УДК 517.927

Е. А. АКЖИГИТОВ[1], *Ж. М. КАДИРБАЕВА*[2]

([1]Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина, Астана, Казахстан,
[2]Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан)

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Методом параметризации получен критерий разрешимости линейной краевой задачи с интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Предложен алгоритм нахождения решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, интегральные условия, алгоритм.
Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, интегралдық шарт, алгоритм.
Keywords: differential equations, integral conditions, the algorithm.

Рассматривается краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(t)x(\theta_{i-1}) + f(t), \quad t \in (0,T), \ x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0)+Cx(T)+\int_0^T D(t)x(t)dt=d,\quad d\in R^n, \tag{2}$$

где матрицы $A_j(t), D(t)$, $j=\overline{0,m+1}$ размерности ($n\times n$) и n – вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B и C – постоянные матрицы размерности ($n\times n$), $0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_m<\theta_{m+1}=T$.

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_1=\max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

Непрерывная на $[0,T]$ функция $x(t)$, имеющая на $(0,T)$ непрерывную производную по t, называется решением краевой задачи (1), (2), если она удовлетворяет системе нагруженных дифференциальных уравнений (1) и интегральному краевому условию (2).

В последние годы интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений неуклонно возрастает и они находят многочисленные применения в задачах практики. Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1-4] и получены условия их разрешимости различными методами. В работах [3, 4] линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений решалась методом параметризации [5]. На его основе были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости указанной задачи. Численная реализация метода параметризации решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений предложена в [6].

Одним из важных классов краевых задач для дифференциальных уравнений являются задачи с интегральными условиями. Интегральные условия в частности возникают в тех случаях, когда, невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин, но известно их усредненное значение. Подобные ситуации имеют место при изучении явлений, происходящих в плазме, процессов распространения тепла, некоторых технологических процессов, процессов влагопереносав пористых средах, обратных задачах, а также в задачах математической биологии и демографии [7].

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости и построения решения линейной краевой задачи с интегральным условием (2) для систем нагруженных дифференциальных уравнений (1).

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации. Интервал $[0,T]$ разбиваем точками нагружения: $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{m}[\theta_{r-1},\theta_r)$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)=x(t)$ при $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$. Введем дополнительные параметры $\lambda_r=x_r(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$, и на каждом интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$ производим замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,m+1}$. Тогда исходная задача (1), (2) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=A_0(t)(u_r+\lambda_r)+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(t)\lambda_i+f(t), \tag{3}$$

$$u_r(\theta_{r-1})=0,\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}, \tag{4}$$

$$B\lambda_1+C\lambda_{m+1}+C\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t)+\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}D(t)[u_j(t)+\lambda_j]dt=d,\quad d\in R^n, \tag{5}$$

$$\lambda_p+\lim_{t\to\theta_p-0}u_p(t)=\lambda_{p+1},\quad p=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Задачи (1), (2) и (3) – (6) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2), тогда пара $(\lambda,u[t])$, где $\lambda=(x(\theta_0),x(\theta_1),\ldots,x(\theta_m))$, $u[t]=(x(t)-x(\theta_0),\,x(t)-x(\theta_1),\ldots,x(t)-x(\theta_m))$ является решением задачи (3)–(6). И наоборот, если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m+1})$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), ..., \widetilde{u}_{m+1}(t))$, является решением задачи (3) – (6), тогда функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{m+1} + \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{u}_{m+1}(t)$ является решением исходной задачи (1), (2).

Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные (4). При фиксированных значениях параметров $\lambda \in R^{n(m+1)}$ систему функций $u[t]$ можно определить решая задачи Коши (3), (4). Используя $X(t)$ – фундаментальную матрицу дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, решение задачи Коши (3), (4) запишем в виде

$$u_r(t) = X(t)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_r + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i + f(\tau)\right]d\tau,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\quad r = \overline{1, m+1}. \tag{7}$$

Переходя в правой части (7) к пределу при $t \to \theta_r - 0$, и подставив соответствующие им выражения в условия (5), (6), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров λ_r, $r = \overline{1, m+1}$:

$$\begin{gathered} B\lambda_1 + C\lambda_{m+1} + CX(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_{m+1} + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i\right]d\tau + \\ + \sum_{j=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t)\left\{X(t)\int\limits_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_j + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i\right]d\tau + \lambda_j\right\}dt = \\ = d - CX(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t)X(t)\int\limits_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\lambda_p + X(\theta_p)\int\limits_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_p + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i\right]d\tau - \lambda_{p+1} = -X(\theta_p)\int\limits_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\quad p = \overline{1, m}. \tag{9}$$

Матрицу соответствующей левой части системы уравнений (8), (9) обозначим через $Q(\theta)$и систему запишем в виде

$$Q(\theta)\lambda = -F(\theta),\quad \lambda \in R^{n(m+1)}, \tag{10}$$

где

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} -d + CX(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t)X(t)\int\limits_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt \\ X(\theta_1)\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X(\theta_m)\int\limits_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

Определение. Задача (1), (2) называется однозначно разрешимой, если для любой пары $(f(t), d)$, где $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$, она имеет единственное решение.

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. Для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы матрица $Q(\theta): R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ была обратимой.

Теорема 2. Задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $F(\theta)\in R^{n(m+1)}$, составленный из заданной пары $(f(t),d)$, $f(t)\in C([0,T],R^n)$, $d\in R^n$, ортогонален к ядру транспонированной матрицы $(Q(\theta))'$, т.е. для $\forall\,\xi\in Ker\,(Q(\theta))'$ справедливо равенство $(F(\theta),\xi)=0$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $R^{n(m+1)}$.

При выполнении условий теоремы 2 единственное решение задачи (1), (2) определяется на основе следующего алгоритма.

Коэффициенты и правую часть системы (10) находим решая матричные и векторные задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=A_0(t)X+A_i(t),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ i=\overline{0,m+1},\ \ X(\theta_{r-1})=0,\ \ r=\overline{1,m+1},$$

$$\frac{dX}{dt}=A_0(t)X+f(t),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ \ X(\theta_{r-1})=0,\ \ r=\overline{1,m+1}.$$

Решая систему (10) найдем $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m+1}^*)$, где $\lambda^*\in R^{n(m+1)}$ состоит из значений решений исходной задачи (1), (2) в начальных точках подинтервалов, т.е. $\lambda_r^*=x^*(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$.

Значения решения в остальных точках подинтервалов снова определяется решением задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=A_0(t)x+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(t)\lambda_i+f(t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1},\tag{11}$$

$$x(\theta_{r-1})=\lambda_r,\ \ r=\overline{1,m+1}.\tag{12}$$

Если фундаментальная матрица известна и используемые интегралы вычисляются, то предлагаемый алгоритм позволяет получить решение рассматриваемой задачи (1), (2) в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М: Высшая школа, 1995. – 205 с.

2 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 96-105.

3 Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ-матем. – 2005. – № 1. – С. 95-102.

4 Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Science review. S. Seifullin Kazakh agro technical university. – 2012. – № 2(10). – С. 35-40.

5 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

6 Джумабаев Д.С., Илиясова Г.Б. Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнений // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2014. – № 2. – С. 275-280.

7 Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 1. – С. 88-95.

REFERENCES

1 Nahushev A.M. Uravnenija matematicheskoj biologii. M: Vysshaja shkola, 1995. 205 s.

2 Nahushev A.M. Kraevye zadachi dlja nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozhenija k prognozu pochvennoj vlagi. Differenc. uravn. 1979. T. 15, № 1. S. 96-105.

3 Bakirova Je.A. O priznake odnoznachnoj razreshimosti dvuhtochechnoj kraevoj zadachi dlja sistemy nagruzhennyh differencial'nyh uravnenij. Izvestija NAN RK. Ser. fiz-matem. 2005. № 1. S. 95-102.

4 Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. Science review. S. Seifullin Kazakh agro technical university. 2012. № 2(10). S. 35-40.

5 Dzhumabaev D.S. Priznaki odnoznachnoj razreshimosti linejnoj kraevoj zadachi dlja obyknovennogo differencial'nogo uravnenija. Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki. 1989. T. 29, № 1. S. 50-66.

6 Dzhumabaev D.S., Ilijasova G.B. Ob odnoj chislennoj realizacii metoda parametrizacii reshenija linejnoj kraevoj zadachi dlja nagruzhennogo differencial'nogo uravnenij. Izvestija NAN RK. Serija fiz.-mat. 2014. № 2. S. 275-280.

7 Pul'kina L.S. Nelokal'naja zadacha s integral'nymi uslovijami dlja kvazilinejnogo giperbolicheskogo uravnenija. Matematicheskie zametki. 2001. T. 70, № 1. S. 88-95.

Резюме

Е. А. Ақжігітов[1], *Ж. М. Қадырбаева*[2]

([1]С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Астана, Қазақстан,
[2]ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан)

ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТЫ БАР СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Параметрлеу әдісі негізінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің шешілімділігінің критериі алынған. Қарастырылып отырған есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылған.

Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, интегралдық шарт, алгоритм.

Summary

E.A. Akzhigitov, Zh.M. Kadirbayeva

([1]S. Seifullin Kazakh agrotechnical university, Astana, Kazakhstan,
[2]Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan)

SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Criterion of solvability of linear boundary value problem with integral condition for systems of loaded differential equations is received by parametrization method. An algorithm for finding solution of considering problem is offered.

Keywords: differential equations, integral conditions, the algorithm.

Поступила 05.05.2014 г.