УДК 519.633.6:532.546

А. С. АЖИБЕКОВА

(Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан)

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КОМБИНИРОВАННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель, описывающая нестационарный процесс фильтрации жидкости в круговом пласте. Ставится комбинированная обратная задача идентификации параметров пласта. Предложен итерационный метод совместного определения коэффициента вязкости жидкости и давления на контуре пласта. Получены априорные оценки для решений прямой и сопряженной задач. Показана ограниченность искомых модельных характеристик, доставляющих минимум некоторому функционалу при известных значениях забойных давлений. Доказана монотонность минимизируемого функционала.

Ключевые слова: комбинированная обратная задача, итерационный метод, априорная оценка.

Тірек сөздер: аралас кері есеп, итерациялық әдіс, априорлық бағалау.

Keywords: combined inverse problem, iterative method, a priory estimate.

Введение. Задачи подземной гидродинамики, как и задачи математической физики в целом, делятся на прямые и обратные. Прямая задача заключается в определении решения заданного уравнения или системы уравнений при определенных начальных и граничных условиях. Математическая постановка обратных задач: по дополнительной информации о решении рассматриваемой задачи требуется определить неизвестную функцию. Искомая функция либо является коэффициентом дифференциального уравнения, либо входит в краевые или начальные условия. Проблемы, связанные с интерпретацией результатов гидродинамических исследований скважин принадлежит к классу обратных задач подземной гидродинамики. Характер дополнительной информации определяется возможностями промыслового эксперимента. Разработка и обоснование математических моделей физических процессов тесно связана с решением обратных задач для дифференциальных уравнений. При решении обратных задач подземной гидродинамики необходимо учитывать наличие погрешностей в промысловых данных. Обратные задачи математической физики часто оказываются в классическом смысле поставленным некорректно [1]. С этой особенностью обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. Необходимость рассмотрения некорректных задач и их постановка, естественная с точки зрения приложений, была впервые отмечена А.Н. Тихоновым. Было показано, что от классического понятия корректности целесообразно перейти к условно корректной постановке задачи при выполнении условий. А.Н. Тихонов разработал новый подход, позволяющий строить приближенные решения некорректно поставленных задач, устойчивые к малым изменениям исходных данных [2].

Различные постановки и решения обратных задач фильтрации жидкости даны в работах [3-5]. Численные методы решения обратных задач подземной гидродинамики изучены в работах [6, 7].

В работе рассмотрен итерационный подход к решению обратной задачи подземной гидродинамики. Разработанные итерационные формулы позволяют оценить коэффициент вязкости жидкости и давление на контуре пласта. Структура статьи организована следующим образом. В первом разделе приводится математическая формулировка задачи. Во втором разделе строятся прямые и сопряженные разностные задачи, выводятся итерационные формулы расчета искомых переменных: коэффициента вязкости и давления на контуре пласта. В третьем разделе получены априорные оценки для решений прямой и сопряженной задачи. Полученные результаты оформлены в виде леммы 1 и леммы 2. В четвертом разделе приведены результаты доказательства ограниченности приближенных значений коэффициента вязкости и давления на контуре пласта в виде теоремы 1. В пятом разделе получена априорная оценка для решения вспомогательной задачи (лемма 3) и доказывается монотонность минимизируемого функционала. Результат оформлен в виде теоремы 2.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области $Q=(r_c,R)\times(0,T)$ уравнение параболического типа, описывающее осесимметрическое нестационарное течение жидкости в пористой среде. В работе рассматривается математическая модель нестационарной фильтрации нефти к скважине в круговом резервуаре. Функция $P(r,t)$ является решением задачи:

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{\beta r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{kr}{\mu}\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right),\ r_c<r<R,\ 0<t\le T, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial P(r_c,t)}{\partial r}=\frac{q(t)}{2\pi H r_c},\ P(R,t)=0,\ 0<t\le T, \tag{2}$$

и начальным условием

$$P(r,0)=P_0(r)-P_K,\ r_c\le r\le R. \tag{3}$$

Здесь r – фазовая переменная; t – время; $P(r,t)$ – давление; k – проницаемость пласта; β – коэффициент упругоемкости пласта; μ – вязкость жидкости; $q(t)$ – дебит; P_K – давление на контуре пласта; H – мощность пласта; r_c – радиус скважины; R – радиус пласта; T – время эксперимента.

В качестве дополнительного условия используем измеренное давление на забое скважины:

$$P_\sigma(t),\ 0<t\le T. \tag{4}$$

Требуется определить величины: вязкость μ и давление на контуре пласта P_K. Остальные параметры, входящие в систему (1)-(4) считаем известными. Введем обозначение: $\bar{\mu}=\dfrac{1}{\mu}$, $z=(\bar{\mu},P_K)$.

Решение $z=(\bar{\mu},P_K)$ комбинированной обратной задачи (1)- (4) доставляет минимум функционалу:

$$J(z)=\int_0^T\left(P(r_c,t)+P_K-P_\sigma(t)\right)^2dt\to\min. \tag{5}$$

2. Итерационный метод решения. Искомую величину $z=(\bar{\mu},P_K)$ находим рекуррентно. Задается начальное приближение при n = 0: $z_n=(\bar{\mu}(n),P_K(n))$. Приближение z_n минимизирует функционал:

$$J(z_n)=\int_0^T\left(P_n(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K(n)\right)^2dt\to\min,$$

где $P_n(r,t)$ – решение прямой задачи (1)-(3) для z_n.

Следующее приближение z_{n+1} определяем из условия монотонности функционала $0<J(z_{n+1})<J(z_n)$, $n=0,1,2,\ldots$.

Пусть Δ – оператор со следующими свойствами:

1) $\Delta f=f(n+1)-f(n)$,

2) $\Delta(f\cdot g)=f(n)\cdot\Delta g+g(n)\cdot\Delta f+\Delta f\cdot\Delta g$,

где функции $f,g\in R^n$.

Тогда

$$\Delta P(r,t)=P_{n+1}(r,t)-P_n(r,t),\ \Delta\bar{\mu}=\bar{\mu}(n+1)-\bar{\mu}(n),\ \Delta P_K=P_K(n+1)-P_K(n).$$

Рассмотрим разность функционалов:

$$J(z_{n+1})-J(z_n)=\int_0^T\left(P_{n+1}(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K(n+1)\right)^2dt-\int_0^T\left(P_n(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K(n)\right)^2dt=$$

$$=2\int_0^T\left(\Delta P(r_c,t)+\Delta P_K\right)\left(P_n(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K(n)\right)dt+\int_0^T\left(\Delta P(r_c,t)+\Delta P_K\right)^2dt=$$

$$=2\int_0^T\Delta P(r_c,t)\left(P_n(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K(n)\right)dt+2\int_0^T\Delta P_K\left(P_n(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K(n)\right)dt+$$

$$+\int_0^T\left(\Delta P(r_c,t)+\Delta P_K\right)^2dt.$$

С другой стороны, находим что:

$$2\int_0^T\Delta P(r_c,t)\left(P(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K\right)dt=\int_{r_c}^R\beta r\Delta P_K\psi(r,0)dr+$$

$$+\int_0^T\int_{r_c}^R kr\Delta\overline{\mu}\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}drdt+\int_0^T\int_{r_c}^R kr\Delta\overline{\mu}\frac{\partial\Delta P(r,t)}{\partial r}\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}drdt, \tag{6}$$

где функция $\psi(r,t)$ является решением сопряженной задачи:

$$\beta\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{\mu}kr\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}\right)=0, \tag{7}$$

$$\overline{\mu}kr_c\frac{\partial\psi(r_c,t)}{\partial r}=2\left(P(r_c,t)-P_\sigma(t)+P_K\right),\ \psi(R,t)=0, \tag{8}$$

$$\psi(r,T)=0. \tag{9}$$

Учитывая (6), получим:

$$J(z_{n+1})-J(z_n)=\int_0^T\Delta P_K\overline{\mu}(n)kR\frac{\partial\psi_n(R,t)}{\partial r}dt+\int_0^T\int_{r_c}^R\Delta\overline{\mu}kr\frac{\partial P_n(r,t)}{\partial r}\frac{\partial\psi_n(r,t)}{\partial r}drdt+$$

$$+\int_0^T\int_{r_c}^R kr\Delta\overline{\mu}\frac{\partial\Delta P(r,t)}{\partial r}\frac{\partial\psi_n(r,t)}{\partial r}drdt+\int_0^T\left(\Delta P(r_c,t)+\Delta P_K\right)^2dt.$$

Из условия монотонности функционала $0<J(z_{n+1})<J(z_n)$, выводим итерационные формулы расчета параметров:

$$\overline{\mu}(n+1)=\overline{\mu}(n)-\gamma_1(n)\int_0^T\int_{r_c}^R kr\frac{\partial P_n(r,t)}{\partial r}\frac{\partial\psi_n(r,t)}{\partial r}drdt, \tag{10}$$

$$P_K(n+1)=P_K(n)-\gamma_2(n)\int_0^T\overline{\mu}(n)kR\frac{\partial\psi_n(R,t)}{\partial r}dt, \tag{11}$$

где $\gamma_l(n)>0$, $l=1,2$.

3. Априорные оценки. В работе получены априорные оценки для решений прямой и сопряженной задач.

Лемма 1. Если $P_0(r)\in L_2(r_c,R)$, $q(t)\in L_2(0,T)$, то для решения прямой задачи (1)-(3) $P_n(r,t)$ имеют место оценки:

$$\beta\int_{r_c}^R rP_n^2(r,t)dr+\overline{\mu}(n)k\int_0^t\int_{r_c}^R r\left(\frac{\partial P_n(r,\tau)}{\partial r}\right)^2drd\tau\le c_1\left(1+P_K^{\,2}(n)+\frac{1}{\overline{\mu}(n)}\right),$$

$$\int_0^t P_n^2(r_c,\tau)d\tau \le \frac{c_1}{\overline{\mu}(n)k}\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)\left(1+P_K^{\ 2}(n)+\frac{1}{\overline{\mu}(n)}\right),\ (c_1=\text{const}).$$

Доказательство: Умножим уравнение (1) для n-го приближения на функцию $P_n(r,t)$ и проинтегрируем в области $Q^t=(r_c,R)\times(0,t)$:

$$\int_{r_c}^{R}\int_0^t \beta r\frac{\partial P_n(r,\tau)}{\partial\tau}P_n(r,\tau)d\tau dr=\int_0^t\int_{r_c}^{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{\mu}(n)kr\frac{\partial P_n(r,\tau)}{\partial r}\right)P_n(r,\tau)drd\tau .$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая начальное и граничные условия (2)-(3), выводим:

$$\int_{r_c}^{R}\beta rP_n^2(r,t)dr+2\int_0^t\int_{r_c}^{R}\overline{\mu}(n)kr\left(\frac{\partial P_n(r,\tau)}{\partial r}\right)^2drd\tau=\int_{r_c}^{R}\beta rP_0^{\ 2}(r)dr-2\int_{r_c}^{R}\beta rP_0(r)P_K(n)dr+$$

$$+\int_{r_c}^{R}\beta rP_K^{\ 2}(n)dr-2\int_0^t\frac{q(\tau)}{2\pi H}P_n(r_c,\tau)d\tau .$$

Используя ε-неравенство Коши, оцениваем:

$$\int_{r_c}^{R}\beta rP_n^2(r,t)dr+\left(2-\frac{\varepsilon_1}{k\overline{\mu}(n)}\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)\right)\int_0^t\int_{r_c}^{R}\overline{\mu}(n)kr\left(\frac{\partial P_n(r,\tau)}{\partial r}\right)^2drd\tau\le\int_{r_c}^{R}\beta rP_0^{\ 2}(r)dr-$$

$$2\beta\int_{r_c}^{R}rP_0(r)P_K(n)dr+\int_{r_c}^{R}\beta rP_K^{\ 2}(n)dr+\frac{1}{4\varepsilon_1\pi^2H^2}\int_0^t q^2(\tau)d\tau .$$

Пусть $\varepsilon_1=\dfrac{k\overline{\mu}(n)}{\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)}$. Тогда получим следующую оценку:

$$\beta\int_{r_c}^{R}rP_n^2(r,t)dr+\overline{\mu}(n)k\int_0^t\int_{r_c}^{R}r\left(\frac{\partial P_n(r,\tau)}{\partial r}\right)^2drd\tau\le c_1\left(1+P_K^{\ 2}(n)+\frac{1}{\overline{\mu}(n)}\right),$$

где $c_1=\max\left\{2\beta\int_{r_c}^{R}rP_0^{\ 2}(r)dr,\beta\left(R^2-r_c^{\ 2}\right),\ \dfrac{1}{4\pi^2H^2k}\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)\int_0^t q^2(\tau)d\tau\right\}$.

Тогда $\int_0^t P_n^2(r_c,\tau)d\tau\le\dfrac{c_1}{\overline{\mu}(n)k}\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)\left(1+P_K^{\ 2}(n)+\dfrac{1}{\overline{\mu}(n)}\right)$. Лемма доказана.

Аналогичным образом выведены априорные оценки для решения сопряженной задачи.

Лемма 2. Если $P_0(r)\in L_2(r_c,R)$, $P_\sigma(t)\in L_2(0,T)$, то для решения сопряженной задачи (7)-(9) имеют место оценки:

$$\beta\int_{r_c}^{R}r\psi_n^{\ 2}(r,t)dr+\overline{\mu}(n)k\int_t^T\int_{r_c}^{R}r\left(\frac{\partial\psi_n(r,\tau)}{\partial r}\right)^2drd\tau\le\frac{c_2\left(\overline{\mu}(n)+1\right)}{\overline{\mu}^2(n)}\left(1+P_K^{\ 2}(n)+\frac{1}{\overline{\mu}(n)}\right),$$

$$\int_t^T\psi_n^{\ 2}(r_c,\tau)d\tau\le\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)\frac{c_2\left(\overline{\mu}(n)+1\right)}{k\overline{\mu}^3(n)}\left(1+P_K^{\ 2}(n)+\frac{1}{\overline{\mu}(n)}\right).$$

Здесь $c_2=\max\left\{\dfrac{12}{k}\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)\int_t^T P_\sigma^{\ 2}(\tau)d\tau,\ \dfrac{12c_1}{k^2}\left(\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)\right)^2,\ \dfrac{12T}{k}\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)\right\}$.

4. Ограниченность $\overline{\mu}(n+1)$, $P_K(n+1)$. Учитывая леммы 1, 2 доказана ограниченность приближенных значений искомых величин $\overline{\mu}(n+1)$, $P_K(n+1)$.

Терема 1. Если имеют место условия лемм 1 и 2, то существуют константы c_l, непрерывно зависящие от начальных данных, такие, что $\overline{\mu}(n+1)$ и $P_K(n+1)$ удовлетворяют неравенствам:

$$0 < c_3 \le \overline{\mu}(n+1) \le c_4 < \infty,$$

$$0 < c_5 \le P_K(n+1) \le c_6 < \infty,\ n = 0,1,2,\dots.$$

5. Монотонность функционала. Для доказательства монотонности последовательности минимизируемых функционалов рассмотрим вспомогательную задачу относительно $\Delta P(r,t)$:

$$\beta\frac{\partial \Delta P(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\Delta\left(\overline{\mu}\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right)\right),\ r_c < r < R,\ 0 < t \le T, \tag{12}$$

$$kr_c\Delta\left(\overline{\mu}\frac{\partial P(r_c,t)}{\partial r}\right) = 0,\ \Delta P(R,t) = 0,\ 0 < t \le T, \tag{13}$$

$$\Delta P(r,0) = -\Delta P_K,\ r_c \le r \le R. \tag{14}$$

Получены априорные оценки для решения задачи (12)-(14).

Лемма 3. Если имеет место теорема 1, то для решения задачи (12)-(14) справедливы оценки:

$$\beta\int_{r_c}^{R} r(\Delta P(r,t))^2 dr + c_3 k\int_0^t\int_{r_c}^{R} r\left(\frac{\partial \Delta P(r,\tau)}{\partial r}\right)^2 dr d\tau \le c_7\left((\Delta P_K)^2 + (\Delta\overline{\mu})^2\right),$$

$$\int_0^T (\Delta P(r_c,t))^2 dt \le c_8\left((\Delta P_K)^2 + (\Delta\overline{\mu})^2\right),\ c_7, c_8 = const.$$

Доказана следующая теорема о монотонности функционала.

Теорема 2. Пусть

$$\overline{A}^2 = \left(\int_0^T\int_{r_c}^{R} kr\frac{\partial P_n(r,t)}{\partial r}\frac{\partial \psi_n(r,t)}{\partial r}drdt\right)^2 > 0,\quad \overline{B}^2 = \left(\int_0^T \overline{\mu}(n)kR\frac{\partial \psi_n(R,t)}{\partial r}dt\right)^2 > 0$$

и имеет место лемма 3. Тогда существуют константы $\gamma_l(n)$, $l = 1,2$, для которых выполняется неравенство $J(z_{n+1}) - J(z_n) < 0$, $n = 0,1,2,\dots$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

2 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 287 с.

3 Kravaris G., Seinfeld J.H. Identification of parameters in distributed parameter system by regularization // SIAM J. Control and Optimization. – 1985. – Vol. 23, N 2. – P. 217-241.

4 Sun N.-Z. Inverse problems in Groundwater modeling. Kluwer Acad., Norwell. Mass. – 1997. – 337 p.

5 Sergienko I.V., Deineka V.S. Solving combined inverse problems for multicomponent parabolic distributed systems // Cybernetics and Systems Analysis. 2007. – Vol. 43, N 5.

6 Ажибекова А.С. Итерационный метод рас чета коэффициента упругоемкости нефтяного месторождения // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2013. № 4.

7 Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. – М.: Ижевск, 2006. – 172 с.

REFERENCES

1 Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlja linejnyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa.* M.: Nauka, **1978**. (in Russ).

2 Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. *Metody reshenija nekorrektnyh zadach. M.: Nauka*, **1979**. (in Russ).

3 Kravaris G., Seinfeld J.H. *SIAM J. Control and Optimization.* **1985**. Vol. 23, N 2.

4 Sun N.-Z. *Kluwer Acad.*, Norwell, Mass. **1997**.

5 Sergienko I.V., Deineka V.S. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 43, N 5. **2007**.

6 Azhibekova A.S. *News of NAS RK. Series of Physical and Mathematical.* N 4. **2013**. (in Russ).

7 Hairullin M.H., Hisamov R.S., Shamsiev M.N., Farhullin R.G. *Interpretacija rezul'tatov gidrodinamicheskih issledovanij skvazhin metodami reguljarizacii. M. Izhevsk*, **2006**. (in Russ).

Резюме

Ә. С. Әжібекова

(Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан)

МҰНАЙ ҚАБАТТЫҢ ПАРАМЕТРЛЕРІН АНЫҚТАУ КЕРІ ЕСЕБІН ШЕШУГЕ АРНАЛҒАН ИТЕРАЦИЯЛЫҚ ТӘСІЛ

Жұмыста оралымды мұнай қабаттағы тұрақсыз сүзбе құбылысының математикалық үлгісі қарастырылған. Мұнайлы қабаттың параметрлерін анықтаудың аралас кері есебі қойылған. Сұйықтық тұтқырлығын және бастапқы қабат қысымын анықтаудың итерациялық әдісі ұсынылған. Тура және кері есептер шешімдеріне априорлық бағалаулар табылған. Ізделіп отырған шамалардың шектеулі екендігі көрсетілген. Минимизацияланатын функционалдың бірқалыптылығы дәлелденген.

Тірек сөздер: аралас кері есеп, итерациялық әдіс, априорлық бағалау.

Summary

A. S. Azhibekova

(Kazakh-British technical university, Almaty, Kazakhstan)

ITERATIVE APPROACH FOR SOLVING A COMBINED INVERSE PROBLEM OF IDENTIFYING RESERVOIR PARAMETERS

This paper considers a mathematical model of an unsteady fluid filtration process in a circular reservoir. A combined inverse problem consists of identifying reservoir parameters. An iterative method is proposed for determining the viscosity coefficient and the external boundary pressure. A number of a priory estimates for solutions of direct and conjugate problems are obtained. The finiteness of approximate values of the unknowns is shown. The solution of the inverse problem minimizes a residual functional. The monotonicity of the minimized functional is proved.

Keywords: combined inverse problem, iterative method, a priory estimate.

Поступила 05.05.2014 г.