

*А. БАРАЕВ, М. Ж. ЖУМАБАЕВ, А. С. ТУЛЕП*

(Южно-Казахстанский государственный институт, Шымкент, Казахстан,  
Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан)

## **УДАР ПО ЛЕВОМУ КОНЦУ НИТИ, ОГИБАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО КРИВОЛИНЕЙНУЮ ФОРМУ**

**Аннотация.** Предлагается методика определения законов распределения сил натяжения, давления и трения на поверхности контакта твердого тела, имеющим произвольное поперечное сечение, различные методы определения этих законов.

**Ключевое слова:** нить, скольжение, математическая модель, удар, поверхность, трения, сила, реакция, натяжение.

**Тірек сөздер:** жіп, сырғанау, математикалық модель, соққы, бет, үйкеліс, күш, реакция, тартылу.

**Keywords:** thread, slip, mathematical model, blow, surface, friction, force, reaction, tension.

Ниже предлагается методика определения законов распределения сил натяжения, давления и трения на поверхности контакта твердого тела, имеющим произвольное поперечное сечение. В работах [1–5] также предлагаются различные методы определения этих законов. Предлагаемая здесь

методика отличается от предыдущих наиболее строгим применением основных законов механики в постановке задачи и получением достаточно простых аналитических решений.

Пусть нить при  $t < 0$  обгибает поверхности твердого тела, имеющего заданную криволинейную форму  $r = r(\alpha)$  (рисунок 1, а). Если поверхность контакта нити с твердым телом  $B_1CB_n$  имеет цилиндрическую форму, то  $r = r(\alpha) = \text{const}$ . Разобьем поверхность твердого тела, имеющий контакт с нитью на  $n$  прямолинейные участки  $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_{n-1}B_n$  (рисунок 2, а). В предельном случае, когда  $n \rightarrow \infty$  длина каждого из прямолинейных участков будет стремиться к длине соответствующей дуги кривой  $B_1CB_n$ . Углы  $B_0OB_1, B_1OB_2, B_2OB_3, \dots$  обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  соответственно. Очевидно, что

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \quad \sum_{i=2}^k \alpha_i = \varphi_1, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{i=k+1}^n \alpha_i = \varphi_{n+1}, \quad \sum_{i=k+1}^{n+1} \alpha_i = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{n+1}.$$

При  $t \geq 0$  точке  $A$  нити сообщается постоянное по времени скорость  $u$ . При этом прямолинейные  $AB_1, B_nE$  и криволинейная  $B_1CB_n$  участки нити движутся с постоянной скоростью, так как предполагается, что процесс скольжения происходит в стационарном режиме. Области 1 и  $n + 1$  имеют постоянные натяжения  $T_1$  и  $T_{n+1}$  соответственно. Натяжение  $T_1$  больше, чем  $T_{n+1}$ , так как участок  $AB_1$  нити перетягивает участок  $B_nE$  из области  $m + 1$  на поверхность контакта.

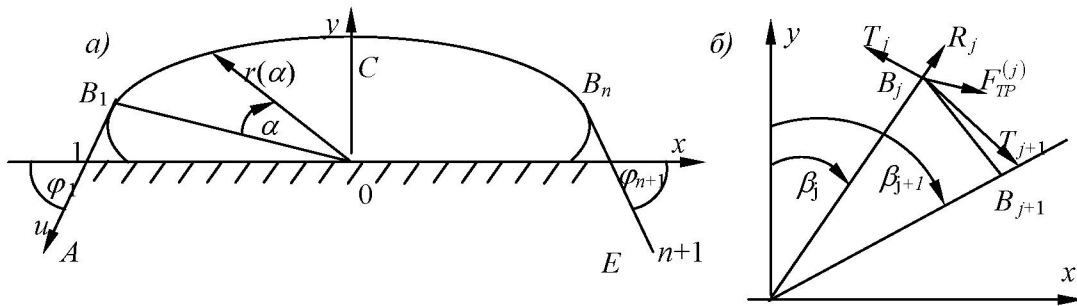


Рисунок 1

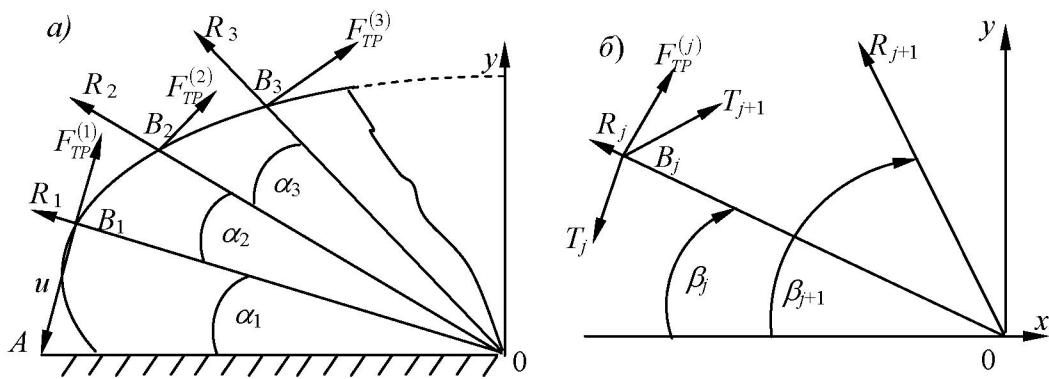


Рисунок 2

На криволинейном участке на нить действуют распределенные силы натяжения, давления и трения поверхности контакта. Предположим, что линии действия распределенных сил натяжения, давления и трения расположены в плоскости  $(x,y)$ . Натяжение криволинейного участка возрастает от  $T_{n+1} = T_{MIN}$  в точке  $B_n$  до  $T_1 = T_{MAX}$  в точке  $B_1$ .

Предположим, что силы давления, распределенные вдоль кривых  $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots$  приводятся к точкам  $B_1, B_2, B_3, \dots$  и эквивалентны равнодействующим  $R_1, R_2, R_3, \dots$ , направленным вдоль радиусов  $r_1, r_2, r_3, \dots$  поперечного сечения твердого тела. Вектор натяжение

$T_1$  направлен вдоль касательной к точке  $B_1$ , линии действия натяжения  $T_2, T_3, T_4, \dots, T_n$  проходят через прямых  $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_{n-1}B_n$ , а силы трения  $F_{TP}^{(1)}, F_{TP}^{(2)}, F_{TP}^{(3)}, \dots, F_{TP}^{(n)}$  направлены перпендикулярно к силам давления  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  соответственно.

Вертикальную ось  $y$  проводим так, чтобы все проекции на данную ось силы трения  $F_{TP}^{(1)}, F_{TP}^{(2)}, F_{TP}^{(3)}, \dots, F_{TP}^{(k)}$  были положительными, а  $F_{TP}^{(k+1)}, F_{TP}^{(k+2)}, F_{TP}^{(k+3)}, \dots, F_{TP}^{(n)}$  – отрицательными. Если точка  $B_k$  расположится на оси  $x = 0$ , то  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{\pi}{2}$ . При этом проекция на ось  $x$  силы  $R_k$  равно нулю и линия действия силы трения  $F_{TP}^{(k)}$  будет параллельной оси  $y = 0$ .

Введем обозначения:  $x^\bullet$  и  $y^\bullet$  – составляющие скорости частиц нити на оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $ds$  – длина рассматриваемого элемента нити;  $s$  – лагранжева координата, отсчитываемая от точки  $A$  нити;  $T$  – натяжение;  $\rho$  – плотность материала нити;  $F$  – площадь поперечного сечения нити;  $f$  – коэффициент трения;

Уравнения законов сохранения количества движения, массы и неразрывности скольжения нити имеют вид [3]:

– в областях 1 и 2 (рисунки 2, а и 3, а)

$$\begin{aligned} \rho_1 F_1 ds_1 (x_1^\bullet - x_2^\bullet) &= [-T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - R_1 \cos \alpha_1 + f R_1 \sin \alpha_1] dt, \\ \rho_1 F_1 ds_1 (y_1^\bullet - y_2^\bullet) &= [-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + R_1 \sin \alpha_1 + f R_1 \cos \alpha_1] dt, \\ ds_1 &= \frac{|x_1^\bullet| dt}{\sin \alpha_1} = \frac{|y_1^\bullet| dt}{\cos \alpha_1}, \quad x_1^\bullet = -u \sin \alpha_1, \quad y_1^\bullet = -u \cos \alpha_1, \\ ds_2 &= \frac{|x_2^\bullet| dt}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{|y_2^\bullet| dt}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad x_2^\bullet = -u \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \quad y_2^\bullet = -u \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ ds_0 &= ds_1 = ds_2, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_1 F_1 ds_1 = \rho_2 F_2 ds_2; \end{aligned}$$

– в областях 2 и 3

$$\begin{aligned} \rho_2 F_2 ds_2 (x_2^\bullet - x_3^\bullet) &= [-T_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - R_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + f R_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] dt, \\ \rho_2 F_2 ds_2 (y_2^\bullet - y_3^\bullet) &= [-T_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + R_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + f R_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] dt, \\ ds_2 &= \frac{|x_2^\bullet| dt}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{|y_2^\bullet| dt}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad x_2^\bullet = -u \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \quad y_2^\bullet = -u \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ ds_3 &= \frac{|x_3^\bullet| dt}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{|y_3^\bullet| dt}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}, \\ x_3^\bullet &= -u \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad y_3^\bullet = -u \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ ds_0 &= ds_2 = ds_3, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_2 F_2 ds_2 = \rho_3 F_3 ds_3; \end{aligned}$$

..... и т.д.;

– в областях  $k-1$  и  $k$

$$\begin{aligned} \rho_{k-1} F_{k-1} ds_{k-1} (x_{k-1}^\bullet - x_k^\bullet) &= \left[ -T_{k-1} \sin \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + T_k \sin \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) - R_{k-1} \cos \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + f R_{k-1} \sin \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \right] dt, \\ \rho_{k-1} F_{k-1} ds_{k-1} (y_{k-1}^\bullet - y_k^\bullet) &= \left[ -T_{k-1} \cos \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + T_k \cos \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + R_{k-1} \sin \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + f R_{k-1} \cos \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \right] dt, \end{aligned}$$

$$ds_{k-1} = \frac{|x_{k-1}^{\bullet}| dt}{\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right)} = \frac{|y_{k-1}^{\bullet}| dt}{\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right)}, \quad x_{k-1}^{\bullet} = -u \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right), \quad y_{k-1}^{\bullet} = -u \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right),$$

$$ds_k = \frac{|x_k^{\bullet}| dt}{\sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)} = \frac{|y_k^{\bullet}| dt}{\cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)}, \quad x_k^{\bullet} = -u \sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right), \quad y_k^{\bullet} = -u \cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right),$$

$$ds_0 = ds_{k-1} = ds_k, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{k-1} F_{k-1} ds_{k-1} = \rho_k F_k ds_k.$$

Исключив неизвестные составляющие скорости и элементарную массу, полученную систему приводим к виду:

– на участках 1 и 2

$$u^2 [-\sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] = -T_1^* \sin \alpha_1 + T_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - R_1^* \cos \alpha_1 + fR_1^* \sin \alpha_1,$$

$$u^2 [-\cos \alpha_1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] = -T_1^* \cos \alpha_1 + T_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + R_1^* \sin \alpha_1 + fR_1^* \cos \alpha_1;$$

– на участках 2 и 3

$$u^2 [-\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] = -T_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) -$$

$$- R_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + fR_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$u^2 [-\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] = -T_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) +$$

$$+ R_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + fR_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2);$$

..., и.д.

– на участках  $k-1$  и  $k$

$$u^2 \left[ -\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) \right] = \left[ -T_{k-1}^* \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + T_k^* \sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) - R_{k-1}^* \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \right.$$

$$\left. + fR_{k-1}^* \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \right] dt, \quad (1)$$

$$u^2 \left[ -\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) \right] = \left[ -T_{k-1}^* \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + T_k^* \cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) + R_{k-1}^* \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \right.$$

$$\left. + fR_{k-1}^* \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \right] dt. \quad (2)$$

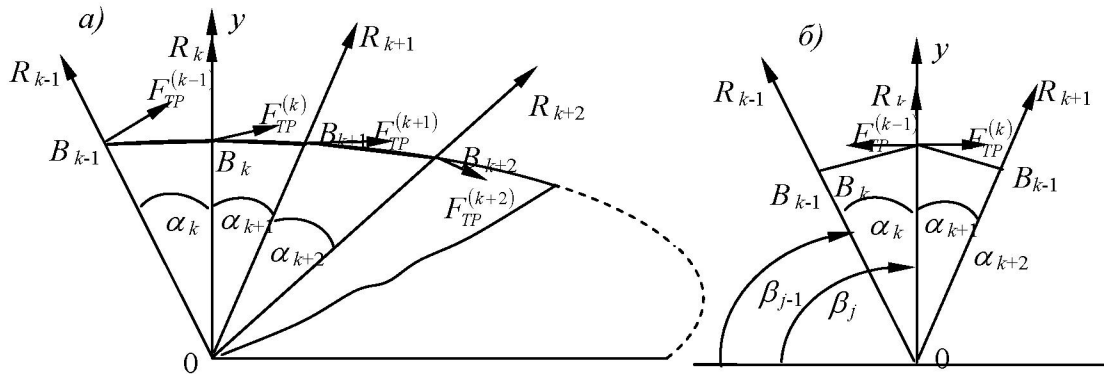


Рисунок 3

Пусть натяжение  $T_1$  области 1 известно. Тогда последняя система уравнения служат для определения неизвестные натяжения  $T_2, T_3, T_4, \dots, T_k$  и силы давления  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{k-1}$  – всего имеются  $2k - 2$  неизвестных и столько же уравнения.

Напишем уравнения движения для областей  $k$  и  $k + 1$  (рисунок 3, а)

$$\rho_k F_k ds_k (x_k^\bullet - x_{k+1}^\bullet) = \left[ -T_k \sin \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - R_k \cos \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + fR_k \sin \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \right] dt,$$

$$\rho_k F_k ds_k (y_k^\bullet - y_{k+1}^\bullet) = \left[ -T_k \cos \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) - T_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + R_k \sin \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + fR_k \cos \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \right] dt,$$

$$ds_k = \frac{|x_k^\bullet| dt}{\sin \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right)} = \frac{|y_k^\bullet| dt}{\cos \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right)}, \quad x_k^\bullet = -u \sin \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right), \quad y_k^\bullet = -u \cos \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right),$$

$$ds_{k+1} = \frac{|x_{k+1}^\bullet| dt}{\sin \alpha_{k+1}} = \frac{|y_{k+1}^\bullet| dt}{\cos \alpha_{k+1}}, \quad x_{k+1}^\bullet = -u \sin \left( \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right), \quad y_{k+1}^\bullet = u \cos \left( \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right),$$

$$ds_0 = ds_k = ds_{k+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_k F_k ds_k = \rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1}.$$

Очевидно, что если в результате разбиения поверхности контакта точка  $B_k$  окажется на оси  $x = 0$ , как это показано на рисунке 3, то

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

В этом случае из последней системы, получаем

$$\rho_k F_k ds_k (x_k^\bullet - x_{k+1}^\bullet) = (-T_k + T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + fR_k) dt, \quad (4)$$

$$\rho_k F_k ds_k (y_k^\bullet - y_{k+1}^\bullet) = (-T_k \cos \alpha_{k+1} + R_k) dt \quad (5)$$

и в точке  $B_k$  движение по вертикальной оси отсутствует, т.е.  $y_k^\bullet = 0$ . Кроме того в уравнения (4) и (5) требуется, с учетом выражение (3) и условие  $y_k^\bullet = 0$ , внести соответствующие поправки.

Напишем уравнения движения для областей, расположенных в правой от оси  $y$  части задачи (рис. 3, а):

– в областях  $k + 1$  и  $k + 2$

$$\rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1} (x_{k+1}^\bullet - x_{k+2}^\bullet) = [-T_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + T_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + R_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + fR_{k+1} \cos \alpha_{k+1}] dt,$$

$$\rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1} (y_{k+1}^\bullet - y_{k+2}^\bullet) = [T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - T_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + R_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - fR_{k+1} \sin \alpha_{k+1}] dt,$$

$$ds_{k+1} = \frac{|x_{k+1}^\bullet| dt}{\sin \alpha_{k+1}} = \frac{|y_{k+1}^\bullet| dt}{\cos \alpha_{k+1}}, \quad x_{k+1}^\bullet = -u \sin \left( \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right), \quad y_{k+1}^\bullet = u \cos \left( \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right),$$

$$ds_{k+2} = \frac{|x_{k+2}^\bullet| dt}{\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})} = \frac{|y_{k+2}^\bullet| dt}{\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})}, \quad x_{k+2}^\bullet = -u \sin \left( \sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i \right), \quad y_{k+2}^\bullet = u \cos \left( \sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i \right),$$

$$ds_0 = ds_{k+1} = ds_{k+2}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1} = \rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2};$$

– в областях  $k + 2$  и  $k + 3$

$$\rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2} (x_{k+2}^\bullet - x_{k+3}^\bullet) = [-T_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + T_{k+3} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + R_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + fR_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] dt,$$

$$\begin{aligned} \rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2} (y_{k+2}^{\bullet} - y_{k+3}^{\bullet}) &= [T_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - T_{k+3} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + \\ &+ R_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - fR_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] dt, \\ ds_{k+2} &= \frac{|x_{k+2}^{\bullet}| dt}{\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})} = \frac{|y_{k+2}^{\bullet}| dt}{\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})}, \quad x_{k+2}^{\bullet} = -u \sin\left(\sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i\right), \quad y_{k+2}^{\bullet} = u \cos\left(\sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i\right), \\ ds_{k+3} &= \frac{|x_{k+2}^{\bullet}| dt}{\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})} = \frac{|y_{k+2}^{\bullet}| dt}{\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})}, \\ x_{k+3}^{\bullet} &= -u \sin\left(\sum_{i=1}^{k+3} \alpha_i\right), \quad y_{k+3}^{\bullet} = u \cos\left(\sum_{i=1}^{k+3} \alpha_i\right), \\ ds_0 &= ds_{k+2} = ds_{k+3}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2} = \rho_{k+3} F_{k+3} ds_{k+3}; \\ &\dots, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

– в областях  $n-1$  и  $n$

$$\begin{aligned} \rho_{n-1} F_{n-1} ds_{n-1} (x_{n-1}^{\bullet} - x_n^{\bullet}) &= \left[ -T_{n-1} \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + T_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + R_{n-1} \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + fR_{n-1} \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) \right] dt, \\ \rho_{n-1} F_{n-1} ds_{n-1} (y_{n-1}^{\bullet} - y_n^{\bullet}) &= \left[ T_{n-1} \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - T_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + R_{n-1} \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - fR_{n-1} \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) \right] dt, \\ ds_{n-1} &= \frac{|x_{n-1}^{\bullet}| dt}{\sin\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right)} = \frac{|y_{n-1}^{\bullet}| dt}{\cos\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right)}, \quad x_{n-1}^{\bullet} = -u \sin \cos\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right), \quad y_{n-1}^{\bullet} = u \cos \cos\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right), \\ ds_n &= \frac{|x_n^{\bullet}| dt}{\cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)} = \frac{|y_n^{\bullet}| dt}{\sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)}, \quad x_n^{\bullet} = -u \sin \cos\left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j\right), \quad y_n^{\bullet} = u \cos \cos\left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j\right), \\ ds_0 &= ds_{n-1} = ds_n, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{n-1} F_{n-1} ds_{n-1} = \rho_n F_n ds_n; \end{aligned}$$

– в областях  $n$  и  $n+1$

$$\begin{aligned} \rho_n F_n ds_n (x_n^{\bullet} - x_{n+1}^{\bullet}) &= \left[ -T_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + T_{n+1} \cos \varphi_{n+1} + R_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + fR_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) \right] dt, \\ \rho_n F_n ds_n (y_n^{\bullet} - y_{n+1}^{\bullet}) &= \left[ T_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - T_{n+1} \sin \varphi_{n+1} + R_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - fR_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) \right] dt, \\ ds_n &= \frac{|x_n^{\bullet}| dt}{\cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)} = \frac{|y_n^{\bullet}| dt}{\sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)}, \quad x_n^{\bullet} = -u \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right), \quad y_n^{\bullet} = u \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right), \\ ds_{n+1} &= \frac{|x_{n+1}^{\bullet}| dt}{\cos \varphi_{n+1}} = \frac{|y_{n+1}^{\bullet}| dt}{\sin \varphi_{n+1}}, \quad x_{n+1}^{\bullet} = -u \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n+1} \alpha_i\right), \quad y_{n+1}^{\bullet} = u \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n+1} \alpha_i\right), \\ ds_0 &= ds_n = ds_{n+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_n F_n ds_n = \rho_{n+1} F_{n+1} ds_{n+1}. \end{aligned}$$

Последние уравнения преобразуем так:

– на участках  $k+1$  и  $k+2$

$$\begin{aligned} u^2 [-\cos \alpha_{k+1} + \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] &= -T_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1} + T_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + \\ &+ R_{k+1}^* \sin \alpha_{k+1} + fR_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1}, \end{aligned}$$

$$u^2 [\sin \alpha_{k+1} - \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] = T_{k+1}^* \sin \alpha_{k+1} - T_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + \\ + R_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1} - fR_{k+1}^* \sin \alpha_{k+1};$$

– на участках  $k+2$  и  $k+3$

$$u^2 [-\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})] = -T_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + \\ + T_{k+3}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + R_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + fR_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}), \\ u^2 [\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})] = T_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - \\ - T_{k+3}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + R_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - fR_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2});$$

..., и т.д.

– на участках  $n-1$  и  $n$

$$u^2 \left[ -\cos \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) + \cos \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) \right] = \left[ -T_{n-1}^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) + T_n^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) + R_{n-1}^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) + \right. \\ \left. + fR_{n-1}^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) \right] dt. \quad (6)$$

$$u^2 \left[ \sin \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) - \sin \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) \right] = \left[ T_{n-1}^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) - T_n^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) + R_{n-1}^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) - \right. \\ \left. - fR_{n-1}^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \right) \right] dt. \quad (7)$$

– на участках  $n$  и  $n+1$

$$u^2 \left[ -\cos \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) + \cos \varphi_{n+1} \right] = \left[ -T_n^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) + T_{n+1}^* \cos \varphi_{n+1} + R_n^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) + \right. \\ \left. + fR_n^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) \right] dt. \quad (8)$$

$$u^2 \left[ \sin \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) - \sin \varphi_{n+1} \right] = \left[ T_n^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) - T_{n+1}^* \sin \varphi_{n+1} + R_n^* \cos \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) - \right. \\ \left. - fR_n^* \sin \left( \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) \right] dt. \quad (9)$$

Условие  $\beta_j = \frac{\pi}{2}$  будет иметь место, если при делении поверхности контакта точка  $B_k$  окажется

на вертикальной оси  $x = 0$ , как показано на рисунке 3, б.

Напишем уравнения движения для схем, изображенных на рисунках 1, б–3, б:

– в области  $x < 0$  (рисунок 2, б)

$$\rho_j F_j ds_j (x_j^* - x_{j+1}^*) = (-T_j \sin \beta_j + T_{j+1} \sin \beta_{j+1} - R_j \cos \beta_j + fR_j \sin \beta_j) dt,$$

$$\rho_j F_j ds_j (y_j^* - y_{j+1}^*) = (-T_j \cos \beta_j + T_{j+1} \cos \beta_{j+1} + R_j \sin \beta_j + fR_j \cos \beta_j) dt,$$

$$ds_j = \frac{|x_j^*| dt}{\sin \beta_j} = \frac{|y_j^*| dt}{\cos \beta_j}, \quad x_j^* = -u \sin \beta_j, \quad y_j^* = -u \cos \beta_j,$$

$$ds_{j+1} = \frac{|x_{j+1}^*| dt}{\sin \beta_{j+1}} = \frac{|y_{j+1}^*| dt}{\cos \beta_{j+1}}, \quad x_{j+1}^* = -u \sin \beta_{j+1}, \quad y_{j+1}^* = -u \cos \beta_{j+1},$$

$$ds_0 = ds_j = ds_{j+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_j F_j ds_j = \rho_{j+1} F_{j+1} ds_{j+1};$$

В общем случае решение задачи будет состоят из системы функций  $T_i = T_i(u, \varphi_i)$  и  $R_i = R_i(u, \varphi_i)$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n-1, n, n+1$ . Для получения этих функций, методом последовательного исключения неизвестных, необходимо решать системы  $n+1$  подобных к системам: (1) и (2) – для области  $x < 0$ ; (6) и (7) – для области  $x > 0$ ; (4) и (5) – на вертикальной оси  $x = 0$ ; (8) и (9) – для области  $n+1$ .

Ниже предлагается удобные для теоретического анализа и ведения числовых расчетов систему аналитическое решение задачи. Введем вместо коэффициента  $k$  новый индекс  $j = 1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n-1, n, n+1$  (рисунки 1, б-3, б) так, что  $T_j = T_i$ ,  $R_j = R_i$ ,

$$\beta_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^j \alpha_i & - \text{в области } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & - \text{на вертикальной оси } x = 0 \\ \sum_{i=k+1}^j \alpha_i & - \text{в области } x > 0 \end{cases}$$

– на вертикальной оси  $x = 0$  (рисунок 3, б)

$$\rho_k F_k ds_k (x_k^* - x_{k+1}^*) = (-T_k + T_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + fR_k) dt,$$

$$\rho_k F_k ds_k (y_k^* - y_{k+1}^*) = (-T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + R_k) dt;$$

$$ds_k = |x_k^*| dt, \quad y_j^* = 0, \quad x_k^* = -u,$$

$$ds_{k+1} = \frac{|x_{k+1}^*| dt}{\sin \alpha_{j+1}} = \frac{|y_{k+1}^*| dt}{\cos \alpha_{j+1}}, \quad x_{j+1}^* = -u \sin \alpha_{j+1}, \quad y_{j+1}^* = u \cos \alpha_{j+1},$$

$$ds_0 = ds_k = ds_{k+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_k F_k ds_k = \rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1};$$

– в области  $x > 0$  (рисунок 1, б)

$$\rho_j F_j ds_j (x_j^* - x_{j+1}^*) = (-T_j \cos \beta_j + T_{j+1} \cos \beta_{j+1} + R_j \sin \beta_j + fR_j \cos \beta_j) dt,$$

$$\rho_j F_j ds_j (y_j^* - y_{j+1}^*) = (T_j \sin \beta_j - T_{j+1} \sin \beta_{j+1} + R_j \cos \beta_j - fR_j \sin \beta_j) dt,$$

$$ds_j = \frac{|x_j^*| dt}{\cos \beta_j} = \frac{|y_j^*| dt}{\sin \beta_j}, \quad x_j^* = -u \cos \beta_j, \quad y_j^* = -u \sin \beta_j,$$

$$ds_{j+1} = \frac{|x_{j+1}^*| dt}{\cos \beta_{j+1}} = \frac{|y_{j+1}^*| dt}{\sin \beta_{j+1}}, \quad x_{j+1}^* = u \cos \beta_{j+1}, \quad y_{j+1}^* = -u \sin \beta_{j+1},$$

$$ds_0 = ds_j = ds_{j+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_j F_j ds_j = \rho_{j+1} F_{j+1} ds_{j+1}.$$

Полученные выше уравнения приводим к виду:

– в области  $x < 0$

$$u^2 (-\sin \beta_j + \sin \beta_{j+1}) = -T_j^* \sin \beta_j + T_{j+1}^* \sin \beta_{j+1} - R_j^* (\cos \beta_j + f \sin \beta_j), \quad (10)$$

$$u^2 (-\cos \beta_j + \cos \beta_{j+1}) = -T_j^* \cos \beta_j + T_{j+1}^* \cos \beta_{j+1} + R_j^* (\sin \beta_j + f \cos \beta_j); \quad (11)$$

– в окрестности вертикальной оси  $x = 0$

$$-u^2 (1 - \sin \alpha_{k+1}) = -T_k^* + T_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1} + fR_k^*, \quad (12)$$

$$u^2 \cos \alpha_{k+1} = -T_k^* \sin \alpha_{k+1} + R_k^*; \quad (13)$$

– в области  $x < 0$

$$u^2 (-\cos \beta_j + \cos \beta_{j+1}) = -T_j^* \cos \beta_j + T_{j+1}^* \cos \beta_{j+1} + R_j^* (\sin \beta_j + f \cos \beta_j), \quad (14)$$



$$u^2(\sin \beta_j - \sin \beta_{j+1}) = T_j^* \sin \beta_j - T_{j+1}^* \sin \beta_{j+1} + R_j^*(\cos \beta_j - f \sin \beta_j). \quad (15)$$

Задавая  $j$  значения  $1, 2, 3, \dots, k-1, k$  из уравнения (10) и (11) получаем системы для областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ...,  $k-1$  и  $k$ . В точке  $B_k$  имеют место уравнения (12) и (13). Далее присвоив  $j$  значения  $k+1, k+2, k+3, \dots, n-1, n, n+1$  из уравнения (14) и (15) получаем системы для областей  $k+1$  и  $k+2, k+2$  и  $k+3, \dots, n-2$  и  $n-1, n-1$  и  $n, n$  и  $n+1$ .

Пусть натяжение  $T_1$  области 1 известно и требуется найти решения для участков, расположенных в области  $x < 0$ . Рассмотрим уравнения (10) и (11). Умножим уравнение (10) на  $\cos \beta_{j+1}$ , (11) – на  $\sin \beta_{j+1}$  и найдем их разность

$$R_j^* = \frac{(u^2 - T_j^*) \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}{\sin(\beta_j + \beta_{j+1}) + f \cos(\beta_j - \beta_{j+1})}. \quad (16)$$

Умножим уравнение (10) на  $\sin \beta_j + f \cos \beta_j$ , (11) – на  $\cos \beta_j + f \sin \beta_j$  и найдем их сумму

$$T_{j+1}^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_j^*) \left(1 + \frac{f}{2} \sin 2\beta_j\right)}{\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) + f \sin(\beta_j + \beta_{j+1})}. \quad (17)$$

Найдем решения системы (12) и (13). Уравнение (12) умножим на  $\sin \alpha_{k+1}$ , (13) – на  $\cos \alpha_{k+1}$  и установим их сумму

$$R_k^* = \frac{u^2(1 - \sin \alpha_{k+1}) + T_k^* \sin \alpha_{k+1}}{\cos \alpha_{k+1} + f \sin \alpha_{k+1}}. \quad (18)$$

Уравнение (13) умножим на  $f$  и установим разность уравнения (12) и (13)

$$T_{k+1}^* = \frac{u^2(\sin \alpha_{k+1} - f \cos \alpha_{k+1} - 1) + T_k^*}{\cos \alpha_{k+1} + f \sin \alpha_{k+1}}. \quad (19)$$

Умножим уравнение (14) на  $\sin \beta_{j+1}$ , (15) – на  $\cos \beta_{j+1}$  и найдем их сумму

$$R_j^* = \frac{(u^2 - T_j^*) \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}{\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) - f \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}. \quad (20)$$

Умножим уравнения (14) на  $\cos \beta_j - f \sin \beta_j$ , (15) – на  $\sin \beta_j + f \cos \beta_j$  и найдем их разность

$$T_{j+1}^* = \frac{u^2[\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) - f \sin(\beta_j - \beta_{j+1}) - 1] + T_j^*}{\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) - f \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}. \quad (21)$$

Выражения (16)–(21) являются аналитическим решением рассмотренной задачи. Числовые расчеты ведутся следующим образом. Задавая  $1, 2, 3, \dots, k-1, k$  из решения (16) и (17) определяются параметры движения областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ...,  $k-2$  и  $k-1, k-1$  и  $k$ . Далее используя значение натяжение  $T_k$ , как исходное, из решения (18) и (19) определяются неизвестная реактивная сила  $R_k^*$  и натяжение  $T_{k+1}^*$ . Задавая  $j$  значения  $k+1, k+2, k+3, \dots, n-1, n, n+1$  из решения (20) и (21) определяются параметры движения областей  $k+1$  и  $k+2, k+2$  и  $k+3, \dots, n-1$  и  $n, n$  и  $n+1$ .

### Выводы

1. Построена математическая модель скольжения нити, движущегося в стационарном режиме по поверхности твердого тела, имеющего произвольное поперечное сечение.

2. Получено аналитическое решение, позволяющее устанавливать зависимости сил натяжения, давления и трения от свойства материала, формы поперечного сечения и координаты расположения твердого тела в заданной плоскости, условия контакта и скорости удара.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Каган В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 218 с.
- 2 Бараев А. Математические модели скольжения намоточных свзей // Технология машиностроения. – М., 2009. – № 7. – С. 38-42.
- 3 Бараев А. Скольжения нерастяжимой гибкой нити по поверхности твердого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М., 2009. – № 3. – С. 9-12.
- 4 Бараев А., Дасибеков А.Д., Культурсинов Ж.К. О проблеме решения задачи скольжения гибкой связи по поверхности твердого тела // Междунар. научно-технич. конф. «Механика деформируемого твердого тела», посвящ. 70-летию акад. АН Р.Уз Ш. Т. Ширинкулова. – Самарканд, 2007. – С. 78-81.
- 5 Бараев А., Эргашов М., Дасибеков А. Натяжение, деформация и неровнота гибкой связи. – Астана, 2008. – 354 с.

REFERENCES

- 1 Kagan V.M. Vzaimodejstvie niti s rabochimi organami tekstil'nyh mashin. M.: Legkaja i pishhevaja promyshlennost', 1984. 218 s.
- 2 Baraev A. Matematicheskie modeli skol'zhenija namotochnyh svzej. Tehnologija mashinstroenija. M., 2009. № 7. S. 38-42.
- 3 Baraev A. Skol'zhenija nerastjazhimoj gibkoj niti po poverhnosti tverdogo tela. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. M., 2009. № 3. S. 9-12.
- 4 Baraev A., Dasibekov A.D., Kul'tursinov Zh.K. O probleme reshenija zadachi skol'zhenija gibkoj svjazi po poverhnosti tverdogo tela. Mezhdunar. nauchno-tehnich. konf. «Mehanika deformirumogo tverdogo tela», posvjashh. 70-letiju akad. AN R.Uz Sh. T. Shirinkulova. Samarkand, 2007. S. 78-81.
- 5 Baraev A., Jergashov M., Dasibekov A. Natjazhenie, deformacija i nerovnота gibkoj svjazi. Astana, 2008. 354 s.

Резюме

*А. Бараев, М. Ж. Жұмабаев, А. С. Төлеп*

(Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік институты, Шымкент, Қазақстан,  
Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан)

ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ПІШІНІ БАР ҚАТТЫ ДЕНЕНІң БЕТКІ ЖАҒЫН АЙНАЛДЫРА ҚОРШАП ТҮРҒАН  
ЖІПКЕ СОЛ ЖАҚ СОҒЫНАН СОҒҚЫ БЕРУ

Кез келген көлденең қималы қозғалмайтын қатты дене бетімен, стационар режимде қозғалатын, созылмайтын жіптің сырғанау есебі қарастырылады. Жанасу беттеріндегі үйкеліс және қысым түсіретін күштердің орналасу заңдылығын анықтау әдістемесі ұсынылады. Есептің аналитикалық шешімі және сандық эксперименттік зерттеулер жүргізу сұлбасы келтірілген.

**Тірек сөздер:** жіп, сырғанау, математикалық модель, соққы, бет, үйкеліс, күш, реакция, тартылу.

Summary

*A. Baraev, M. Zh. Zhumabaev, A. S. Tulep*

(South Kazhastanskiy state institute, Shymkent, Kazakhstan,  
International kazakh-turkish university named by Kh. A. Yassavi, Turkestan, Kazakhstan)

KICK ON THE LEFT END OF THE STRING, ENVELOPE SURFACE OF A RIGID BODY  
WITH A CURVED SHAPE

Impact of the left end of yarn, envelope of surfaces of system of improvable solid body In this article given a problem about sliding of non-elongation yarn which moves on the surface of improvable solid body, which have arbitrary section. It is also suggested the method of setting up rules of the power of stretching, pressure on the surface when they are in contact. Analytical solution of the problem and scheme of numerical search that was experimented.

**Keywords:** thread, slip, mathematical model, blow, surface, friction, force, reaction, tension.

*Поступила 05.05.2014 г.*