УДК 517.9

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

КРИТЕРИЙ ИРРЕГУЛЯРНОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА- ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе установлен критерии иррегулярности оператора Штурма-Лиувилля1, выраженный в терминах миноров граничной матрицы. Этот признак отличается от известных своей практичностью.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля,собственные функций,присоединенные функций.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay, own functions, attached functions.

1. В монографии [2] построена теория операторов Штурма-Ливулля,основанная на теории целых функций [3]. Структура спектра операторов Штурма-Ливулля была детально исследовано в [4], тем не менее,некоторые вопросы еще остаются открытыми.

2. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператора Штурма-Ливулля

$$ly = -y''(x), \qquad x \in (0,1) \qquad (2.1)$$

$$U_1(y) = a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0,$$

$$U_2(y) = a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \qquad (2.2)$$

с двумя линейно независимыми краевыми условиями (2.2), где $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ - произвольные комплексные постоянные, $y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$. Областью определения оператора L является линейное многообразие

$$D(L) = \{y(x) \in D(L): y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1], U_j(y) = 0, i = 1,2\}.$$

Постановка задачи. Предположим, что граничные условия (2.2) являются иррегулярными [1, с.73], тогда какими будут коэффиценты гарничных условий a_{ij}?

Для решения этой задачи предпошлем несколько лемм.

Лемма 2.1. Если имеет место равенства

$$\Delta_{42} = 0;$$

$$|\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| = 0$$

то граничные условия (2.2) регулярны по Бирkгофу [1,с.73].

Доказательство.

Из условий леммы тождества $\Delta_{13} \times \Delta_{24} = \Delta_{12} \times \Delta_{34} - \Delta_{14} \times \Delta_{32}$ имеем $\Delta_{14} \times \Delta_{32} = 0$. Возможны следующие три случая:

а) $\Delta_{14} = 0$ и $\Delta_{32} = 0$;

б) $\Delta_{14} \neq 0$ и $\Delta_{32} = 0$;

в) $\Delta_{14} = 0$ и $\Delta_{32} \neq 0$

В случае а) $\Delta_{13} \neq 0$, иначе граничные условия (2.2) окажутся линейно зависимыми.

Поэтому граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) + \Delta_{23}y'(0) + \Delta_{43}y'(1) = 0, \\ \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) = 0, \\ \Delta_{13}y(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Тогда граничная матрица принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

следовательно, $a_{12} = a_{14} = a_{22} = a_{24} = 0, \Delta_{13} \neq 0$, т.е. граничные условия (2.2) регулярны по 3) пункту определения Биркгофа.

б) $\Delta_{14} \neq 0$ и $\Delta_{32} = 0$;

В этом случае граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14} \times y'(1) = 0, \\ \Delta_{14}y(0) + \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{34}y(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14} \times y'(1) = 0; \\ \Delta_{14}y(0) = 0; \end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24}=0$ и $a_{14}=\Delta_{14}\neq 0$, то 1) и 3) пункты определения Биркгофа не выполняются , поэтому проверим 2) пункта.

$$|a_{12}|+|a_{14}|=|\Delta_{14}|>0,$$

$$a_{14}\times a_{21}+a_{12}\times a_{23}=\Delta_{14}\times\Delta_{14}+0.0=\Delta_{14}^2\neq 0,$$

следовательно граничные условия регулярны по второму пункту определения Биркгофа [1, с. 73].

в) $\Delta_{14}=0$ и $\Delta_{32}\neq 0;$

В этом случае граничные условия принимают вид

$$\begin{cases}\Delta_{13}y(0)+\Delta_{23}y'(0)+\Delta_{43}y'(1)=0,\\ \Delta_{21}y(0)+\Delta_{23}y(1)+\Delta_{24}y'(1)=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_{13}y(0)+\Delta_{23}y'(0)=0,\\ \Delta_{23}y(1)=0\end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}\Delta_{13} & \Delta_{23} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta_{23} & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24}=0$ и $a_{12}=\Delta_{23}\neq 0$, то пункты 1) и 3) определения Биркгофа [1,с.73], не выполняются, поэтому проверим 2) пункта.

$$|a_{12}|+|a_{14}|=|a_{23}|+0=|a_{23}|>0,$$

$$a_{14}\times a_{21}+a_{12}\times a_{23}=0\times 0+\Delta_{23}\times\Delta_{23}=\Delta_{23}^2\neq 0,$$

следовательно граничные условия регулярны по Биркгофу по второму пункту определения Биркгофа. Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Если имеет место соотношения

$$\Delta_{24}=0;$$

$$|\Delta_{12}|+|\Delta_{34}|\neq 0,$$

$$\Delta_{14}+\Delta_{32}\neq 0$$

то граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу.

Доказательство.

Из 2) условия леммы следует, что возможны два случая, либо $\Delta_{12}\neq 0$, либо $\Delta_{34}\neq 0$.

Если $\Delta_{12}\neq 0$, то граничные условия (2.2) принимают вид

$$\begin{cases}\Delta_{12}\times y(0)+\Delta_{32}y(1)+\Delta_{42}y'(1)=0,\\ \Delta_{12}y'(0)+\Delta_{13}y(1)+\Delta_{14}y'(1)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\Delta_{12}y'0+\Delta_{13}y(1)+\Delta_{14}y'(1)=0,\\ \Delta_{12}y(0)+\Delta_{32}y(1)=0.\end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14}\\ \Delta_{12} & 0 & \Delta_{32} & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24}=0$ и $a_{12}=\Delta_{12}\neq 0$, то 1) и 3) случай регулярности по Биркгофу не выполняются, поэтому проверим 2) случая.

$$|a_{12}|+|a_{14}|=|\Delta_{12}|+|\Delta_{14}|>0,$$

$$a_{14}\times a_{21}+a_{12}\times a_{23}=\Delta_{14}\times\Delta_{12}+\Delta_{12}\times\Delta_{32}=\Delta_{12}(\Delta_{14}+\Delta_{32})\neq 0$$

следовательно ,в этом случае граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу.

Если $\Delta_{34}\neq 0$, то граничные условия (2.2) принимают вид

$$\begin{cases}\Delta_{31}y(0)+\Delta_{32}y'(0)+\Delta_{34}y'(1)=0,\\ \Delta_{34}y(0)+\Delta_{24}y'(0)+\Delta_{34}y(1)=0;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\Delta_{31}y(0)+\Delta_{32}\times y'(0)+\Delta_{34}y'(1)=0,\\ \qquad \Delta_{14}y(0)+\Delta_{34}y(1)=0;\end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}\Delta_{31} & \Delta_{32} & 0 & \Delta_{34}\\ \Delta_{14} & 0 & \Delta_{34} & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24}=0$ и $a_{14}=\Delta_{34}\neq 0,$ то 1) и 3) пункты регулярности по Биркгофу не выполняются, поэтому проверим 2) случая.

$$|a_{12}|+|a_{14}|=|\Delta_{32}|+|\Delta_{34}|>0,$$

$$a_{14}\times a_{21}+a_{12}\times a_{23}=\Delta_{34}\times\Delta_{14}+\Delta_{32}\times\Delta_{34}=\Delta_{34}(\Delta_{14}+\Delta_{32})\neq 0;$$

следовательно граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу по 2) пункту определения Биркгофа .

Теорема 2.1. Оператор Штурма-Лиувилля $(2.1)-(2.2)$ является иррегулярным тогда и только тогда, когда имеет место следующие условия:

$\Delta_{24}=0;$ 2) $|\Delta_{12}|+|\Delta_{34}|\neq 0;$ 3) $\Delta_{14}+\Delta_{32}=0.$

Доказательство

а) Необходимость

Предположим, что граничные условия (2.2) иррегулярны по Биркгофу, тогда $\Delta_{24}=0$,иначе они окажутся регулярными по Биркгофу по первому пункту регулярности. Если $\Delta_{24}=0$ и $|\Delta_{12}|+|\Delta_{34}|=0$, то граничные условия (2.2) регулярны, в силу доказанной леммы 2.1. ,поэтому $|\Delta_{12}|+|\Delta_{34}|\neq 0$. Если имеет место соотношения $\Delta_{24}=0, |\Delta_{12}|+|\Delta_{34}|\neq 0$ и $\Delta_{14}+\Delta_{32}\neq 0$, то граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу по утверждению леммы 2.2, поэтому $\Delta_{14}+\Delta_{32}=0$.

б) Достаточность.

Из условия 2) следует, что либо $\Delta_{12}\neq 0$,либо $\Delta_{34}\neq 0$.

Если $\Delta_{12}\neq 0$, то граничные условия (2.2) принимают следующий вид

$$\begin{cases}\Delta_{12}\times y'(0)+\Delta_{13}y(1)+\Delta_{14}y'(1)=0,\\ \qquad \Delta_{12}y(0)+\Delta_{32}y(1)=0;\end{cases}$$

Этому грнаничному условию соответствует граничная матрица

$$\begin{pmatrix}0 & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14}\\ \Delta_{12} & 0 & \Delta_{32} & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $,\Delta_{24}=0$ и $|\Delta_{12}|+|\Delta_{14}|>0$,то 1) и 3) пункты условий Биргофа не выполняются, остается проверка второго условия:

$$\Delta_{24}=0,\qquad |\Delta_{12}|+|\Delta_{14}|>0,\qquad a_{14}\times a_{21}+a_{12}\times a_{23}=$$
$$=\Delta_{14}\times\Delta_{12}+\Delta_{12}\times\Delta_{32}=\Delta_{12}(\Delta_{14}+\Delta_{32})=0.$$

Следовательно, второе условие Биркгофа также не выполняется, поэтому граничные условия (2.2) иррегулярны.

Если $\Delta_{34} \neq 0,$ то матрица граничных условий имеет вид
$$\begin{pmatrix} \Delta_{31} & \Delta_{32} & 0 & \Delta_{34} \\ \Delta_{14} & 0 & \Delta_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\Delta_{24} = 0$ и $|\Delta_{32}| + |\Delta_{34}| > 0$, поэтому 1) и 3) пункты условий Биркгофа не выполняется, поэтому проверим второго условия:
$$a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = \Delta_{34}\Delta_{14} + \Delta_{32}\Delta_{34} = \Delta_{34}(\Delta_{14} + \Delta_{32}) = 0, \quad (2.2)$$
т.е. второе условие Биркгофа также не выполняется, следовательно граничные условие иррегулярны.

ЛИТЕРАТУРА

1 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 529 с.
2 Марченко В.А: Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Науква думка, 1977. – 329 с.
3 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспогнент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
4 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

REFERENCES

1 Naimark M.A. Lineinye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 (in Russ.).
2 Marchenko V.A. Operatory Sturma-Liuvillya I ih prilozhenya. Kiev: Nauka dumka, 1977. 332 (in Russ.).
3 Leont'ev A.Ph. Celye funkcii. Ryady exponent. M.: Nauka, 1983. 17 (in Russ.).
4 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O structure spectra kraevoi zadachi Shturma-Liuvillya na konechnom otrezke vremeni. Izvestya AN RK. Serya phis.-math. 2000. № 3. 29-34(in Russ.).

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан)

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ҮЗІЛДІ-КЕСІЛДІ БЕЛГІСІ

Бұл еңбекте тұрлаусыз Штурм-Лиувилл операторының үзілді-кесілді белгісі табылды.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Summary

A. Sh. Shaldanbaev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan)

THE CRITERION OF REGULYARNOSTI OPERATOR OF STURM – LIOUVILLE

In this work is the heading no regular Sturm-Liouville operator ,expressed in terms boundary matrix presenting. This symptom is different, from the well-known, its practicality.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay, own functions, attached functions.

Поступила 05.05.2014 г.