УДК 517. 968.78

Ж. О. ТОЛУБАЕВ

(Сулюктинский гуманитарно-экономический институт БатГУ, Сулюкта, Кыргызстан, tolubaiev69@mail.ru)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

Аннотация. В работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка Вольтерра-Стилтьеса к пространству $L^2{}_{n,g}[t_0,\infty)$.

Ключевые слова: производная по возрастающей функции, непрерывная матричная функция, вектор-функция, пространство непрерывных матричных функций.

Тірек сөздер: үдемелі функциялар бойынша туынды, үздіксіз матрикалшық функция, вектор-функция, үздіксіз матрикалық функциясының кеңістігі.

Keywords: derivative by increasing function, continuous matrix function, vector-function space of continuous matrix functions.

Рассмотрим систему линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра-Стилтьеса

$$x''(t)+A(t)x'(t)+B(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau)=f(t),\quad t\ge t_0 \tag{1}$$

$$x(t_0)=c,\quad x'(t_0)=x_1 \tag{2}$$

где интеграл является интегралом Стилтьеса, $C=(c_1,c_2,\dots,c_n)^T\in R^n$, $K(t,\tau)-n\times n$ мерная симметричная непрерывная матричная функция, т.е. $K^T(t,\tau)=K(t,\tau)$, где $G=\{(t,\tau)\in R^2 : t_0\le\tau\le t<\infty\}$, $A(t),B(t)-n\times n$-мерные симметричные непрерывные матричные функции, $x(\tau)-n$ - мерная векторная функция, $f(t)-$заданая непрерывная n- мерная векторная функция, $g(t)-$заданная возрастающая непрерывная функция на $[t_0,\infty)$, $x(t)-n$-мерная искомая векторная функция.

Здесь $x'(t), x''(t)$ определятся следующими равенствами

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dg(t)}\frac{dg(t)}{dt}=g'(t)\frac{dx(t)}{dg(t)}$$

$$x''(t)=\left[\frac{d^2x(t)}{dg^2(t)}g'(t)+\frac{dx(t)}{dg(t)}\left(g'(t)\right)'_{g(t)}\right]g'(t)$$

Все фигурирующие векторные, матричные функции являются непрерывными и соотношения имеют место для всех $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$.

Вопросы единственности, ограниченности и принадлежности решений, квадратично-суммируемых вектор-функций для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразований уравнений исследованы в работах [1-9].

Введем обозначения: $C_n[t_0;\infty)-$пространство n-мерных непрерывных вектор функций с элементами из $C[t_0,\infty]$ и $C_{nn}(G)-$пространство $n\times n-$мерных непрерывных матричных функций с элементами из $C(G)$. Через $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ обозначим пространство всех n-мерных вектор-функций $x(t)=\{x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)\}$ удовлетворяющих условию

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(t)\|^2 dg(t) < \infty$$

Для любых $x(\eta)=\{x_1(\eta),x_2(\eta),\ldots,x_n(\eta)\}^T$, $y(\xi)=\{y_1(\xi),y_2(\xi),\ldots,y_n(\xi)\}^T \in C_n[t_0,\infty)$ скалярные произведения определяется следующим равенством $\langle x(\eta),y(\xi)\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i(\eta)y_i(\xi)$, норма $A(t)-n\times n$ мерной симметричной матричной функции определяется следующим равенством $\|A(t)\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|$, а норма n-мерных векторных функций $x(t)=\{x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\}^T$ определяется следующим равенством $\|x(t)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ЗАДАЧА. В данной работе рассматривается и исследуется методом преобразований уравнений достаточные условия принадлежности решений в $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) типа Вольтерра-Стилтьеса.

ТЕОРЕМА. Пусть для систем линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка (1) выполняются следующие условия:

1) $g'(t)\geq 0$ для всех $t\in[t_0,\infty)$, $(g'(t))'_{g(t)}$, $\|A(t)\|$ *и* $\|B(t)\|$, $\left\|[B(t)]'_{g(t)}\right\|$ – непрерывные функции на $[t_0,\infty)$, $A^*(t)=A(t)$ и $B^*(t)=B(t)$ при всех $t\in[t_0,\infty)$;

2) $\left\|K'_{g(t)}(t,s)\right\|, \left\|K'_{g(s)}(t,s)\right\|, \left\|K''_{g(t)g(s)}(t,s)\right\|\in C(G)$,

где $K'_{g(t)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{K(t+\Delta,s)-K(t,s)}{g(t+\Delta)-g(t)}$, $\quad K'_{g(s)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{K(t,s+\Delta)-K(t,s)}{g(s+\Delta)-g(s)}$;

3) пусть для любых $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ выполняются следующее неравенства:

$a)$ $\langle K(t,t_0)x,x\rangle\geq 0, \left\langle\left[A(t)-\frac{1}{2}(g'(t))'_{g(t)}E_n\right]x,x\right\rangle\geq\alpha\|x\|^2$, $\langle B(t)x,x\rangle\geq 0$,

$\left\langle\left[[g'(t)]'_{g(t)}B(t)+g'(t)B'_{g(t)}(t)\right]x,x\right\rangle\leq 0$ и $\left\langle K'_{g(t)}(t,t_0)x,x\right\rangle\leq 0$ при всех $t\in[t_0,\infty)$, где $\alpha\in R$, $\alpha>0$, $E_n-n\times n$ мерная единичная матрица;

$b)$ $\left\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)x,x\right\rangle\geq 0$ и $\left\langle K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)x,x\right\rangle\leq 0$ для всех $(t,\tau)\in G=\{(t,\tau): t_0\leq\tau\leq t<\infty\}$;

4) $\|f(t)\|\in L^2{}_{n,g}[t_{0,}\infty)$

тогда решение системы линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка **(1)** принадлежит к пространству $L^2{}_{n,g}[t_0,\infty)$ и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2 dg(s)\leq\frac{1}{\alpha-\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2 dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1,x_1\rangle+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c,c\rangle\right\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя метод преобразования уравнений рассмотренных в работе [9] и скалярно умножая уравнения **(1)** на $x'(t)$ и затем, интегрируя от t_0 до t по Стильтесу получаем:

$$\int_{t_0}^{t}\langle x''(s),x'(s)\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\langle A(s)x'(s),x'(s)\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\langle B(s)x(s),x'(s)\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x'(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),x'(s)\rangle dg(s) \qquad (3)$$

Далее подставляя значение $x'(t), x''(t)$ в соотношения (3) получим

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle\left[\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}g'(s)+\frac{dx(s)}{dg(s)}[g'(s)]'_{g(s)}\right]g'(s),g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left\langle A(s)g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)},g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left\langle B(s)x(s),g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x'(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),x'(s)\rangle dg(s)$$

Тогда из последного соотношения имеем

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}[g'(s)]^3,\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left\langle[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left\langle A(s)[g'(s)]^2\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left\langle g'(s)B(s)x(s),\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x'(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),x'(s)\rangle dg(s). \qquad (4)$$

Для первого интеграла в левой части соотношения (4) применяем следующее тождество

$$\left(\left\langle[g'(s)]^3\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle\right)'_{g(s)}=\left\langle 3[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle+$$

$$+\left\langle[g'(s)]^3\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle+\left\langle[g'(s)]^3\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}\right\rangle$$

т.е.

$$\left\langle[g'(s)]^3\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\left\langle[g'(s)]^3\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle\right)'_{g(s)}-\frac{3}{2}\left\langle[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle[g'(s)]^3\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\left\langle[g'(s)]^3\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle\right)'_{g(s)}dg(s)-$$

$$-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)=\frac{1}{2}\left\langle[g'(s)]^3\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle\Bigg|_{s=t_0}^{s=t}-$$

$$-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)=\frac{1}{2}\langle g'(t)x'(t),x'(t)\rangle-\frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1,x_1\rangle-$$

$$-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s).$$

Из последнего соотношения получим

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle [g'(s)]^3 \frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s) = \frac{1}{2}\langle g'(t)x'(t), x'(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1, x_1\rangle -$$

$$-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s). \qquad (5)$$

Для четвертого интеграла в левой части соотношения (4) применяем следующее тождество

$$\left(\langle g'(s)B(s)x(s), x(s)\rangle\right)'_{g(s)} = \left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s)x(s), x(s)\right\rangle + \left\langle g'(s)B'_{g(s)}(s)x(s), x(s)\right\rangle +$$

$$+\left\langle g'(s)B(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}, x(s)\right\rangle + \left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle$$

т.е.

$$\left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle g'(s)B(s)x(s), x(s)\rangle\right)'_{g(s)} - \frac{1}{2}\left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s)x(s), x(s)\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle g'(s)B'_{g(s)}(s)x(s), x(s)\right\rangle.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\langle g'(s)B(s)x(s), x(s)\rangle\right)'_{g(s)} dg(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s)x(s), x(s)\right\rangle dg(s) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle g'(s)B'_{g(s)}(s)x(s), x(s)\right\rangle dg(s) = \frac{1}{2}\langle g'(s)B(s)x(s), x(s)\rangle\Big|_{s=t_0}^{s=t} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{[g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s)\right\}x(s), x(s)\right\rangle dg(s) = \frac{1}{2}\langle g'(t)B(t)x(t), x(t)\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c, c\rangle - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{[g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s)\right\}x(s), x(s)\right\rangle dg(s).$$

Из последнего соотношения получим

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s) = \frac{1}{2}\langle g'(t)B(t)x(t), x(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c, c\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{[g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s)\right\}x(s), x(s)\right\rangle dg(s). \qquad (6)$$

Учитывая (5) и (6) из (4) имеем

$$\frac{1}{2}\langle g'(t)x'(t), x'(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1, x_1\rangle - \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s) + \int_{t_0}^{t}\left\langle A(s)[g'(s)]^2 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\langle g'(t)B(t)x(t), x(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c, c\rangle - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{[g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s)\right\}x(s), x(s)\right\rangle dg(s) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x'(\tau), x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s) = \int_{t_0}^{t}\langle f(s), x'(s)\rangle dg(s).$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\langle g'(t)x'(t),x'(t)\rangle+\int_{t_0}^{t}\left\langle\left[A(s)-\frac{1}{2}[g'(s)]'_{g(s)}\right][g'(s)]^2\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\langle g'(t)B(t)x(t),x(t)\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{[g'(s)]'_{g(s)}B(s)+g'(s)B'_{g(s)}(s)\right\}x(s),x(s)\right\rangle dg(s)-$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x'(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),x'(s)\rangle dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1,x_1\rangle+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c,c\rangle.\quad(7)$$

Для вычисления двойного интеграла в соотношении (7) применяем следующие равенства и формулы нахождения производных скалярного произведения векторных функций $\langle u(t),v(t)\rangle'_{g(t)}=\langle u'_{g(t)}(t),v(t)\rangle+\langle u(t),v'_{g(t)}(t)\rangle$,

1. $$\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle=\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle+\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau),x'(s)\rangle,\quad (s,\tau)\in G,$$

Из последнего тождества следует, что

$$\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau),x'(s)\rangle=\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle-\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle\quad(8)$$

где $z(s,\tau)$ определяется по следующей формуле

$$z(s,\tau)=\int_{\tau}^{s}x'(t)dg(t)\quad(9)$$

Из (9) и теоремы из [10] следует

$$z'_{g(\tau)}(s,\tau)=-x'(\tau),\quad(10)$$

$$z'_{g(s)}(s,\tau)=x'(s).\quad(11)$$

2. Далее учитывая, $K^T(t,\tau)=K(t,\tau)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial g(s)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial g(s)}[K(s,\tau)z(s,\tau)],z(s,\tau)\right\rangle+\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau),\frac{\partial}{\partial g(s)}z(s,\tau)\right\rangle=$$

$$=\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle+\langle K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau),z(s,\tau)\rangle+\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\rangle=$$

$$=\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle+2\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle$$

Отсюда, получим

$$\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle-\frac{1}{2}\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle,\quad (s,t)\in G\quad(12)$$

Далее учитывая (10) имеем

$$\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)=\int_{t_0}^{s}\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)-\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)=$$

$$=\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=s}-\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)=-\langle K(s,t_0)z(s,t_0),x'(s)\rangle-$$

$$-\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau),\quad s\in[t_0,\infty).$$

В силу (9) и (10) из последнего равенства следует, что

$$\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)v(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)=\langle K(s,t_0)z(s,t_0),x'(s)\rangle+\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau),\quad s\in[t_0,\infty).$$

Отсюда интегрируя от t_0 до t получим

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)v(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle K(s,t_0)z(s,t_0),x'(s)\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s).\qquad(13)$$

Применяя формулы (9), (11), (12) и обобщенную формулу Дирихле [10] из (13) имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x'(\tau),x'(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle K(s,t_0)z(s,t_0),z'_{g(s)}(s,t_0)\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}\langle K(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{d}{dg(s)}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(s)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)z(t,\tau),z(t,\tau)\rangle dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s).\qquad(14)$$

Учитывая (14) из (7) соотношения получим

$$\frac{1}{2}\langle g'(t)x'(t),x'(t)\rangle+\frac{1}{2}\langle g'(t)B(t)x(t),x(t)\rangle+\int_{t_0}^{t}\left\langle\left[A(s)-\frac{1}{2}[g'(s)]'_{g(s)}\right][g'(s)]^2\frac{dx(s)}{dg(s)},\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle dg(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{[g'(s)]'_{g(s)}B(s)+g'(s)B'_{g(s)}(s)\right\}x(s),x(s)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)z(t,\tau),z(t,\tau)\rangle dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),x'(s)\rangle dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1,x_1\rangle+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c,c\rangle.\qquad(15)$$

Для вычисления интеграла в правой части соотношения (15), применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов, получим

$$\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|f(s)\|\sqrt{\varepsilon}\|x'(s)\|dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2dg(s)$$

В силу условий теоремы 1), 2), 3), 4) и применяя последнюю неравенство из (15) соотношения имеем

$$\frac{1}{2}g'(t)\|x'(t)\|^2+\frac{1}{2}g'(t)\langle B(t)x(t),x(t)\rangle+(\alpha-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1,x_1\rangle+\frac{1}{2}\langle g(t_0)B(t_0)c,c\rangle\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2dg(s)\le\frac{1}{\alpha-\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)x_1,x_1\rangle+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)B(t_0)c,c\rangle\right\}$$

где $\alpha>0,\ 0<\varepsilon<\alpha$.

Из последнего неравенства вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим систему линейных интегро-диффернциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра-Стилтьеса (1) при

$$n=2,\ t_0=1,\ \ g(t)=t^2 \text{ и } K(t,\tau)=\begin{pmatrix}\frac{2\tau^2}{t^2} & \frac{\tau^2}{t^2}\\ \frac{\tau^2}{t^2} & \frac{2\tau^2}{t^2}\end{pmatrix}=\frac{\tau^2}{t^2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2t} & 0\\ 0 & 1+\frac{1}{2t}\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{t^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{t^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

т.е. следующую систему линейных интегро-диффернциальных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса

$$x''(t)+\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2t} & 0\\ 0 & 1+\frac{1}{2t}\end{pmatrix}x'(t)+\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{t^2}\end{pmatrix}x(t)+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}\frac{2\tau^2}{t^2} & \frac{\tau^2}{t^2}\\ \frac{\tau^2}{t^2} & \frac{2\tau^2}{t^2}\end{pmatrix}x'(\tau)dg(\tau)=f(t),\quad t\ge 1$$

$$x(1)=c,\quad x'(1)=x_1$$

Проверим выполнение условий теоремы:

$$g'(t)=2t,\qquad (g'(t))'_{g(t)}=\frac{1}{t};$$

$$1.\ \ A(t)-\frac{1}{2}(g'(t))'_{g(t)}E_2=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2t} & 0\\ 0 & 1+\frac{1}{2t}\end{pmatrix}-\frac{1}{2t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x,x\right\rangle\ge\alpha\|x\|^2,\ \text{т.е. } \alpha=1.\quad \left\langle\left\{A(t)-\frac{1}{2}[g(t)]'_{g(t)}E_2\right\}x,x\right\rangle\ge 1.$$

2. $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} x, x \right\rangle \geq 0 \ \Rightarrow \left\langle \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x \right\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle B(t)x, x\rangle \geq 0$;

3. $B'_{g(t)}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^4} \end{pmatrix}$, $\quad [g'(t)]'_{g(t)} B(t) + g'(t) B'_{g(t)}(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2t\left(-\frac{1}{t^4}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{t^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left\langle -\frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x \right\rangle \leq 0 \ \Rightarrow \left\langle \left\{ [g'(t)]'_{g(t)} B(t) + g'(t) B'_{g(t)}(t) \right\} x, x \right\rangle \leq 0 \ ;$$

4.$a)$ $K(t,1) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left\langle \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = \frac{1}{t^2}(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2}\left(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2\right) =$

$$= \frac{2}{t^2}\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] \geq 0 \Rightarrow \langle K(t,1)x, x\rangle \geq 0 \ ;$$

$b)$ $K_{g(t)}(t,1) = -\frac{1}{t^4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left\langle -\frac{1}{t^4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = -\frac{1}{t^4}(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{t^4}\left(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2\right) = -\frac{2}{t^4}\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] \leq 0 \Rightarrow \langle K_{g(t)}(t,1)x, x\rangle \leq 0 \ ;$$

$c)$ $K_{g(\tau)}(t,\tau) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left\langle \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = \frac{1}{t^2}(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2}\left(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2\right) =$

$$= \frac{2}{t^2}\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] \geq 0 \Rightarrow \langle K_{g(\tau)}(t,\tau)x, x\rangle \geq 0 \ ;$$

$d)$ $K_{g(t)g(\tau)}(t,\tau) = -\frac{1}{t^4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left\langle -\frac{1}{t^4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = -\frac{1}{t^4}(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{t^4}\left(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2\right) = -\frac{2}{t^4}\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] \leq 0 \Rightarrow \langle K_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)x, x\rangle \leq 0 \ ;$$

Из этого следует что, выполняется все условие теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Levin J.J., Nohel J.A. Perturbations of a Nonlinear Volterra Equations // Mich. math. – 1965. – Vol. 22. – P. 349-367.

2 Kiffe T.R. On Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type // Different equat. – 1976. – Vol. 12. – P. 431-447.

3 Винокуров В.Р. Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. – 1967. − Т. 3, № 10. − С. 1732-1744.

4 Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Математический анализ.− Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. − С. 103-107.

5 Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтера // Математический анализ. − Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971. − С. 63-71.

6 Smith M.C. On a Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type // J. different equat. –1979. – Vol. 32. – P. 294-309.

7 Олехник С.Н. Об ограниченности и неограниченности решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 9.

8 Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегрго-дифференциальных уравнений // Тезис докл. 4-й Казахстанской межвуз. науч. конф. по матем. и мех. Ч. 1. Математика. – Алма-Ата, 1971. – С. 123-124.

9 Ведь Ю.А., Искандаров С. О единственности решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода на полуоси // Известие АН Киргизской ССР. – Вып. 5. – Фрунзе: Илим, 1986. – С. 14-18.

10 Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. – Кыргызско-турецкий университет Манаса. – Бишкек, 2001. – С. 18-64.

11 Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтера-Стилтьеса // Табигый илимдер журналы Кыргызско-турецкий университети Манаса. – Бишкек, 2003. – С. 65-78.

REFERENCES

1 Levin J.J., Nohel J.A. Perturbations of a Nonlinear Volterra Equations. Mich. math. 1965. Vol. 22. P. 349-367.

2 Kiffe T.R. On Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type. Different equat. 1976. Vol. 12. P. 431-447.

3 Vinokurov V.R. Asimptoticheskie povedenie reshenij odnogo klassa integro-differencial'nyh uravnenij Vol'tera. Differencial'nye uravnenija. 1967. T. 3, № 10. S. 1732-1744.

4 Caljuk Z.B. Zamechanie po povodu metoda Ljapunova dlja integro-differencial'nyh uravnenij. Matematicheskij analiz. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1978. S. 103-107.

5 Caljuk Z.B., Shamsutdinov M.M. Ob ogranichennosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh uravnenij Vol'tera. Matematicheskij analiz. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1971. S. 63-71.

6 Smith M.C. On a Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type. J. different equat. 1979. Vol. 32. P. 294-309.

7 Olehnik S.N. Ob ogranichennosti i neogranichennosti reshenij obyknovennogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka. Differencial'nye uravnenija. 1972. T. 8, № 9.

8 Pahyrov Z. Dostatochnye priznaki ogranichennosti reshenij linejnyh integrgo-differencial'nyh uravnenij. Tezis dokl. 4-j Kazahstanskoj mezhvuz. nauch. konf. po matem. i meh. Ch. 1. Matematika. Alma-Ata, 1971. S. 123-124.

9 Ved' Ju.A., Iskandarov S. O edinstvennosti reshenija sistemy linejnyh integral'nyh uravnenij tipa Vol'terra pervogo roda na poluosi. Izvestie AN Kirgizskoj SSR. Vyp. 5. Frunze: Ilim, 1986. S. 14-18.

10 Asanov A. Proizvodnaja funkcii po vozrastajushhej funkcii. Tabigyj ilimder zhurnaly. Kyrgyzsko-tureckij universitet Manasa. Bishkek, 2001. S. 18-64.

11 Asanov A. Sistema integral'nyh uravnenij Vol'tera-Stilt'esa. Tabigyj ilimder zhurnaly Kyrgyzsko-tureckij universiteti Manasa. Bishkek, 2003. S. 65-78.

Резюме

Ж. О. Толубаев

(Сүлікті гуманитарлық-экономикалық институты БатГУ, Сүлікті, Қырғызстан, tolubaiev69@mail.ru)

ЖАРТЫЛАЙ ОСЬТЕГІ ЕКІНШІ РЕТТІ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕСІ ШЕШУІНІҢ БІР КЛАСЫ ТУРАЛЫ

Жұмыста үдемелі функция туындысы ұғымы және теңдеудің түрленуі негізінде екінші ретті Вольтерра-Стилтьес интегралды-дифференциалдық теңдеуі сызықты жүйесі шешуінің $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ кеңістігіне тән болуының жеткілікті шарты орнатылған.

Тірек сөздер: үдемелі функциялар бойынша туынды, үздіксіз матрикалшық функция, вектор-функция, үздіксіз матрикалық функциясының кеңістігі.

Summary

Zh. O. Tolubaev

(SGEI Bathgate, Sulukta, tolubaiev69@mail.ru)

ON A CLASS OF SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL-EQUATIONS
OF SECOND ORDER DIFFERNTSIALNYH VOLTERRA-STIELTJES ON THE HALF

In this paper, based on the notion of derivative of an increasing function and the method of transformation equations established sufficient conditions for the solution of linear integro-differential equations of second order Volterra-Stieltjes to the space $L^2_{n,g}[t_{0,}\infty)$.

Keywords: derivative by increasing function, continuous matrix function, vector-function space of continuous matrix functions.

Поступила 05.05.2014 г.