УДК 517.9.92.942

Б. К. ТЕМИРОВ

(Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан)

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ *m*-ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКОВ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Аннотация. С бурным развитием импульсной техники и технологии, стали интенсивно использовать импульсные системы в различных отраслях экономики, автоматики и автоматического управления. Такие системы обычно описываются разностными уравнениями. В статье установлены достаточные условия осцилляции решений линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m-произвольного нечетного порядков.

Ключевые слова: осцилляция, нелинейный интегральный член, неравенство Иенсена.
Тірек сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.
Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

В данной статье устанавливается достаточное условие осцилляции решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями m-произвольного нечетного порядков с эллиптическим оператором вида

$$L_m[u(n,x)] + a(n)\sum_{i,r=1}^{m} A_{i,k}(x)\frac{\partial^2 u(n,x)}{\partial x_i \partial x_k} + A_i(n,x)U(n,x) + \int_Q K(n,x,y)U(n,x)dy + f\{n, xU(n,x)\} = 0, \qquad (1)$$

где m – произвольное нечетное число.

Введем обозначения:

$$L_1[U(n.x)] = \Delta U(n,x) = U(n+1,x) - U(n,x) \qquad W_2(n) = P_{2(n)} L_1[U(n,x)]$$

$$L_2[U(n,x)] = \Delta W_{2(n)} \qquad W_3(n) = P_{3(n)} L_2[U(n,x)]$$

…………………………………………………………………………..

$$L_m[U(n,x)] = \Delta W_{m-1}(n).$$

В уравнении (1) $L_m[U(n,x)]$ рассмотрена когда $P_{m-1}(n) = 1 > 0 \ \forall n \ge n_0$ как заданные функции. В дальнейшем будем исходить из определений данной в работе [1].

Определение 1. Всякую функцию $U(n,x)$, определенную в области $\overline{D_0} = \{n \ge n_0, x \in \vec{Q}\}$ называют правильной.

Определение 2. Правильную функцию $U(n,x)$ называют положительной {отрицательной}, если $\exists n_1 \ge n_0$ такое, что $\forall (n,x) \in D_1 = \{n \ge n_1, x \in Q\}$ $U(n,x) > 0 \{U(n,x) < 0\}$.

Определение 3. Правильную функцию $U(n,x)$ называют С-неосциллирующей, если она либо не положительна, либо не отрицательно. В противном случае ее называют

С-осциллирующей.

Предполагается: 1) QcR^p – открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q$; 2) n-натуральное число; 3) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in Q$; 4) A_1 (n, x) - непрерывные функции по $x \in Q$ для каждого фиксированного натурального числа $n \ge n_0$; 5) a(n) – заданная функция натурального аргумента. 6) $L^0{}_0 = \sum_{i,k=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ – эллиптический оператор и предполагается, что а)

для любого набора вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. $\sum_{i,j=1}^{p} A_{ij}(x)\xi_i, \xi_k \ge \mu \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2, \mu > 0, j = \overline{1,p}.$

б) $A_{ik}(x) = A_{ki}(x)$ - достаточно гладкие функции (т.е. достаточно предполагать, чтобы эти функции имели частные производные второго порядка, удовлетворяющие в замкнутой области $\overline{Q}$ некоторому условию Гельдера).

7) $\forall (n,x) \in D_0 = \{n \ge n_0, x \in Q\}$ и $\forall z > 0$ $f(n,x,z) \ge 0$, $f(n,x,-z) \ge 0$

Осцилляция решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями различного порядка исследованы: 1-го порядка в [1], 2-го, 4-го и произвольного четного порядков в [3] и 3-го, 5-го порядков в [5, 6]. с эллиптическими операторами. Известно [4], что все собственные значения краевой задачи $L^0{}_0 Y(x) + \lambda_0 Y(x) = 0$, $Y(x)\big|_\tau = 0$ (2) положительны, наименьшему собственному значению λ_0 соответствует единственная нормированная собственная функция $\phi(x) > 0, \forall x > Q$ (Нормированная в смысле $\int_Q \phi(x)dx = 1$. Если область $Q = \{a_k < x_k < b_k, k = \overline{(1,p)}\}$ - параллелепипед, то

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^{p} \frac{\pi^2}{(b_k - a_k)^2}; \phi(x) = \ell \prod_{k=1}^{p} \sin \frac{\pi(x_k - a_k)}{b_k - a_k}$$

Если Q – выпуклая область, то $\lambda_0 \ge \frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{\rho} - \frac{p-1}{d})$, где ρ – радиус наибольшего шара, вписанного в область Q. d – диаметр область Q: p – размерность область Q. Приведем следствие формулы Грина.

Следствие 1. Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(n,x) \in (N)$ (Символ $U(n,x) \in (N)$ означает, что $U(n,x)\big|_\tau = 0$ $\forall n \ge n_0$) выполняется

$$\int_Q \phi(x) L^0{}_0 U(n,x)dx = -\lambda_0 \int_Q \phi(x) U(n,x)dx \;\; \forall n \ge n_0$$

Следствие 2. Для всякой не отрицательной дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(n,x)$

$$\int_Q \phi(x) L^0{}_0 U(n,x)dx \ge -\lambda_0 \int_Q \phi(x) U(n,x)dx \;\; \forall n \ge n_1$$

Теорема Иенсена. Пусть 1) f(z) – непрерывная выпуклая на (0, ∞) функция (дважды дифференцируемая на (0,∞)), функция f(x) является выпуклой на этом интервале тогда и только тогда, когда 1) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$; 2) $\Phi(x)$ непрерывная положительная функция, непрерывная по переменным группы x. Тогда имеет место неравенство

$$\int_Q \phi(x) f[U(n,x)]dx \geq f\{\int_Q \phi(x) U(n,x) dx\}$$

Это соотношение называют неравенство Иенсена. Доказательство теоремы приведены в работе [2].

Лемма 1. Пусть 1) $\sum^{\infty} a(s) = \infty$, 2) $\varphi(z)$ – неубывающая функция $\forall z \geq 0$

3) m – частное число. Тогда неравенство

$$L_m[\sigma(n)] + a(n)\varphi[\sigma(n)] \leq 0 \tag{3}$$

не имеет положительного решения. $y(n) = |\sigma(n)|$.

Доказательство. Допустим, что неравенство (3) имеет положительное решение, $\sigma(n), \forall n \geq n_1$ Тогда $\Delta W_m(n) \leq 0$, поэтому $W_m(n)$ – незрастающая функция. Следовательно, логически возможны только следующие допущения: 1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W_m(n_2) = c < 0$; 2) либо $W_m(n) \geq 0\ \forall n \geq n_1$. Рассмотрим первый случай. Докажем, что это предположение противоречит неравенству $\sigma(n) > 0\ \forall n \geq n_1$ Отсюда

$$W_{m-1}(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \leq c < 0\ \forall n \geq n_1$$

$$W_{m-1}(n) \leq W_{m-1}(n_2) + c\sum_{S=n_2}^{n-1} q_m(S) \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\exists c_1 < 0, \exists n_3 \geq n_2$ такие, что $W_{m-1}(n) \leq c_1 < 0\ \forall n \geq n_3$. Продолжая рассуждать аналогично почти также получил, что $\exists c_0 < 0, \exists n^1 \geq n^0$ также, что

$$W_2(n) \leq c_0 < 0\ \forall n \geq n^1$$

$$P_2(n)\Delta\sigma(n) \leq c_0 < 0\ \forall n \geq n^1$$

$$\Delta\sigma(n) \leq c_0 q_2(n)$$

Далее суммируя это неравенство от n^1 до n – 1, получи $\sigma(n) \leq \sigma(n^1) + c_0 \sum_{S=n^1}^{n-1} q_2(S) \to -\infty$ при $n \to \infty$. Это соотношение противоречить неравенству $\sigma(n) > 0\ \forall n \geq n_3$.

Поэтому, первое предположение несостоятельны. Рассмотрим, второй случай

$$W_m(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \geq 0\ \forall n \geq n_1$$

$W_{m-1}(n)$ – неубывающая функция $\forall n \geq n_1$. Тогда логически возможны только следующие допущения:

1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W_{m-1}(n_2) = c > 0$

2) либо $W_{m-1}(n) \leq 0\ \forall n \geq n_1$

Рассмотрим первый случай либо $W_{m-1}(n) = P_{m-2}(n)\Delta W_{m-2}(n) = c \geq 0\ \forall n \geq n_1$

$$W_{m-2}(n) \geq W_{m-2}(n_2) + c \sum_{S=n_2}^{n-1} q_{m-1}(S) \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $\exists c > 0, \exists n_3 > n_2$ такие, что $W_{m-2}(n) \geq c_1\ \forall n \geq n_2$. Продолжая такие же рассуждения, получим, что $\exists c_0 > 0, \exists n^0 \geq n_0$ такие, что $W_2(n) = P_2(n)\Delta\sigma(n) \geq c_0$ Тогда $\sigma(n) \geq \sigma(n^0) = \gamma$. С учетом этого неравенства из (3) имеем $W_m(n) + a(n)\beta \leq 0\ \forall n \geq n^0, \beta\varphi(\gamma)$.

Учитывая следующее неравенство $W_m(n) \geq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$ получим, что последнее неравенство противоречит условию η леммы, поэтому, верно предположение

1) противоречит условиям леммы. Поэтому, верно предположение

2) что $W_{m-2}(n) \leq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$

$$W_{m-1}(n) = P_{m-1}(n)\Delta W_{m-2}(n) \leq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1 .$$

$W_{m-2}(n)$ – невозрастающая функция $\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Логически возможны только следующие предположения: 1) либо $\exists \mathrm{n}_2 \geq \mathrm{n}_1$ такое, что $W_{m-2}(n) = c \leq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$

2) либо $W_{m-2}(n) \geq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Первое предположение противоречит неравенству, что $\sigma(\mathrm{n}) > 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Следовательно, $W_{m-2}(n) \geq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Производя аналогичные рассуждения получим, что $W_2(n) \geq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Отсюда вытекает, что $\sigma(n) \geq \sigma(n_1) \equiv c_0 > 0$. С учетом этого неравенства из неравенств (2) имеем $\Delta W_m(n) + ca(n) \leq 0$ c=? $\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$

Суммируя неравенство от n_1 до n – 1 получим $W_m(n) + c\sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1)\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Так как $W_m(n) > 0$ то усиливая неравинство получим $c\sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1)$. Которое противоречит условию 1) леммы.

Замечание 1. Если выполнены условия 2), 3) леммы 1, а условия 1) не выполнены, то неравенство (3) может иметь положительное решение.

Замечание 2. Если 1) выполнены условия 1), 3) леммы 1; 2) m-нечетное число, то неравенство (3) может иметь положительное решение.

Лемма 2. Если 1) $\sum^{\infty} a(m) = \infty; 2)\varphi(z) > 0$ непрерывная неубывающая функция $\forall z > 0$;

3) m – нечетное число, то для положительного решения $\sigma(\mathrm{n})$ неравенства (3) имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} \sigma(\mathrm{n}) = 0$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (3) имеет положительное решение $\sigma(\mathrm{n}) > 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Рассуждая почти также, как и при доказательстве леммы 1, показывается, что $\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$, $W_m(n) \geq 0$ 1) $\sigma(\mathrm{n})$ невозрастающая функция $\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$ 2) $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma(\mathrm{n}) = \mathrm{c} > 0$. Допустим, что c≠0. Тогда $\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1\ \varphi[\sigma(n)] \geq \varphi(c) \equiv c_0 > 0$ С учетом этого, из неравенства (3) имеем $\Delta W_m(n) + c_0 a(n) \leq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$. Так как $W_m(n) \geq 0\ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1$ то это неравенство противоречит условию 1) леммы 2. Следовательно, предположение c≠0 приводит к противоречию. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \sigma(\mathrm{n}) = 0$. Скажем, что выполнено 1) условие (E_1) если

$$\forall (n,x,y) \in D^0{}_0 = \{n \geq n_0, x \in \overline{Q}, y \in \overline{Q}\}. A_1(n,x) \geq a_1(n) \geq 0, K(n,x,y) \geq a(n,x)\phi \geq 0$$

$$\int_Q a(n,x)dx \geq a_2(n) \geq 0.$$

2) условие (T_1) если $\forall (\mathrm{n},\mathrm{x}) \in \overline{\mathrm{D}_0}$ и $\forall \mathrm{z} > 0$

$$f(n,x) \geq g_0(n)z, f(n,x,-z) \leq -g(n)z, g_0(n) \geq 0$$

3) условие (T_2) если $\forall (\mathrm{n},\mathrm{x}) \in \overline{\mathrm{D}_0}$ и $\forall \mathrm{z} > 0$

$$f(n,x,z) \geq g(n)\varphi(z); f(n,x,-z) \leq -g(n)\varphi(z), g_0(n) \geq 0, \varphi(z).$$

Теорема 1. Пусть 1) выполнены условия (E_1), (T_1); 2) $\sum^{\infty} g_0(n)n^{m-2}\infty$, тогда каждое решение $U(n,x)\in(N)$ уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$.

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет с-неосциллирующее решение $U(n,x)\in(N)$. Тогда неравенство $\Delta^m y(n)+g_0(n)\ y(n)\le 0$ имеет положительное решение $y(n)=|\sigma(n),|$ что противоречит теореме 1 из [6] и леммы 2. Следовательно, предположение существования С-неосциллирующего решения $U(n,x)\in(N)$ уравнения (1) приводят к противоречию. Поэтому либо решение С-осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$.

Теорема 2. Пусть 1) выполнены условия (E_1), (T_2);

2) $[(z)]\ge C_0=const>0, \forall z>0;3)\sum^{\infty} g(m)=\infty$. Тогда каждое решение $U(n,x)\in(N)$ уравнения (1) либо с-осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет с-неосциллирующее решение $U(n,x)\in(N)$. Тогда неравенство $\Delta^m y(n)+c_0(n)\le 0$ имеет положительное решение y(n).

Это утверждение противоречит условию 3) теоремы 2. Следовательно, предположение существования с- не осциллирующего решения $U(n,x)\in(N)$ уравнения (1) приводит к противоречию, поэтому решение либо с-осциллирует , либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$.

Теорема 3. Пусть а) выполнены все условия теоремы 2) a(n)≥0 $\forall n\ge n_0$ Тогда все правильные решения U(n,x) уравнения (1) либо с-осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$.

Теорема 4. Пусть 1) выполнены условия (E_1), (T_1); 2) φ(z) – возрастающая непрерывная выпуклая на (0,∞) функция; 3) $\sum^{\infty} g(S)=\infty$.. Тогда каждое решение $U(n,x)\in(N)$ уравнения (1) либо с-осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$. Доказательство приводится аналогично к доказательству теоремы 3.

Теорема 5. Если а) выполнены все условия теоремы 4. b) a(n)≥0 $\forall n\ge n_0$, то все решения U(n,x) уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n)=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. – Фрунзе: Илим, 1985. – 263 с.

2 Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного четного порядков. – Фрунзе: Илим, 1990. – 124 с.

3 Быков. Я.В., Мерзлякова Г.Д., Шевцов Е.И. Об осцилляторности решений нелинейных разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 2, № 8. – С. 1460-1473.

4 Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М: Высшая школа, 1977. – 413 с.

5 Шарифова Т. О колеблемости решений некоторых разностных уравнений // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 1974. – Вып. 23. – С. 35-43.

6 Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка // Труды межд. конференции «Программные системы: теория и приложения» института программных систем РАН г. Переелавль- Залесский. – 2006. – С. 379-387.

7 Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом // Материалы межд. науч. конфер., посвящ. 75-летию акад. НАН РК Абдильдина Мейрхана Мубараковича «Актуальные проблемы современной физики». – Алматы, 2013. – С. 42-45.

REFERENCES

1 Bykov Ja.V. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami pervogo porjadka. Frunze: Ilim, 1985. 263 s.
2 Bykov Ja.V., Temirov B.K. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami vtorogo, chetvertogo i proizvol'nogo chetnogo porjadkov. Frunze: Ilim, 1990. 124 s.
3 Bykov. Ja.V., Merzljakova G.D., Shevcov E.I. Ob oscilljatornosti reshenij nelinejnyh raznostnyh uravnenij. Differencial'nye uravnenija. 1975. T. 2, № 8. C. 1460-1473.
4 Mihlin S.G. Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh. M: Vysshaja shkola, 1977. 413 s.
5 Sharifova T. O koleblemosti reshenij nekotoryh raznostnyh uravnenij. Voprosy vychislitel'noj i prikladnoj matematiki. Tashkent, 1974. Vyp. 23. S. 35-43.
6 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij nelinejnogo integro-raznostnogo uravnenija s konechnymi raznostjami tret'ego porjadka. Trudy mezhd. konferencii «Programmnye sistemy: teorija i prilozhenija» instituta programmnyh sistem RAN g. Pereelavl'-Zalesskij. 2006. S. 379-387.
7 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami pjatogo porjadka s nelinejnym integral'nym chlenom. Materialy mezhd. nauch. konfer., posvjashh. 75-letiju akad. NAN RK Abdil'dina Mejrhana Mubarakovicha «Aktual'nye problemy sovremennoj fiziki». Almaty, 2013. S. 42-45.

Резюме

Б. К. Темиров

(Ж. Баласағын атындағы Қырғыз ұлттық университеті, Бішкек, Қырғызстан)

ШЕТКІ АЙЫРЫМЫ БАР m-ТУЫНДЫ ТАҚ ТҮРЛЕРІНІҢ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРЫМЕН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ-АЙЫРЫМ ТЕҢДЕУІ ОСЦИЛЛЯЦИЯ ШЕШІМІ

Импульстік техника мен технологиялардың қызу дамуына байланысты экономика, автоматика және автоматты басқарудың әртүрлі салаларында импульстік жүйе қарқынды пайдаланыла бастады. Мұндай жүйелер негізінде айырым және теңдеулер арқылы сипатталады. Берілген мақалада шеткі айырымы бар m-туынды тақ түрлерінің сызықты емес интегралды-айырым теңдеуінің осцилляция шешімінің жеткілікті жағдайы анықталды.

Тірек сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Summary

B. K. Temirov

(Kyrgyz national university named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan)

OSCILLATION OF THE SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENCE-INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH ELLIPTIC OPERATOR AND FINITE DIFFERENCES m-ARBITRARY ODD ORDER

With rapid development of pulse techniques and technologies have been intensively used pulse systems in various industries, automation and automatic control. Such systems are usually described by difference equations. In this paper sufficient conditions for the oscillation of solutions of linear integro-differential equations with finite differences of arbitrary m-odd orders.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

Поступила 05.05.2014 г.