamma'',\ \dot\gamma' = p\gamma'' - r\gamma,\ \dot\gamma'' = q\gamma - p\gamma', \tag{3}$$

$$\gamma = \sin\varphi\sin\theta,\quad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma'' = \cos\theta, \tag{4}$$

$$\theta = \arccos\gamma'',\quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right),\quad \dot\psi = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \tag{5}$$

где θ, φ, ψ – углы Эйлера; μ – гравитационная постоянная; R – расстояние от центра масс до центра притяжения; p, q, r – проекции угловой скорости тела $\overline{\omega}$ на подвижные оси; γ, γ', γ'' – направляющие косинусы подвижных осей; A, B, C – главные центральные моменты инерции тела.

Начало неподвижных осей координат $x_1y_1z_1$ и подвижных осей xyz совпадает с центром масс твердого тела.

(1) – кинематические уравнения Эйлера; (2) – динамические уравнения Эйлера; (3) – уравнения Пуассона; (4) – выражения направляющих косинусов через углы Эйлера; (5) – разрешающие уравнения.

Для системы дифференциальных уравнений (1)–(3) существуют четыре первых интеграла

$$\left.\begin{aligned} &Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \varepsilon(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) = C_1,\\ &Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2,\\ &\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 = C_3,\\ &A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \varepsilon(BC\gamma^2 + AC\gamma'^2 + AB\gamma''^2) = C_4, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где первый из (6) интеграл энергии, второй из (6) интеграл площадей, третий из (6) тривиальный интеграл, четвертый из (6) интеграл Клебша.

Эти четыре первых интеграла линейно независимы:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 = 0, \tag{7}$$

здесь постоянные интегрирования $C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0,\ C_3 \neq 0,\ C_4 \neq 0$, следовательно, постоянные

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \equiv 0.$$

Это означают, что первые интегралы (6) равносильны решениям уравнений (1)-(3). Но они неразрешимы, т.е. нет способа определения углов Эйлера из (6), поэтому исследуем разрешимость (6) при $A = B = 4C$.

Из первого уравнения (6) имеем при $A = B = 4C$:

$$4(p^2 + q^2) + r^2 + \varepsilon(4 - 3\gamma''^2) = \frac{C_1}{C}. \tag{8}$$

Из второго уравнения (6) найдем

$$4(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = \frac{C_2}{C}. \tag{9}$$

Третье уравнение остается без изменения.

Рассмотрим четвертый интеграл:

$$16(p^2 + q^2) + r^2 - \varepsilon(4 + 12\gamma''^2) = \frac{C_4}{C^2}. \tag{10}$$

Для упрощения (8)–(10) перепишем (2) с учетом $A = B = 4C$:

$$\left.\begin{aligned} &4\frac{dp}{dt} - 3qr = -3\varepsilon\gamma'\gamma'',\\ &4\frac{dq}{dt} + 3pr = 3\varepsilon\gamma\gamma'',\\ &\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Из последнего уравнения находим дополнительный первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const}. \tag{12}$$

Преобразуем (8)–(10) с учетом (12):

$$4(p^2+q^2)-3\varepsilon\gamma''^2=C_1^*, \qquad (13)$$

$$4(p\gamma+q\gamma')+r_0\gamma''=C_2^*, \qquad (14)$$

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1=C_3. \qquad (15)$$

$$4(p^2+q^2)-3\varepsilon\gamma''^2=C_4^*, \qquad (16)$$

где постоянные интегрирования определены следующим образом:

$$C_1^*=\frac{C_1}{C}-r_0^2-4\varepsilon,\ C_2^*=\frac{C_2}{C},\ C_3=1,\ C_4^*=\frac{1}{4}\left(\frac{C_4}{C^2}-r_0^2+4\varepsilon\right).$$

Отсюда следует, что при $A = B = 4C$ интеграл Клебша вырождается в интеграл энергии, но у нас есть первый интеграл (12), поэтому система четырех первых интегралов теперь имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&r=r_0,\\&4(p^2+q^2)-3\varepsilon\gamma''^2=C_1^*,\\&4(p\gamma+q\gamma')+r_0\gamma''=C_2^*,\\&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1=C_3.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Проверим линейную независимость (17):

$$\lambda_1C_1^*+\lambda_2C_2^*+\lambda_3C_3+\lambda_4r_0=0, \qquad (18)$$

здесь $C_1^*\neq 0,\ C_2^*\neq 0,\ \mathrm{C}_3\neq 0,\ r_0\neq 0$, поэтому (18) будет удовлетворен только при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4\equiv 0$, то есть первые интегралы (18) линейно независимы.

Из (17) можно получить квадратуры для углов Эйлера.

Рассмотрим (1)

$$p^2+q^2=\dot\theta^2+\dot\psi^2(1-\gamma''^2). \qquad (19)$$

Из уравнения (4) найдем

$$\dot\theta^2=\frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2; \qquad (20)$$

из второго уравнения системы (17) имеем

$$p^2+q^2=(C_1^*-3\varepsilon\gamma''^2)\cdot\frac{1}{4}; \qquad (21)$$

из третьего уравнения (17) и (5) найдем

$$\dot\psi^2=\left(\frac{4C_2^*-r_0\gamma''}{4(1-\gamma''^2)}\right)^2. \qquad (22)$$

Исключив из (19)-(22) (p^2+q^2), $\dot\theta^2$, $\dot\psi^2$, имеем:

$$\frac{1}{4}(C_1^*-3\varepsilon\gamma''^2)=\frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2+\frac{1}{16}\frac{(4C_2^*-r_0\gamma'')}{1-\gamma''^2}. \qquad (23)$$

После упрощения (23) найдем:

$$at=\int\frac{d\gamma''}{\sqrt{-\gamma''^4+b_1\gamma''^3+b_2\gamma''^2+b_3\gamma''+b_4}}+D_1, \qquad (24)$$

где D_1 – постоянная интегрирования; $b_1 = 0$; $b_2=1-\dfrac{2C_1^*}{3\varepsilon}-\dfrac{r_0^2}{12\varepsilon}$;

$$b_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{C_2^*r_0}{\varepsilon};\ b_4=\frac{2}{3}\varepsilon(C_1^*-2(C_2^*)^2).$$

Обратив (24), найдем $\gamma'' = F(t, D_1)$, следовательно, из (20) найдем угол нутации

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right) dt + D_2 . \qquad (25)$$

Из (22) найдем угол

$$\psi = \int \frac{4C_2^* - r_0\gamma''}{4(1-\gamma''^2)} dt + D_3 . \qquad (26)$$

Из (1) имеем угол собственного вращения

$$\varphi = \int [r_0 - \dot{\psi}\gamma''] dt + D_4 . \qquad (27)$$

где D_2, D_3, D_4 – постоянные интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1 Clebch A. // Math. Ann. – 3, 238-262 (1870).

2 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

REFERENCES

1 Clebch A. Math. Ann. 3, 238-262 (1870).

2 Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[1], С. С. Дайырбеков[2], М. Ж. Жұмабаев[3], Қ. С. Астемесова[3]

([1]Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,
[2]Сырдария университеті, Жетісай, Қазақстан,
[3]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан,
[4] Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан)

$A = B = 4C$ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ КЛЕБШ ИНТЕГРАЛДАРЫНЫҢ ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ

Клебштің бірінші интегралдарының сызықтық тәуелсіздігі дәлелденді және ол интегралдардың жүйелік түрде Эйлер бұрыштары арқылы шешілуі өстік симметриялық қатты дене үшін $A = B = 4C$ жағдайында зерттелді, мұнда A, B, C – дененің орталық бас инерциялық моменттері.

Мақалада ньютон орталық өрісінің әсеріндегі қатты дененің массалық центрге қатысты айналмалы қозғалыстарының дифференциалдық теңдеулері жылжымалы координаттық жүйеде алынды. Жылжымалы координаттық жүйенің және жылжымайтын координаттық жүйенің бастапқы нүктелері дененің массалық центрінен алынды. Жылжымалы координаттық жүйенің өстері денеге бекітіліп дененің бас инерциялық өстерімен бағытталды. Екі координаттық жүйелер бағыттауыш косинустар арқылы байланыстырылды.

Қатты дененің орталық ньютон өрісіндегі массалық центрге қатысты айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері төрт өзара тәуелсіз бірінші интегралдарын қорытып алуға мүмкіншілік береді. Ол интегралдар ішінде тривиалдық интеграл, энергия интегралы, аудан тұрақтылығы интегралы және Клебш интегралы бар. Оны Клебш 1870 жылы, ал Тиссеран 1872 жылы және Брун 1893 жылы қорытқан, бірақ ол интегралды олар тіпті бір-біріне еш қатысы жоқ зерттеулерде орнатқан.

Жалпы теория бойынша айтылған интегралдар бар болса, дифференциалдық теңдеулер толық шешілді деуге болады.

Сондай деп айтылғанмен ол интегралдарды Эйлер бұрыштарына қатысты шешу үлкен мәселеге айналады.

Мақалада осы мәселе орталық ньютон өрісінде айналмалы қозғалыстағы дененің $A = B = 4C$ жағдайында шешілді. Бұл шешімдер басқарылмайтын ғарыштық нысандарға модельді есеп болып табылады, сондықтан олар жасанды Жер серігінің параметрлерін орнатуға көмек береді.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Summary

M. D. Shynybayev[1], A. A. Bekov[1], S. S. Da'yrbekov[2], M. Zh. Zhumabayev[3], K. S. Astemesova[4]

(Professor W. M. Sultangazina Institute of space research of JSC «NCKIT», Almaty, Kazakhstan,
[2] University of Syr-Daria, Džetysaj, Kazakhstan,
[3] South Kazakhstan state pedagogical university, Shymkent, Kazakhstan,
[4]Kazakh national technical university after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan)

ON SOLVABILITY OF INTEGRALS CLEBSCH IN CASE $A = B = 4C$

Proven linear independence of the integrals Clebsch. Resolved new task on the solvability of integrals Clebsch in the case when the mass distribution of an axisymmetric body corresponds to the following dependence between principal Central moments of inertia of the body of $A = B = 4C$.

The article considers the rotational motion of a solid body about the center of mass in a Central Newtonian gravitational field, which in the moving axes allow four first integral. One of these integrals is an algebraic integral Clebsch, which he received in 1870 [1]. This integral is found in studies of Tisserant (1872) and Bruno (1893).

The article considers the question of the solvability of integrals Clebsch when $A = B = 4C$. Mobile system of coordinates has started in the center of mass of the body, and its axis is directed along the principal Central axes of inertia of the body and are rigidly connected with the body. Rotary movement of a body about the center of mass are considered in these moving coordinate axes.

According to the General theory of integration of differential equations of rotational motion of a rigid body about the center of mass presence of four independent first integrals equivalent to integrating these equations.

In the case of solvability of integrals Clebsch they will predict the rotational motion of unguided outer space objects in near-earth space, which is important today, abnormal movements of the Earth's satellites in the Newtonian gravitational field.

The solution of the problem of integration of differential equations of rotational motion of a solid body about the center of mass in Newtonian gravitational field is a model problem, which will be useful for practical calculations of various problems of the dynamics of space flight.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 10.03.2014г.