УДК 519.442, 511.292

А. БОЛЕН

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан)

ГАУССОВЫ СУММЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ ПО МОДУЛЮ 2^l И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. В работе дается вычисления Гауссовых сумм для характеров Дирихле по модулю 2^l, и их приложения к универсальному конструктивному описанию абсолютно абелевых циклических полей примарной степени 2^l, с ведущим дивизором 2^{l+2}. Вычислены минимальные многочлены порождающих элементов в универсальном конструктивном описании. Производится подсчет числа всех абсолютно циклических полей степени 2^l, с ведущим дивизором 2^{l+2}.

Ключевые слова: суммы, характеры, поля, многочлен дивизор.

Тірек сөздер: қосындылар, характерлер, өрістер, көпмүше, дивизор.

Keywords: sums, characters, fields, polynom , divisor.

Эффективным инструментом для конструктивного описания абсолютно абелевых полей особую роль играет, суммы Гаусса по характеру Дирихле. Теорема Кронекера-Вебера утверждает, что любое абсолютно абелево поле (а.а.п.) будет подполем поля деления круга $Q(\zeta_f)$, при некотором *f*, где $\zeta_f = \cos\dfrac{2\pi}{f} + i\sin\dfrac{2\pi}{f} \in C^*$, Q – поле рациональных чисел. Ведущим дивизором а.а.п. K, называется наименьшее натуральное число $F(K) = f$ такое, что $Q(\zeta_f)$, является наименьшим полем поля деления круга, в котором содержится *K*. Так как любая а.а.п. является композитом абсолютно циклических полей степени p^l, где *p* простое число, то конструктивное описание множества всех абсолютно абелевых полей сводится к описанию множества всех абсолютно циклических полей примарной степени p^l.

Для любого $l \in Z^+$, $U(2^{l+2}) = (\overline{-1}) \times (\overline{5})$, $|\overline{-1}| = 2$, $|\overline{5}| = 2^{k-2}$. группы характеров Дирихле по модулю 2^{l+2}, имеет разложение $X(2^{l+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1) = -1$, $\lambda_{2^l}(-1) = 1$, $\lambda_{-1}(5) = 1$, $\lambda_{2^l}(5) = \zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}| = 2$, $|\lambda_{2^l}| = 2^l$. Если $\chi \in X(2^l)$, характер с ведущим модулем $F(\chi) \neq 1$, $F(\chi) \neq 4$, то $F(\chi) = 2^{2+ord_2|\chi|}$.

Определение 1. Два примитивных характера Дирихле $\chi_1, \chi_2 \in X(f)$, по модулю *m*, называются эквивалентными и обозначаются $\chi_1 \sim \chi_2$, если их ведущие модули совпадают $F(\chi_1) = F(\chi_2) = f$, и порождают одну и ту же подгруппу группы *X*(*f*), то есть $(\chi_1) = (\chi_2)$.

Пусть *p* простое число, X_{p^l} – множество всех примитивных характеров порядка p^l, $X_{p^l}/\sim$ – фактормножество множество X_{p^l} – всех примитивных характеров порядка p^l по эквивалентности ~, P_{p^l} – множество всех абсолютно циклических полей степени p^l. Известно [1, 2], что отображение $\psi : X_{p^l}/\sim \to P_{p^l}$, определенное формулой $\psi(\chi) = Q(\theta(\chi))$, $\chi \in X_{p^l}$, $F(\chi) = f$, примитивный характер Дирихле по модулю *f*, порядка $|\chi| = p^l$, $\theta(\chi) = \sum_{t \in Ker\chi} \zeta_f{}^t \in Q(\zeta_f)$ является биективным отображением, причем $F(\chi) = F(Q(\theta(\chi)))$,

$\left|Q(\theta(\chi)):Q\right|=|\chi|$, и $\theta(\chi)=\sum_{t\in Ker\chi}\zeta_f^{\ t}=\frac{1}{p^l}\sum_{k=0}^{p^l-1}\tau(\chi^k)\in Q(\zeta_f)$, где $\tau(\chi^i)=\sum_{t\in U(f)}\chi^i(t)\zeta_f^{\ t}$, суммы Гаусса.

Гауссовы суммы для характеров Дирихле по модулю 2^l поддаются более конкретному вычислению.

Предложение 1. Пусть $l\in Z^+$, $U(2^{l+2})=(\overline{-1})\times(\overline{5})$, $X(2^{l+2})=(\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1)=-1, \lambda_{2^l}(-1)=1$, $\lambda_{-1}(5)=1$, $\lambda_{2^l}(5)=\zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}|=2$, $|\lambda_{2^l}|=2^l$. Если $0\le k<2^l$, $k\equiv 0(\text{mod}\,2)$, то $\tau(\lambda_{2^l}^{\ k})=0$. Если $0\le k<2^l$, $k\equiv 1(\text{mod}\,2)$, $l\equiv 1(\text{mod}\,2)$, то

$$\tau(\lambda_{2^l}^{\ k})=2^{\frac{l+1}{2}}\left(\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt_k\pm 5^{t_k}}+\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4k(2^{\frac{l-3}{2}}+t_k)\pm 5^{2^{\frac{l-3}{2}}+t_k}}\right),$$

$$\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^{\ k})=-2^{\frac{l+1}{2}}\left(\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt_k\pm 5^{t_k}}+\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4k(2^{\frac{l-3}{2}}+t_k)\pm 5^{2^{\frac{l-3}{2}}+t_k}}\right),$$ где $5^{2^{\frac{l-1}{2}}}-1\equiv 2^{\frac{l+3}{2}}q(\text{mod}\,2^{l+2})$, $\pm 5^t(5^{2^{\frac{l-1}{2}}}-1)\equiv -2^{\frac{l+3}{2}}k(\text{mod}\,2^{l+2})$ или $\pm 5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\text{mod}\,2^{\frac{l+1}{2}})$. Если $0\le k<2^l$, $k\equiv 1(\text{mod}\,2)$, $l\equiv 0(\text{mod}\,2)$, то $\tau(\lambda_{2^l}^{\ k})=2^{\frac{l+2}{2}}\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt_k\pm 5^{t_k}}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^{\ k})=\pm 2^{\frac{l+2}{2}}\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt_k\pm 5^{t_k}}$, где $5^{2^{\frac{l-2}{2}}}-1\equiv 2^{\frac{l+2}{2}}q(\text{mod}\,2^{l+2})$, $\pm 5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\text{mod}\,2^{\frac{l+2}{2}})$.

Доказательство. $U(2^{l+2})=(\overline{-1})\times(\overline{5})$, $X(2^{l+2})=(\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1)=-1, \lambda_{2^l}(-1)=1$, $\lambda_{-1}(5)=1$, $\lambda_{2^l}(5)=\zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}|=2$, $|\lambda_{2^l}|=2^l$.

$$\tau(\lambda_{2^l}^{\ k})=\sum_{t=1}^{2^l-1}\lambda_{2^l}^{\ k}(5^t)\zeta_{2^{l+2}}^{\ 5^j}+\sum_{t=1}^{2^l-1}\lambda_{2^l}^{\ k}(-5^t)\zeta_{2^{l+2}}^{\ -5^t}=\sum_{t=1}^{2^l-1}\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt+5^t}+\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt-5^t}.$$

$$\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^{\ k})=\sum_{t=1}^{2^l-1}\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^{\ k}(5^t)\zeta_{2^{l+2}}^{\ 5^j}+\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^{\ k}(-5^t)\zeta_{2^{l+2}}^{\ -5^t}=\sum_{t=1}^{2^l-1}\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt+5^t}-\zeta_{2^{l+2}}^{\ 4kt-5^t}.$$

Если $0\le k<2^l$, $k\equiv 0(\text{mod}\,2)$, то $F(\lambda_{2^l}^{\ k})<2^l$ и $\tau(\lambda_{2^l}^{\ k})=0$. Если $l\equiv 1(\text{mod}\,2)$, $k\equiv 1(\text{mod}\ 2)$, то $4\cdot 2^{\frac{l-1}{2}}j+5^{2^{\frac{l-1}{2}}j}\equiv 5^0\equiv 1(\text{mod}\,2^{l+2})$, $4(2^{\frac{l-3}{2}}+2^{\frac{l-1}{2}}j)+5^{2^{\frac{l-3}{2}}+2^{\frac{l-1}{2}}j}\equiv 4\cdot 2^{\frac{l-3}{2}}+5^{2^{\frac{l-3}{2}}}(\text{mod}\,2^{l+2})$, сравнения $4k(t+2^{\frac{l-1}{2}})\pm 5^{t+2^{\frac{l-1}{2}}}\equiv 4kt\pm 5^t(\text{mod}\,2^{l+2})$ равносильно сравнению $\pm 5^t(5^{2^{\frac{l-1}{2}}}-1)\equiv -2^{\frac{l+3}{2}}k(\text{mod}\,2^{l+2})$ или $\pm 5^t\equiv -q^{-1}k(\text{mod}\,2^{\frac{l+1}{2}})$, где

$5^{2^{\frac{l-1}{2}}}-1\equiv 2^{\frac{l+3}{2}}q(\bmod 2^{l+2})$, $q\equiv 1(\bmod\ 2)$. Заметим, что существует $t_k\in Z$, такое что $5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+1}{2}})$ или $-5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+1}{2}})$. Таким образом, если $0\le k<2^l$, $k\ne 0(\bmod\ 2)$, $l\equiv 1(\bmod 2)$, то $\tau(\lambda_{2^l}{}^k)=2^{\frac{l+1}{2}}(\zeta_{2^{l+2}}{}^{4kt_k\pm 5^{t_k}}+\zeta_{2^{l+2}}{}^{4k(2^{\frac{l-3}{2}}+t_k)\pm 5^{2^{\frac{l-3}{2}}+t_k}})$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}{}^k)=-2^{\frac{l+1}{2}}(\zeta_{2^{l+2}}{}^{4kt_k\pm 5^{t_k}}+\zeta_{2^{l+2}}{}^{4k(2^{\frac{l-3}{2}}+t_k)\pm 5^{2^{\frac{l-3}{2}}+t_k}})$, где $5^{2^{\frac{l-1}{2}}}-1\equiv 2^{\frac{l+3}{2}}q(\bmod 2^{l+2})$, $\pm 5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+1}{2}})$. Если $l\equiv 0(\bmod\ 2)$, $k\equiv 1(\bmod\ 2)$, то сравнения $4k(t+2^{\frac{l-2}{2}})\pm 5^{t+2^{\frac{l-2}{2}}}\equiv 4kt\pm 5^t(\bmod 2^{l+2})$ равносильно сравнению $\pm 5^t(5^{2^{\frac{l-2}{2}}}-1)\equiv -2^{\frac{l+2}{2}}k(\bmod 2^{l+2})$ или $\pm 5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+2}{2}})$, где $5^{2^{\frac{l-2}{2}}}-1\equiv 2^{\frac{l+2}{2}}q(\bmod 2^{l+2})$, $q\equiv 1(\bmod\ 2)$. Заметим, что существует $t_k\in Z$, такое что $5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+2}{2}})$ или $-5^{t_k}\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+2}{2}})$. $Ker\lambda_{2^l}{}^k=\{1,-1\}$, $Ker\lambda_{-1}\lambda_{2^l}{}^k=\{1,-5^{2^{l-1}k^{-1}}\}$, Таким образом, если $0\le k<2^l$, $l\equiv 0(\bmod\ 2)$, $k\equiv 1(\bmod\ 2)$, то $\tau(\lambda_{2^l}{}^k)=2^{\frac{l+2}{2}}\zeta_{2^{l+2}}{}^{4kt\pm 5^t}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}{}^k)=\pm 2^{\frac{l+2}{2}}\zeta_{2^{l+2}}{}^{4kt\pm 5^t}$. где $5^{2^{\frac{l-2}{2}}}-1\equiv 2^{\frac{l+2}{2}}q(\bmod 2^{l+2})$, $\pm 5^t\equiv -q^{-1}k(\bmod 2^{\frac{l+2}{2}})$.

Предложение 2. Для любого $l\in Z^+$, $U(2^{l+2})=(\overline{-1})\times(\overline{5})$, $X(2^{l+2})=(\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1)=-1$, $\lambda_{2^l}(-1)=1$, $\lambda_{-1}(5)=1$, $\lambda_{2^l}(5)=\zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}|=2$, $|\lambda_{2^l}|=2^l$. с точностью до эквивалентности по модулю 2^{l+2} существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^l},\lambda_{-1}\lambda_{2^l}$ порядка $|\lambda_{2^l}|=|\lambda_{-1}\lambda_{2^l}|=2^l$, и существует в точности два циклических поля степени $2^l=|K_i:Q|$, с ведущим дивизором 2^{l+2}: $K_1=Q(\theta(\lambda_{2^l}))=Q(\zeta_{2^{l+2}}+\zeta_{2^{l+2}}{}^{-1})=Q(2\cos\frac{2\pi}{2^{l+2}})$ и $K_2=Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}))=Q(\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}{}^{-1})=Q(2i\sin\frac{2\pi}{2^{l+2}})$, соответственно с дискриминантами $D_1=D_2=2^{(l+1)2^l-1}$, при $l\ne 1$, $1,\theta(\lambda_{2^l}),\theta(\lambda_{2^l})^2,\ldots,\theta(\lambda_{2^l})^{2^l-1}$ и $1,\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}),\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})^2,\ldots,\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})^{2^l-1}$ являются целыми базисами полей K_1,K_2, где $\theta(\lambda_{2^l})=\sum_{t\in Ker\lambda_{2^l}}\zeta_{2^{l+2}}{}^t=\zeta_{2^{l+2}}+\zeta_{2^{l+2}}{}^{-1}$ и $\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})=\sum_{t\in Ker\lambda_{-1}\lambda_{2^l}}\zeta_{2^{l+2}}{}^t=\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}{}^{-1}$. Для

$f_{2^l}(x)$, $g_{2^l}(x)$ минимальных многочленов чисел $\theta(\lambda_{2^l}),\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})$, справедливы рекуррентные формулы $f_{2^{l+1}}(x)=f_{2^l}(x^2-2)$, $g_{2^{l+1}}(x)=f_{2^l}(x^2+2)$.

Доказательство. Заметим, что существует единственное циклическое поле $Q(\zeta_4)=Q(i)$, степени 2, с ведущим дивизором 2^2: с дискриминантом $D=-4$, $1,i$ является целым базисом. Существует в точности два циклических поля K_1, K_2, степени $2^2=|K_i:Q|$, с ведущим дивизором 2^3:

$$K_1=Q(\zeta_8+\zeta_8^{-1})=Q(2\cos\frac{\pi}{4})=Q(\sqrt{2}),\quad K_2=Q(\zeta_8-\zeta_8^{-1})=Q(i2\sin\frac{\pi}{4})=Q(i\sqrt{2}),$$

соответственно с дискриминантами $D_1=8$, $D_2=-8$, при этом $1,\sqrt{2}$ и $1,i\sqrt{2}$ являются целыми базисами полей K_1, K_2.

При $l\in Z^+$, $l>1$, $U(2^{l+2})=(\overline{-1})\times(\overline{5})$, $X(2^{l+2})=(\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1)=-1$, $\lambda_{2^l}(-1)=1$, $\lambda_{-1}(5)=1$, $\lambda_{2^l}(5)=\zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}|=2$, $|\lambda_{2^l}|=2^l$., с точностью до эквивалентности по модулю 2^{l+2} существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^l},\lambda_{-1}\lambda_{2^l}$ порядка $|\lambda_{2^l}|=|\lambda_{-1}\lambda_{2^l}|=2^l$, $Ker\lambda_{2^l}=\{1,-1\}$, $Ker\lambda_{-1}\lambda_{2^l}=\{1,-5^{2^{l-1}}\}, 5^{2^{l-1}}\equiv 1+2^{l-1}(\mathrm{mod}\, 2^l)$, и существует в точности два циклических поля степени 2^l, с ведущим дивизором 2^{l+2}: $K_1=Q(\theta(\lambda_{2^l}))=Q(\zeta_{2^{l+2}}+\zeta_{2^{l+2}}^{-1})$ и $K_2=Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}))=Q(\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}^{-1})$, где $\theta(\lambda_{2^l})=\sum_{t\in Ker\lambda_{2^l}}\zeta_{2^{l+2}}^{\,t}=\zeta_{2^{l+2}}+\zeta_{2^{l+2}}^{-1}$, $\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})=\sum_{t\in Ker\lambda_{-1}\lambda_{2^l}}\zeta_{2^{l+2}}^{\,t}=\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}^{-1}$. Группа Галуа циклических полей K_1, K_2 степени 2^l, являются циклические группы $U(2^{l+2})/Ker\lambda_{2^l}$, $U(2^{l+2})/Ker\lambda_{-1}\lambda_{2^l}$ порядка $|\lambda_{2^l}|=|\lambda_{-1}\lambda_{2^l}|=2^l$.

$$\theta_j=5^j(\theta(\lambda_{2^l}))=\sum_{t\in Ker\lambda_{2^l}}\zeta_{2^{l+2}}^{\,t}=\zeta_{2^{l+2}}+\zeta_{2^{l+2}}^{-1},$$

$$\theta'_j=5^j(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}))=\sum_{t\in Ker\lambda_{-1}\lambda_{2^l}}\zeta_{2^{l+2}}^{\,t}=\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}^{-1}.$$

Теперь применим теоремы о ведущих дивизорах дискриминанта поля к вычислению дискриминанта D_1 поля K_1:

$$D_1=\prod_{s=0}^{2^l-1}F(\lambda_{2^l}^{\,s})=\prod_{s=1}^{2^l-1}2^{2+ord_2|\lambda_{2^l}^{\,s}|}=2^{(l+2)(2^l-1)}\Big/2^{\sum_{s=1}^{2^l-1}ord_2 s}=2^{(l+1)2^l-1}.$$

Аналогично вычисляется дискриминант D_2 поля $K_2=Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}))=Q(\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}^{-1})=Q(2i\sin\frac{2\pi}{2^{l+2}})$, $D_2=2^{(l+1)2^l-1}$ при $l>1$,

Обозначим через $f_{2^l}(x)$ и $g_{2^l}(x)$ минимальные многочлены чисел $\theta(\lambda_{2^l}),\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})$ соответственно. Так как, $(\zeta_{2^{l+2}}+\zeta_{2^{l+2}}^{-1})^2=\zeta_{2^{l+1}}+\zeta_{2^{l+1}}^{-1}+2$, $(\zeta_{2^{l+2}}-\zeta_{2^{l+2}}^{-1})^2=\zeta_{2^{l+1}}+\zeta_{2^{l+1}}^{-1}+2$, справедливы рекуррентные формулы $f_{2^{l+1}}(x)=f_{2^l}(x^2-2)$, $g_{2^{l+1}}(x)=f_{2^l}(x^2+2)$.

Ниже приведены конкретные вычисления для изучение циклических полей степени 2^l, с ведущим дивизором 2^{l+2}, при $l=1,2,3,4,5$.

Примеры. 1. По модулю $f=8$, $U(2^3)=(-\overline{1})(\overline{5})$, $X(2^3)=(\lambda_{-1})(\lambda_2)$, $\lambda_{-1}(-1)=-1$, $\lambda_2(-1)=1$, $\lambda_{-1}(5)=1$, $\lambda_2(5)=-1$, с точностью до эквивалентности существует два примитивных характера: $\lambda_2, \lambda_{-1}\lambda_2$ порядка $|\lambda_2|=|\lambda_{-1}\lambda_2|=2$, $Ker\,\lambda_2=\{1,-1\}$, $Ker\,\lambda_{-1}\lambda_2=\{1,-5\}$, $\tau(\lambda_2)=2(\zeta_{2^3}+\zeta_{2^3}{}^{-1})=2\sqrt{2}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_2)=2(\zeta_{2^3}-\zeta_{2^3}{}^{-1})=4i\sin\frac{\pi}{4}=i2\sqrt{2}$ и существует два квадратичных полей $K_1=Q(\theta(\lambda_2))=Q(\sqrt{2})$ и $K_2=Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}))=Q(i\sqrt{2})$, с ведущим дивизором $f=8$, и с дискриминантами $D_1=8$, $D_2=-8$.

2. По модулю $f=16$, $U(2^4)=(-\overline{1})(\overline{5})$, $X(2^4)=(\lambda_{-1})(\lambda_{2^2})$, $\lambda_{2^2}(5)=\zeta_{2^2}$, с точностью до эквивалентности существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^2}, \lambda_{-1}\lambda_{2^2}$ порядка $|\lambda_{2^2}|=|\lambda_{-1}\lambda_{2^2}|=2^2$, и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f=16$: $K_1=Q(\theta(\lambda_{2^2}))=Q(2\cos\frac{\pi}{8})=Q(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ и $K_2=Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}))=Q(2i\sin\frac{\pi}{8})=Q(i\sqrt{2-\sqrt{2}})$, с дискриминантом $D_1=D_2=2^{11}$.

$U(2^4)=\{1,5,5^2=-7,5^3=-3,-1,-5,-5^2=7,-5^3=3\}$. $5-1\equiv 2^{\frac{2+2}{2}}(\mathrm{mod}\,2^{2+2}), q=1$, $\pm 5^t\equiv -k(\mathrm{mod}\,2^{\frac{2+2}{2}})$, при $k=1$, $t=0-$, $-5^0\equiv -1(\mathrm{mod}\,2^{\frac{2+2}{2}}), \tau(\lambda_{2^2})=2^2\zeta_{16}{}^{-1}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})=-4\zeta_{2^4}{}^{-1}$, при $k=3$, $t=0+$, $5^0\equiv -3(\mathrm{mod}\,2^{\frac{2+2}{2}})$, $\tau(\lambda_{2^2}{}^3)=2^2\zeta_{16}{}^{5^0}=4\zeta_{16}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}{}^3)=2^{\frac{2+2}{2}}\zeta_{2^{2+2}}{}^{5^0}=4\zeta_{16}$. $\theta_0=\theta(\lambda_{2^2})=\zeta_{16}{}^{-1}+\zeta_{16}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\theta_1=5^1(\theta(\lambda_{2^2}))=\zeta_{16}{}^{-5}+\zeta_{16}{}^{5}=-\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\theta_2=5^2(\theta(\lambda_{2^2}))=\zeta_{16}{}^{-9}+\zeta_{16}{}^{9}=-\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\theta_3=\zeta_{16}{}^{-3}+\zeta_{16}{}^{3}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

$$\theta_0'=\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})=\frac{1}{4}(\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}{}^3)+\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}))=\zeta_{16}-\zeta_{16}{}^{-1}=2i\sin\frac{\pi}{8}=i\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\theta_1'=5^1(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}))=\zeta_{16}{}^{5^1}-\zeta_{16}{}^{-5^1}=2i\sin\frac{5\pi}{8}=i\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\theta_2'=5^2(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}))=\zeta_{16}{}^{5^2}-\zeta_{16}{}^{-5^2}=2i\sin\frac{9\pi}{8}=-i\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$\theta_3'=5^3(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}))=\zeta_{16}{}^{5^3}-\zeta_{16}{}^{-5^3}=2i\sin\frac{13\pi}{8}=-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\theta_0',\theta_1',\theta_2',\theta_3'$ являются корнями минимального многочлена $g_{2^4}(x)=x^4+4x^2+2$. $1,\theta(\lambda_{2^2}),\theta(\lambda_{2^2})^2,\theta(\lambda_{2^2})^3$ и $1,\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}),\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})^2,\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})^3$ являются целыми базисами полей K_1, K_2.

3. По модулю $f = 32$, $U(2^5) = (-\bar{1})(\bar{5})$, $X(2^5) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^3})$, $\lambda_{2^2}(5) = \zeta_{2^2}$, с точностью до эквивалентности существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^3}, \lambda_{-1}\lambda_{2^3}$ порядка $|\lambda_{2^3}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^3}| = 2^3$, и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f = 32$: $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^3})) = Q(2\cos\frac{\pi}{16}) = Q(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3})) = Q(2i\sin\frac{\pi}{16}) = Q(i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}})$, с дискриминантом $D_1 = D_2 = 2^{31}$. $1, \theta(\lambda_{2^3}), ..., \theta(\lambda_{2^3})^7$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}), ..., \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3})^7$ являются целыми базисами циклических полей K_1, K_2. $5^2 - 1 \equiv 2^{\frac{3+3}{2}} \cdot 3(\mathrm{mod}\, 2^{3+2})$, $q = 3$, $5^{t_k} \equiv -3^{-1}k \equiv k(\mathrm{mod}\, 2^2)$. $5^0 \equiv -3^{-1} \cdot 1(\mathrm{mod}\, 2^2)$, при $k=1$, $t_1 = 0$, $\tau(\lambda_{2^3}) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}{}^9)$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}{}^9)$. $-5^0 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 2^2)$, при $k=3$, $t_3 = 0$, $\tau(\lambda_{2^3}{}^3) = 4(\zeta_{2^5}{}^{-1} + \zeta_{2^5}{}^7)$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}{}^3) = -4(\zeta_{2^5}{}^{-1} + \zeta_{2^5}{}^7)$. $5^0 \equiv 5(\mathrm{mod}\, 2^2)$, при $k = 5$, $t_5 = 0$, $\tau(\lambda_{2^3}{}^5) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}{}^{-7})$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}{}^5) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}{}^{-7})$. $-5^0 \equiv 7(\mathrm{mod}\, 2^2)$, при $k = 7$, $t_7 = 0, \tau(\lambda_{2^3}{}^7) = 4(\zeta_{2^5}{}^{-1} + \zeta_{2^5}{}^{-9})$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}{}^7) = -4(\zeta_{2^5}{}^{-1} + \zeta_{2^5}{}^{-9})$, $2\cos\frac{2\pi}{2^5} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $2\sin\frac{2\pi}{2^5} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

4. По модулю $f = 64$, $U(2^6) = (-\bar{1})(\bar{5})$, $X(2^6) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^4})$, $\lambda_{2^4}(5) = \zeta_{2^4}$, с точностью до эквивалентности существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^4}, \lambda_{-1}\lambda_{2^4}$ порядка $|\lambda_{2^4}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^4}| = 2^4$, и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f = 64$: $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^4})) = Q(2\cos\frac{\pi}{32}) = Q(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4})) = Q(2i\sin\frac{\pi}{32}) = Q(i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}})$, с дискриминантом $D_1 = D_2 = 2^{79}$. $1, \theta(\lambda_{2^4}), \theta(\lambda_{2^4})^2, ..., \theta(\lambda_{2^4})^{15}$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4})^2, ..., \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4})^{15}$ являются целыми базисами циклических полей K_1, K_2. $5^2 - 1 \equiv 2^3 q(\mathrm{mod}\, 2^6)$, $q = 3$, и существует $t \in Z$, такое что $\pm 5^t \equiv -3^{-1}k \equiv -3k(\mathrm{mod}\, 2^3)$. При $k=1, t_1 = 1$, $5^1 \equiv -3(\mathrm{mod}\, 2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}) = 8\zeta_{2^6}{}^9$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}) = 8\zeta_{2^6}{}^9$, при $k = 3$, $t_3 = 0$, $-5^0 \equiv -9(\mathrm{mod}\, 2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^3) = 2^3\zeta_{2^6}{}^{-1}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^3) = -2^3\zeta_{2^6}{}^{-1}$, при $k = 5$, $t_5 = 0$, $5^0 \equiv -15(\mathrm{mod}\, 2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^5) = 2^3\zeta_{2^6}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^5) = 2^3\zeta_{2^6}$, при $k = 7$, $t_7 = 1$, $-5^1 \equiv -21(\mathrm{mod}\, 2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^7) = 2^3\zeta_{2^6}{}^{28-5} = 8\zeta_{2^6}{}^{23}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^7) = -8\zeta_{2^6}{}^{23}$, при $k = 9$, $t_9 = 1$, $5^1 \equiv -27(\mathrm{mod}\, 2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^9) = 8\zeta_{2^6}{}^{-23}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^9) = 8\zeta_{2^6}{}^{-23}$, при $k = 11$, $t_{11} = 0$,

$-5^0 \equiv -33(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^{11}) = 2^3\zeta_{2^6}{}^{-1}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^{11}) = -2^3\zeta_{2^6}{}^{-1}$, $k = 13$, $t_{13} = 0$, $5^0 \equiv -39(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^{13}) = 2^3\zeta_{2^6}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^{13}) = 2^3\zeta_{2^6}$, при $k = 15$, $t_{15} = 1$, $-5^1 \equiv -45(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^4}{}^{15}) = 8\zeta_{2^6}{}^{-9}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}{}^{15}) = -8\zeta_{2^6}{}^{-9}$.

$$\theta_0 = \theta(\lambda_{16}) = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{15}\tau(\lambda_{16}{}^i) = \zeta_{64} + \zeta_{64}{}^{-1} = 2\cos\frac{\pi}{32} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$\theta_j = 5^j(\theta(\lambda_{16})) = \zeta_{64}{}^{5^j} + \zeta_{64}{}^{-5^j} = 2\cos\frac{5^j\pi}{32},$$

$$\theta_0' = 5^j(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{16})) = \zeta_{64} - \zeta_{64}{}^{-1} = 2i\sin\frac{\pi}{32} = i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$\theta_j' = 5^j(\theta'(\lambda_{-1}\lambda_{16})) = \zeta_{64}{}^{5^j} - \zeta_{64}{}^{-5^j} = 2i\sin\frac{5^j\pi}{32}.$$

5. По модулю $f = 128$, с точностью до эквивалентности существует два примитивных характера: $\lambda_{2^5}, \lambda_{-1}\lambda_{2^5}$, порядка $|\lambda_{2^5}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^5}| = 2^5$ и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f = 128$: $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^5})) = Q(2\cos\frac{\pi}{64}) = Q(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^5})) = Q(2i\sin\frac{\pi}{64}) = Q(i\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}})$, с дискриминантом $D_1 = D_2 = 2^{191}$. $1, \theta(\lambda_{2^5}), \ldots, \theta(\lambda_{2^5})^{31}$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}), \ldots, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^5})^{31}$ являются целыми базисами циклических полей K_1, K_2. $5^4 - 1 \equiv 2^4(-1)(\mathrm{mod}2^{5+2})$, $q = -1$, $\pm 5^{t_k} \equiv -(-1)^{-1}k \equiv k(\mathrm{mod}2^3)$. При $k = 1$, $t_1 = 0$, $5^0 \equiv 1(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{33})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{33})$. При $k = 3$, $t_3 = 1$, $-5^1 \equiv 3(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^3) == 2^3(\zeta_{2^7}{}^7 + \zeta_{2^7}{}^{39})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^3) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^7 + \zeta_{2^7}{}^{39})$. При $k = 5$, $t_5 = 1$, $5^1 \equiv 5(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^5) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{4\cdot 5+5^1} + \zeta_{2^7}{}^{20\cdot 3+5^3}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{25} + \zeta_{2^7}{}^{57})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^5) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{25} + \zeta_{2^7}{}^{57})$. При $k = 7$, $t_7 = 0$, $-5^0 \equiv -1(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^7) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{31})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^7) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{31})$. При $k = 9$, $t_9 = 0$, $5^0 \equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^9) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{-31})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^9) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{-31})$. При $k = 11$, $t_{11} = 1$, $-5^1 \equiv 3(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{11}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^7 + \zeta_{2^7}{}^{39})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{11}) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^7 + \zeta_{2^7}{}^{39})$. При $k = 13$, $t_{13} = 1$, $5^1 \equiv 5(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{13}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{25} + \zeta_{2^7}{}^{57})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{13}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{25} + \zeta_{2^7}{}^{57})$. При $k = 15$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{15}) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{-33})$, $t_{15} = 0$, $-5^0 \equiv -1(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{15}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{-33})$.. При $k = 17$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{17}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{33})$; $t_{17} = 0$, $5^0 \equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{17}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{33})$. При $k = 19$, $t_{19} = 1$,

$-5^1 \equiv 3(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{19}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-25} + \zeta_{2^7}{}^{-57})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{19}) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^{-25} + \zeta_{2^7}{}^{-57})$. При $k = 21$, $t_{21} = 1$, $5^1 \equiv 5(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{21}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-39} + \zeta_{2^7}{}^{-7})$. $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{21}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-39} + \zeta_{2^7}{}^{-7})$. При $k = 23$, $t_{23} = 0$, $-5^0 \equiv -1(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{23}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{31})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{23}) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{31})$. При $k = 25$, $t_{25} = 0$, $5^0 \equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{25}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{-31})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{25}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}{}^{-31})$. При $k = 27$, $t_{27} = 1$, $-5^1 \equiv 3(\mathrm{mod}8)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{27}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-25} + \zeta_{2^7}{}^{-57})$, При $k = 29$, $t_{29} = 1$, $5^1 \equiv 5(\mathrm{mod}2^3)$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{29}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-7} + \zeta_{2^7}{}^{-39})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{29}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-7} + \zeta_{2^7}{}^{-39})$. При $k = 31$, $t_{31} = 0-$, $\tau(\lambda_{2^5}{}^{31}) = 2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{-33})$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}{}^{31}) = -2^3(\zeta_{2^7}{}^{-1} + \zeta_{2^7}{}^{-33})$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Болен А. Конструктивное описание абсолютно примарных циклических полей // Материалы 10-ой межвузовской конфер. по математике и механике. Т. 1. – Алматы: Эверо, 2005.

2 Болен А. Классификация примитивных характеров Дирихле и их приложения // Математический журнал. – 2014. – Т. 14, № 1(51).

REFERENCES

1 Bolen A. Konstruktivnoe opisanie absoljutno primarnyh ciklicheskih polej Materialy 10-oj mezhvuzovskoj konfer. po matematike i mehanike. T. 1. Almaty: Jevero, 2005.

2 Bolen A. Klassifikacija primitivnyh harakterov Dirihle i ih prilozhenija. Matematicheskij zhurnal. 2014. T. 14, № 1(51).

Резюме

А. Бөлен

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

2^l МОДУЛІ БОЙЫНША ДИРИХЛЕ ХАРАКТЕРІМЕН ГАУСС ҚОСЫНДЫЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

Жұмыста 2^l модулі бойынша Дирихле характерімен Гаусс қосындылары есептелінді және олардың 2^l примар дәрежелі абсолют абелдік өрістердің универсаль конструктивтік сипаттамаларына қолданулары берілді. Универсаль конструктивтік сипаттамалардағы тудырушы элементтердің минималь көпмүшелері есептелінді. Жетекші дивизоры 2^{l+2} болатын 2^l дәрежелі барлық циклдық абсолют өрістердің саны есептелінді.

Тірек сөздер: қосындылар, характерлер, өрістер, көпмүше, дивизор.

Summary

A. Bolen

(Kazach national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan).

GAUSSIAN SUMS FOR CHARACTERS OF DIRICHLET ON THE MODULE 2^l, AND THEIR APPENDIX

This article gives calculations of the Gaussian sums for characters of Dirichlet on the module 2^l, and their appendix to universal structural description of the absolutely Abelian cyclic fields of примарной degree 2^l, with a leading divisor 2^{l+2}. The minimum polynomials of originative elements are calculated in universal structural description. Made calculation number of all absolutely cyclic fields of degree 2^l, with a leading divisor 2^{l+2}.

Keywords: sums, characters, fields, polynom , divisor.

Поступила 05.05.2014 г.