УДК 517.9

И. О. ОРАЗОВ, А. М. САРСЕНБИ, А. А. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ЕКІЕСЕЛІ СПЕКТРІ ЖАЙЫНДА

Аннотация. Бұл еңбекте Штурм-Лиувиллдің онша тұрлаулы емес операторының структурасының алгебралық себептері айқындалды ,соның арқасында оператордың индефиниті кеңістіктегі таралымдары табылды.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля, собственныефункций, присоединенные функций.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay,own functions,attached functions.

Спектрлері еселі операторлар туралы еңбектерді саусақпен санауға болады, дерліктей, солардың бірі [1] $L^2(a,b)$ кеңістігінде l(y) дифференциалдық өрнегінен туындайтын L операторының, мұндағы

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) \quad (a < x < b),$$

спектірінің еселік қасиеттерін, $l[y] - \lambda y = 0$, дифференциалдық теңдеуінің (a, c) және (c, b) аралықтарындағы шекаралық есептерінің спектрәлдік қасиеттерімен байланыстырады.

Бұл еңбекте біз L операторының өте қарапайым сәтін егжей-тегжейлі зерттеп, түпкілікті нәтиежелер алдық. Зерттеу нысананың дербес жағдайларын [2] еңбектен көруге болады.

Гилберттің $L^2(0,1)$ кеңістігінде, мынадай,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_j[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}\,y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \;\; (i = 1,2) \tag{2}$$

шекралық есебін қарастыралық, мұндағы a_{ij} ($i = 1,2$; $j = 1,2,3,4$) алдын-ала белгілі комплекс сандар, ал λ – алдын-ала белгісіз спектрәлді параметр. Оның нақты мәндері, есепті шешу барысында, анықталады. Бұл есептің нөлге тең ($y(x) \equiv 0$) шешімі әруақта бар екені айдан анық, біз мұндай шешімдерге назар аудармаймыз және оларды елеусіз (ескерусіз) шешімдер дейміз, ал нөлден өзгеше шешімдерді елеулі шешімдер қатарына жатқызамыз.

Әлгі λ-параметірінң елеулі шешімдерге сәйкес мәндерін шекаралық есептің меншікті мәндері дейміз, ал оларға тиісті елеулі шешімдерді шекаралық есептің меншікті функциялары делік.

Есептің $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ меншікті мәндерінің жиынын осы (1)-(2) шекаралық есептің спектрі дейік.

Егер меншікті мәнінің сәтінде (1)-(2) есебі k-рет шешілсе, онда оны k- еселік дейді [3, с. 193].

Мына,

$$y_{,}(\lambda;0) = y_2'(\lambda;0) = 1; \quad y_1'(\lambda;0) = y_2(\lambda;0) = 0$$

бастапқы шарттарға (1) теңдеудің, мынадай,

$$y_1(\lambda;x) = \cos\sqrt{\lambda}x, \;\; y_2(\lambda;x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{3}$$

шешімдерінің фундаментәлді системасы сәйкес келеді. Жоғарыдағы (1) теңдеудің жалпы шешімі осы шешімдердің сызықтық комбинациясы болғандықтан,

$$y(x;\lambda) = A\,y_1(\lambda;x) + By_2(\lambda;x),$$

мұнан

$$U_i[y] = A[a_{i1} + a_{i3}y_1(\lambda;1) + a_{i4}y_1'] + B[a_{i2} + a_{i3}y_2(\lambda;1) + a_{i4}y_2'(\lambda;1)] = \\ = 0 \;\; (i = 1,2)$$

Демек, (1)-(2) шекаралық есебінің елеулі шешімі бар болуы үшін, мына,

$$\begin{cases} A[a_{11} + a_{13}y_1(\lambda;1) + a_{14}y_1'] + B[a_{12} + a_{13}y_2(\lambda;1) + a_{14}y_2'(\lambda;1)] = 0, \\ A[a_{21} + a_{23}y_1(\lambda;1) + a_{24}y_1'(\lambda;1)] + B[a_{22} + a_{23}y_2(\lambda;1) + a_{24}y_2'(\lambda;1)] = 0 \end{cases}$$

теңдеулер системасының елеулі шешімінің бар болуы қажетті әрі жеткілікті.

Егерде біз $W[y_1, y_2]$- вронскианының бірге тең екенін ескере отырып, жоғарыдағы теңдеулер системасының анықтауышын есептесек, мынадай,

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} - \Delta_{42}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \qquad (4)$$

формула аламыз, мұндағы $\Delta_{ij} = a_{i1} \times a_{2j} - a_{2i} \times a_{1j}$ – дегеніміз,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

– матрицасының i-ші және j-ші бағандарынан құрылған минор. Меншікті λ_0 мәнінің еселігі, оның, $\Delta(\lambda)$ функциясының нөлі ретіндегі еселігінен артпайды, онан кем немесе тең. Бұл еселіктердің бірдей болуы шарт емес, олар әртүрлі болуы-да мүмін. Меншікті мәндерінің еселік көрсеткіштерінен кем болған сәтте қосарлас функциялар [4] пайда болады, біз дәл осы сәтке тоқталмақпыз.

МӘСЕЛЕ. Айталық, $\Delta(\lambda)$ – характеристикалық детерминантының еселік нөлдерінің жиыны еңдеулі жиын болсын, онда (1)-(2) шекаралық есептің шекаралық шарттары қандай болады деген сұрақ көлденең тұрады. Мысалы, бұл (1)-(2) есептің кем дегенде екі-екіеселі меншікті мәндері бар болса, онда оның шекаралық шарттары, мынадай,

$$y(0) + ky(1) = 0, y'(0) + ky'(1) = 0 \;\; (k^2 = 1)$$

болары белгілі [2].

КӨМЕКШІ МӘЛІМЕТТЕР

1-ЛЕММА.

(а) Егер $a \times d \neq 0$ болса, онда, мына,

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda}\right) \times \sin\sqrt{\lambda} + C \times \cos\sqrt{\lambda} = 0 \qquad (6)$$

теңдеудің нөлден өзгеше еселі нөлдерінің саны төрттен артпайды;

(б) Егер $a = 0$, $d \neq 0$ болса, онда (6) теңдеудің нөлден өзгеше еселі нөлдерінің саны екіден артпайды;

(в) Егер $d = 0$, $b \neq 0$ болса, онда (6) теңдеудің еселі нөлдерінің саны екіден артпайды.

САЛДАР 1. Егер $d = 0, b \neq 0, c^2(a^2 - c^2) = 0$ болса, онда (6) теңдеудің еселі нөлі тек біреу ғана болуы мүмкін.

САЛДАР 2.

Егер $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0,$

$b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^3c \neq 0$ болса, онда (6) теңдеуінің еселі нөлдері жоқ, мысалы $c = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$ сәтінде.

2-лемма.

Егер $c \neq 0$ және

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda}$$

функциясының еселі нөлдерінің саны екіден артық болса, онда

$$b = 0, \; a^2 = c^2$$

болады.

3. СТРУКТУРАЛЫҚ НӘТИЕЖЕЛЕР

1-теорема.

Егер (1)-(2) шекаралық есептің характеристикалық детерминантының еселі нөлдерінің жиыны еңдеулі болса, онда (2) шекаралық шарттың тұрлаулылығы (регулярный) шамалы ғана [4, 71 б.].

2-теорема

Егер (1)-(2) шекаралық есептің характеристикалық детерминантының еселі нөлдерінің жиыны еңдеулі болса, онда бұл шекаралық есепке сай оператор төмендегі екі кейіптің біріне енеді:

а) $L_1(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, \ k \in \mathbb{C}, \ k \neq 1; \\ \qquad y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

б) $L_2(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$

$$\begin{cases} ky'(0) - y'(1) = 0, \ k \in \mathbb{C}, \ k \pm 1 \\ \qquad y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

немесе осы операторларға сыңарлас (формально сопряженный) операторлардың кейіпіне енеді, мұндағы k-дегеніміз кең комплекс жазықтығына тиісті.

3-теорема.

Егер, төменгі,

$$Ay = iy'(x); \ y(0) + ky(1) = 0, \qquad k \in \mathbb{C}, k \neq -1$$

$$Bz = iz'(x); \ z(0) + z(1) = 0$$

формулалар арқылы A және B операторлары анықталса, онда, мына,

$$1) \ L_1(k) = B \times A;$$

$$2) L_3\left(\frac{1}{k}\right) = AB \qquad k \in \mathbb{C}, \ k \neq -1$$

формулалар орынды, мұндағы

$$L_1(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0 \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_3(k)y = -y''(x); \ x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) + y'(1) = 0, \\ \ y(0) + y(1) = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{C}, k \neq -1.$$

4-теорема.

Егер, төмендегі,

$$Cy = iy'(x), ky(0) - y(1) = 0, \ k \in \mathbb{C}, \ k \neq -1;$$

$$Dz = iz'(x), \ \ z(0) - z(1) = 0$$

формулалары арқылы C және D операторлары анықталса, онда, мына,

$$L_2(k) = C \times D;$$

$$L_4(k) = D \times C$$

формулалар орынды, мұндағы $L_2(k)$, $L_4(k)$ – дегендеріміз:

$$L_2(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) - y'(1) = 0, \\ \ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_4(k)y = -y''(x); \ x \in (0,1)$$

$$y'(0) - y'(1) = 0,$$

$$y(0) - ky(1) = 0;$$

5-теорема.

Егер $k^2 \neq 1$ болса, онда, мына,

$$L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(0)P(k), \qquad P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$$

$$L_2(k) = Q^{-1}(k)L_2(\infty)Q(k), \qquad Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x)$$

теңдіктер орындалады.

6-теорема.

Егер I – бірлік оператор, ал $Su(x) = u(1-x)$ болса, онда мына,

$$\dot{L}_1(k) = L_1(k)\,(KI+S)^{-1} - (KI+S)^{-1}L_1(k)$$

теңдік орынды, мұндағы (°) – дегеніміз k-бойынша туынды.

СПЕКТРӘЛДІ ТАРАЛЫМДАР

Төмендегі 7, 8 теоремалар, жоғарыдағы 3, 4-структуралық теоремалардың айдан-анық салдарлары.

7-теорема.

Егер $k \neq 1$ болса, онда төмендегі формулалар орынды

а) $L_1(k)u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (Au, \varphi_n) \times \varphi_n$ (7)

мұндағы $u \in D(L_1),\ B\varphi_n = \lambda_n\, \varphi_n$

б) $L_1^{-1}(k)u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(B^{-1}u, \psi_m)}{\mu_m} \times \varphi_m$ (8)

мұндағы $A^*\psi_m = \mu_m \psi_m,\ A\varphi_m = \mu_m \varphi_m,\ (\psi_m, \varphi_n) = \delta_{mn};$

8-теорема.

Егер $k \neq -1$ болса, онда төмендегі спектрәлді таралым орынды

$L_2(k)u = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k (Du, \psi_k) \times \varphi_k,$ (9)

мұндағы

$$(\psi_k, \varphi_m) = \delta_{km},\ C_{\varphi_k} = \nu_k \varphi_k,\ C^*\psi_k = \bar{\nu}_k \psi_k.$$

Жоғарыдағы (8), (9) формулалар индефинитті кеңістіктегі спектрәлді таралымдар болып саналады, ал (7) +++++ |k| = 1 сәтінде осылай болады.

9-теорема.Егер төмендегі

$$Au = -u''(x);\ \ u(0) = 0, u'(0) - u'(1) = 0;$$

$$Bv = -v''(x);\ \ v(0) = 0, v'(0) + v'(1) = 0;$$

$$Tu = u''(1-x);\ \ u(0) = 0$$

формулалар арқылы A, B, T операторлары анықталса, онда, мына,

$$TA = A^*T,\ \ TB = B^*T$$

формулалар орынды, мұндағы A* және B* сыңарлас операторлар.

ӘДЕБИЕТ

1 Кац И.С. Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям // Известия академии наук СССР. Серия математическая, 27 (1963), 1081-1112.

2 Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. двукратных собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля // Институт математики МО и Н РК «Математический журнал». – Алматы, 2012. – Т. 12, № 3(45). – С. 1-6.

3 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

4 Наймарк М.А. Линейнные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

1 Kac I.S. Kratnost' spektra differencial'nogo operatora vtorogo porjadka i razlozhenie po sobstvennym funkcijam. Izvestija akademii nauk SSSR. Serija matematicheskaja, 27 (1963), 1081-1112.

2 Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. dvukratnyh sobstvennyh znachenijah operatora Shturma-Liuvillja. Institut matematiki MO i N RK «Matematicheskij zhurnal». Almaty, 2012. T. 12, № 3(45). S. 1-6.

3 Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1971. 576 s.

4 Najmark M.A. Linejnnye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 s.

Резюме

И. О. Оразов, А. М. Сарсенби, А. А. Шалданбаев

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

СТРУКТУРЫ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ
С НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной работе описан алгебрический механизм структуры операторов Штурма-Лиувилля с неусиленно регулярными краевыми условиями и получены спектральные разложения таких операторов в пространствах с индефинитной метрикой.
Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля, собственныефункций, присоединенные функций.

Summary

I. O. Orazov, A. M. Sarsenbi, A. A. Shaldanbaev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan)

STRUCTURE OF OPERATORS OF THE STURM-LIOUVILLE
WITH NEWSLINE REGULAR BOUNDARY CONDITIONS

In this work is described алгебрическии mechanism structure exponentiation Sturm-Liouville operator with no hard regular Sobolev space and received the spectral decomposition of such operators in spaces with indefinite metric.
Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay,own functions,attached functions.

Поступила 05.05.2014 г.