УДК 517.9.92.942

Б. К. ТЕМИРОВ

(Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан)

ПРИЗНАК ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ *m*-ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКОВ

Аннотация. В статье установлены достаточные условия осцилляции решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом. Такие уравнения широко применяются в науке и технике при описании реальных процессов систем, в частности, электрических, механических, биологических, демографических, экономических и других. А также для решения некоторых теоретических вопросов с применением ЭВМ для приближенного решения различных задач математической физики.

Ключевые слова: осцилляция, нелинейный интегральный член, неравенство Иенсена.

Тірек сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

В этапе научно технического прогресса, стало бурно развиваться импульсная техника и технология, экономика, автоматики и автоматического управления привело к интенсивному, обширному использованию импульсных систем. Эта система, которая описываются разностными уравнениями. Поэтому актуальными становится качественное исследование решений, особенности их колеблености, линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m-произвольного нечетного порядков, так как конечно-разностные методы являются универсальными методами при реализации на персональных компьютерах.

Рассмотрим уравнение в виде

$$L_m[U(n,x)] + A_1(n,x)U(n,x) + \int_Q K(n,x,y)U(n,x,y)dy = 0\,. \tag{1}$$

Введем обозначения: 1) Q⊂R^P – открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q$; 2) n – натуральное число; 3) $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in Q$; 4) $A_1(n,x)$ – непрерывная функция по $x \in \overline{Q} = Q \times \Gamma$ для каждого фиксированного натурального числа n; 5) $\Delta U(n,x) = U(n+1,x) - U(n,x)$;

$$L_1[U(n,x)] = \Delta U(n,x) \qquad W_1(n) = P_1(n) L_1[U(n,x)]$$
$$L_2[U(n,x)] = \Delta W_1(n) \qquad W_2(n) = P_2(n) L_2[U(n,x)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_m[U(n,x)] = \Delta W_{m-1}(n)$$

В уравнении (1) $L_m[U(n,x)]$ рассматривается когда $P_{m-1}(n) = 1 > 0 \quad \forall n \ge n_0$ заданные функции. Будем исходит из следующих определений [1].

Определение 1. Всякую функцию *U*(*n*,*x*) определенную в области $\overline{D}_0 = \{n \ge n_0, x \in \overline{Q}\}$, называют правильной.

Определение 2. Правильную функцию *U*(*n*,*x*), будем называть неотрицательной {не положительной}, если $\exists n_1 \ge n_0$ такое, что $\forall (n,x) \in D_1$, $U(n,x) \ge D$, $V(n) = \int_Q U(n,x)dx > 0$ $U(n,x) \le 0$,

$V(n) = \int_Q U(n,x)dx < 0$.

Определение 3. Правильную функцию $U(n,x)$ называют положительной {отрицательной}, если $\exists n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall (n,x) \in D_1 = \{n \geq n_1, x \in Q\}$ $U(n,x) > 0$ $\{U(n,x) < 0\}$.

Определение 4. Правильную функцию $U(n,x)$ называют с-неосциллирующей, если она либо положительна, либо неотрицательна. В противном случае ее называют с-осциллирующей.

Лемма 1. Пусть 1) $\sum^{\infty} a(s) = \infty$; 2) m – четное число; 3) $\varphi(z)$ – непрерывная функция $\forall z > 0$.

Тогда неравенство

$$L_m[V(n)] + a(n)\varphi[V(n)] \leq 0 \tag{2}$$

не имеет положительного решения $y(n) = |V(n)|$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (2) имеет положительное решение, $V(n)$ $\forall n \geq n_1$. Тогда $\Delta W_m(n) \leq 0$. Следовательно $W_m(n)$ – невозрастающая функция. Здесь логически возможны только следующие допущения:

1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W(n_2) = c < 0$;

2) либо $W_m(n) \geq 0$ $\forall n \geq n_1$.

Рассмотрим первый случай. Докажем, что это предположение противоречит неравенству $V(n) > 0$ $\forall n \geq n_1$. Как нам известно, что имеет неравенство

$$W_m(n) = P_m \Delta W_{m-1}(n) \leq c < 0 \;\; \forall n \geq n_1.$$

Следовательно

$$W_{m-1}(n) \leq W_{m-1}(n_2) + c\sum_{S=n_2}^{n-1} q_m(s) \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\exists c_1 < 0, \exists n_3 \geq n_2$ также, что

$$W_{m-1}(n) \leq c_1 < 0 \;\; \forall n \geq n_3.$$

Продолжая аналогично, такие же рассуждения получим, что $\exists c_0 < 0$, $\exists n^1 \geq n^0$ такие, что

$$W_2(n) \leq C_0 < 0 \;\; \forall n \geq n^1$$

$$P_2(n)\Delta V(n) \leq C_0 < 0 \;\; \forall n \geq n^1$$

$$\Delta V(n) \leq C_0 q_2(n)$$

Далее, суммируя это неравенство от n^1 до $n - 1$, получим

$$V(n) \leq V(n^1) + C_0 \sum_{m=n^1}^{n-1} q_2(m) \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Последнее соотношение противоречит неравенству $V(n) > 0$ $\forall n \geq n_1$. Следовательно, первое предположение несостоятельны. Рассмотрим, теперь второй случай

$$W_m(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \geq 0 \;\; \forall n \geq n_1.$$

$W_{m-1}(n)$ – неубывающая функция $\forall n \geq n_1$. В этом случае логически возможны только следующее предположения:

1) Либо $\exists n_0 \geq n_1$ такое, что $W_{m-1}(n) \geq C_0 > 0$.

2) Либо $W_{m-1}(n) \leq 0$ $\forall n \geq n_1$.

Рассмотрим первый случай $W_{m-1}(n) = P_{m-2}(n)\Delta W_{m-2}(n_2) = C > 0$. $\forall n \geq n_2$,

$$W_{m-2}(n) \geq W_{m-2}(n_2) + C\sum_{S=n_2}^{n-1} q_{m-1}(s) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $\exists C > 0$, $\exists n_3 > n_2$ такие, что $W_{m-2}(n) \geq C_1 \quad \forall n \geq n_2$. Продолжая такие же рассуждения, получим, что $\exists C_0 > 0$, $\exists n^0 \geq n_0$ такие, что $W_2(n) = P_2(n)\Delta V(n) \geq C_0$.

Тогда $V(n) \geq V(n^0) = \gamma$. С учетом этого неравенства из (2) имеем

$$\Delta W_m(n) + a(n)\beta \leq 0 \quad \forall n \geq n^0, \ \beta = \varphi(\gamma).$$

Учитывая неравенство, $W_m(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_2$ получим, что последнее неравенство противоречит условию 1) леммы. Поэтому, предположение 1) противоречит условиям леммы. Следовательно, верно предположение 2) что $W_{m-1}(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1 \quad W_{m-1}(n) = P_{m-1}(n)\Delta W_{m-2}(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1$.

$W_{m-2}(n)$ – невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. Логически возможны только следующие предположения: 1)либо $\exists n_2 \geq n_1$, такое, что $W_{m-2}(n_2) = C < 0 \quad \forall n \geq n_2$; 2) либо $W_{m-2}(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$.

Первое предположение противоречит неравенству, что $V(n) > 0 \quad \forall n \geq n_1$. Следовательно, $W_{m-2}(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$. Аналогично, рассуждая получим, что $W_2(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$. Отсюда вытекает, что $V(n) \geq V(n_1) \equiv C_0 > 0$. С учетом этого неравенства из неравенства (2) имеем $\Delta W_m(n) + Ca(n) \leq 0 \ \ C = \varphi(C_0) \ \ \forall n \geq n_1$.

Суммируя это неравенство от n_1 до $n - 1$, получим

$$W_m(n) + C\sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1) \quad \forall n \geq n_1.$$

Так как $W_m(n) > 0$, то усиливая неравенство получим

$$C\sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1)$$

которое противоречит условию 1) леммы.

Замечание 1. Если выполнены условия 2), 3) леммы 1, а условия не выполнены, то неравенство (2) может иметь положительное решение.

Пример 1. Пусть $P_2(n) = P_3(n) = \ldots = P_{m-1}(n) = n + \sqrt{n(n+1)}$.

$$P_m(n) = 1; \ a(n) = \frac{2}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n}}$$

Тогда неравенство (2) имеет положительное решение $V(n) = \sqrt{n}$. Очевидно, что $a(n) \leq \dfrac{1}{4n^2}$;

$\sum^{\infty} a(m) < \infty$.

Замечание 2. Если 1) выполнены условия 1), 3) леммы 1; 2) m – нечетное число, то неравенство (2) может иметь положительное решение.

Лемма 2. Если 1) $\sum^{\infty} a(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ непрерывная неубывающая функция $\forall z > 0$; 3) m – нечетное число, то для положительного решения $V(n)$ неравенства (2) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} V(n) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (2) имеет положительное решение $V(n) > 0$ $\forall n \geq n_1$. Далее будем рассуждать почти также, как и при доказательстве леммы 1 и показывается, что $\forall n \geq n_1 \ \ W_m(n) \geq 0$, $W_2(n) \leq 0$. Отсюда вытекает, что

1) $V(n)$ – невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. 2) $\exists \lim_{n\to\infty} V(n) = C > 0$.

Допустим, что $C \neq 0$. Тогда $\forall n \geq n_1$, $\varphi[V(n)] \geq \varphi(C) \equiv C_0 > 0$. С учетом этого неравенства, из неравенство (2) имеем

$$\Delta W_m(n) + C_0 a(n) \leq 0 \;\; \forall n \geq n_1 .$$

Так как $W_m(n) \geq 0 \;\; \forall n \geq n_1$, то это неравенство противоречит условию 1) леммы 2. Следовательно, предположение $C \neq 0$ приводит к противоречию. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} V(n) = 0$. Скажем, что выполнено: 1) условие (E_0), если $\forall (n, x, y) \in D_0 = \{n \geq n_0, x \in \overline{Q}, y \in \overline{Q}\}$ $A_1(n,x) \geq a_1(n) \geq 0$, $K(n,x,y) \geq 0$; 2) условие (E_1), если $\forall (n,x,y) \in D_0^0$ $K(n,x,y) \geq \alpha(n,x)\Phi(y) \geq 0$, $\int\limits_Q \alpha(n,x)dx \geq a_2(n) \geq 0$ и $A_1(n,x) \geq a_1(n) \geq 0$.

Теорема. Пусть 1) выполнено условие (E_1); 2) $\sum^{\infty} a(s) = \infty$; 3) m-нечетное число. Тогда каждое решение $y(n)$ уравнения (1), либо осциллирует, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Пусть $y(n) = 0 \;\; \forall n \geq n_1$ положительное решение уравнения (1). Тогда имеет место неравенство.

$$L_m[y(n)] + a(n)y(n) \leq 0 \;\; \forall n \geq n_1 . \qquad (3)$$

Отсюда по лемме 2 вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = 0$. Пусть теперь $U(n,x)$ – неположительное решение уравнения (1). Тогда $Z(n,x) = -U(n,x)$ – неотрицательное решение этого уравнения. Поэтому неравенство (3) имеет положительное решение.

$$y(n) = \int\limits_Q Z(n,x)\Phi(x)dx = -V(n)$$

Отсюда по лемме 2 имеем $0 = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) = -\lim\limits_{n\to\infty} V(n)$.

Примечание 1. Если выполнены условия теоремы 1, то уравнение (1) может иметь не осциллирующее решение.

Пример 2. Пусть 1) $a(n) = \dfrac{1}{n+1}$; 2) $P_k(n) \equiv n+1$, $k = \overline{3,m}$.

Тогда $y(n) = \dfrac{1}{n}$ – решение уравнения (1).

Примечания 2. Если 1) выполнено условия a) $\varphi(z) > 0$ – непрерывная неубывающая функция $\forall z > 0$; b) $a(n) \geq 0$. 2)m-нечетное число > 1;

3) $\sum^{\infty} a(s) < \infty$, то уравнение (1) может иметь неосциллирующее решение $y(n)$ для которого $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) \neq 0$.

Пример 3. 1) $a(n) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$; 2) $P_k(n) \equiv n+1$;

Тогда $V(n) = \dfrac{n+1}{n}$ – решение уравнения (1) и $\lim\limits_{n\to\infty} V(n) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. – Фрунзе: Илим, 1985.

2 Быков Я.В., Мерзякова Г.Д., Шевцов Е.И. Об осцилляторности решений нелинейных разностных уравнений. – Дифференц. уравнения.
3 Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного порядков. – Фрунзе: ИЛИМ, 1990.
4 Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка // Труды межд. конф. «Программные системы: теория и приложения» институт программных систем РАН г. Переславль-Залесский, 2006. – С. 379-387.
5 Темиров Б.К. Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом // Материалы междунар. научной конфер., посвящ. 75-летию акад. НАН РК Абдильдина Мейрхана Мубараковича «Актуальные проблемы современной физики». – Алматы, 2013. – С. 42-45.

REFERENCES

1 Bykov Ja.V. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami pervogo porjadka. Frunze: Ilim, 1985.
2 Bykov Ja.V., Merzjakova G.D., Shevcov E.I. Ob oscilljatornosti reshenij nelinejnyh raznostnyh uravnenij. Differenc. uravnenija.
3 Bykov Ja.V., Temirov B.K. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami vtorogo, chetvertogo i proizvol'nogo porjadkov. Frunze: ILIM, 1990.
4 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij nelinejnogo integro-raznostnogo uravnenija s konechnymi raznostjami tret'ego porjadka. Trudy mezhd. konf. «Programmnye sistemy: teorija i prilozhenija» institut programmnyh sistem RAN g. Pereslavl'-Zalesskij, 2006. S. 379-387.
5 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij integro-differencial'no-raznostnogo uravnenija s konechnymi raznostjami pjatogo porjadka s nelinejnym integral'nym chlenom. Materialy mezhdunar. nauchnoj konfer., posvjashh. 75-letiju akad. NAN RK Abdil'dina Mejrhana Mubarakovicha «Aktual'nye problemy sovremennoj fiziki». Almaty, 2013. – S. 42-45.

Резюме

Б. К. Темиров

(Ж. Баласағын атындағы Қырғыз ұлттық университеті, Бішкек, Қырғызстан)

ШЕТКІ АЙЫРЫМЫ БАР *m*-ТУЫНДЫ ТАҚ ТҮРЛЕРІНІҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРАЛДЫ-АЙЫРЫМ ТЕҢДЕУІ ШЕШІМІНІҢ ОСЦИЛЛЯЦИЯ БЕЛГІСІ

Бесінші ретті шеткі айырымы бар операторлық-айырым теңдеуінің сызықты емес интеграл мүшесімен осцилляция шешімінің жеткілікті жағдайы анықталған. Мұндай теңдеулер ғылым мен техникада жүйенің нақты процестерін сипаттағанда кеңінен қолданылады, атап айтқанда, электрлік, механикалық, биологиялық, демографиялық, экономикалық және тағы басқаларында. Сондай-ақ математикалық физиканың әртүрлі есептерінің жуықтау шешімін табу үшін ЭЕМ пайдалана отырып кейбір теориялық мәселелерді шешу үшін де қолданылады.
Тірек сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшелер, Иенсен теңсіздігі.

Summary

B. K. Temirov

(Kyrgyz national university named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan)

SIGN OF OSCILLATIONS OF THE SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FINITE DIFFERENCES ARBITRARY M-ODD ORDER

In this paper we establish a sufficient condition for the oscillation of solutions of nonlinear integro-differential-difference equation with finite differences m-arbitrary odd order elliptic operator.
Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

Поступила 05.05.2014 г.