УДК 539.3

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

(Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан)

СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Аннотация. Для исследования термодинамики стержневых конструкций рассмотрены задачи стационарных колебаний термоупругого стержня в предположении, что известны действующие на него силы и тепловые источники. На основе метода обобщенных функций построены аналитическое решения стационарных краевых задач при заданных двух из четырех значений комплексных амплитуд перемещения, напряжения, температуры и теплового потока на каждом из концов стрежня.

Ключевые слова: термоупругость, стержень, стационарные колебания, фундаментальная матрица, метод обобщенных функций.

Тірек сөздер: термосерпімділік, өзек, стационарлық тербеліс, фундаментальдық матрица, жинақталған функциялар әдісі.

Keywords: thermoelasticity, rod, stationary oscillations, fundamental matrix method of generalized functions.

Стержневые конструкции широко используются в машиностроении в качестве соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры, и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термо-напряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем.

Изучение термодинамических процессов методом математического моделирования приводит к краевым задачам для термоупругих сред, которые описываются системами дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа. Существуют различные модели термоупругих сред. При изучении медленных динамических процессов чаще используется модель *несвязанной термоупругости*, в которой не учитывается влияние движения среды на ее температурное поле.

Быстрые вибрационные процессы в конструкциях влияют на температурное поле в них. При изучении таких процессов следует использовать модель *связанной термоупругости*. Здесь рассмотрены краевые задачи (КЗ) стационарных колебаний термоупругого стержня с использованием этой модели в предположении, что известны действующие на него силы и тепловые источники. На основе метода обобщенных функций построены аналитические решениястационарных краевых задач при заданных двух из четырех значений комплексных амплитуд перемещений, напряжений, температуры и тепловых потоков на каждом из концов стрежня.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрим термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ, жесткостью EJ и термоупругими константами γ, η и κ [1, 2]. Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида:

$$\begin{aligned} &\rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma\theta_{,x} + \rho F_1 = 0, \\ &\theta_{,xx} - \kappa^{-1}\theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u(x,t)$ – компоненты продольных смещений, $\theta(x,t)$ – относительная температура $(\theta = T(x,t) - T(x,0))$, T – абсолютная температура, c - скорость распространения упругих волн в стержне, ρ – погонная плотность, $c = \sqrt{\dfrac{EJ}{\rho}}$ Предполагается, чтона стержень действует периодическая во времени сила вида

$$F_1(x,t) = F_1(x)\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

а $F_2 = (\lambda_0\kappa)^{-1}W(x,t)$, $W(x,t) = W(x)\exp(-i\omega t)$, где W – количество выделенного (поглощенного) тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0 – коэффициент теплопроводности.Символ после запятой обозначает частную производную по указанной в индексе переменной ($u_{,x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и т.д.).

Термоупругое напряжение в стержне определяется формулой:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta \tag{3}$$

Краевые условия на концах стержня $\left(x = x_1 = -L,\ x = x_2 = L\right)$могут быть различными. Здесь сформулируем их для четырех краевых задач, обычно рассматриваемых в классической теории термоупругости [1,2]:

1 КЗ $\quad u\left(x_j,t\right) = w_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta(x_j,t) = \theta_j\exp(-i\omega t);\quad j = 1,2 \qquad (4)_1$

2 КЗ $\quad \sigma\left(x_j,t\right) = P_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta_{,x}(x_j,t) = q_j\exp(-i\omega t);\quad j = 1,2 \qquad (4)_2$

3 КЗ $\quad u\left(x_j,t\right) = w_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta_{,x}(x_j,t) = q_j\exp(-i\omega t);\quad j = 1,2 \qquad (4)_3$

4 КЗ $\quad \sigma\left(x_j,t\right) = P_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta(x_j,t) = \theta_j\exp(-i\omega t);\quad j = 1,2 \qquad (4)_4$

w_j, θ_j, P_j, q_j *– комплексныеаплитуды,* ω *– частота колебаний*. Наряду с ними можно поставить краевые задачи, когда на одном конце стержня задаются условия одной краевой задачи, а на втором – условия другой. Требуется найти решение этих задач.

2. Обобщенное решение краевой задачи.В силу гармоничности по временидействующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде $\left(u,\theta\right) = \left(u(x),\theta(x)\right)\exp(-i\omega t)$, где комплексные амплитуды $\left(u(x),\theta(x)\right)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\rho c^2 u_{,xx} + \rho\omega^2 u - \gamma\theta_{,x} + \rho F_1(x) = 0, \\ &\theta_{,xx} + i\omega\kappa^{-1}\theta + i\omega\eta u_{,x} + F_2(x) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Определим комплексные амплитуды решения, удовлетворяющие (5) и условиям (4) соответственно решаемой КЗ, если $F_1(x), F_2(x)$ принадлежат классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^1)$ [3].

Для решения задачи используется метод обобщенных функций, основные идеи которого изложены в [4]. Для этого представим обобщенное решение КЗ в виде

$$\left(\hat{u}(x),\hat{\theta}(x)\right) = \left(u(x),\theta(x)\right)H(L - |x|),$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, равная 0.5 в точке разрыва, $\left(u(x),\theta(x)\right)$ – ее классическое решение. Из (4), используя операцию дифференцирования регулярных кусочно-дифференцируемых обобщенных функций [3], получим на $S'(R^1)$:

$$\rho c^2\hat{u},_{xx}+\rho\omega^2\hat{u}-\gamma\hat{\theta},_x=\rho c^2\left(u(-L)\delta'(x+L)-u(L)\delta'(x-L)\right)+$$
$$+\rho c^2\left(\left(u,_x(-L)\delta(x+L)-u,_x(L)\delta(x-L)\right)\right)-$$
$$-\gamma\theta(-L)\delta(x+L)+\gamma\theta(L)\delta(x-L)-\rho F_1(x)H(L-|x|),$$

$$\hat{\theta},_{xx}+i\omega\kappa^{-1}\hat{\theta}+i\omega\eta\hat{u},_x=i\omega\eta\left(\left(u(-L)\delta(x+L)-u(L)\delta(x-L)\right)\right)+$$
$$+\theta(-L)\delta'(x+L)-\theta(L)\delta'(x-L)+ \tag{6}$$
$$+\theta,_x(-L)\delta(x+L)-\theta,_x(L)\delta(x-L)-F_2(x)H(L-|x|),$$

$\delta(x)$ – функция Дирака. Коротко запишем эту систему в виде

$$\sum_{j=1}^{2}D_{kj}(\partial_x)\hat{u}_j(x)=\hat{G}_k(x,w_1,w_2,u'(-L),u'(L),\theta_1,\theta_2,\theta'(-L),\theta'(L))+\hat{F}_k(x),\quad k=1,2.$$

Требуется определить решение (6) при полученной сингулярной правой части, которая зависит от значений искомых функций в граничных точках и их производных.

Решение системы уравнений (6) имеет вид свертки:

$$\hat{u}_k(x)=\sum_{j=1}^{2}U_k^j(x,\omega)*\hat{G}_j(x,...)+\sum_{j=1}^{2}U_k^j(x,\omega)*\hat{F}_j(x),\quad k=1,2, \tag{7}$$

где $U_k^j(x,\omega)$ – матрица фундаментальных решений системы уравнений (4):

$$\sum_{j=1}^{2}D_{kj}(\partial_x)U_j^l(x)=\delta_k^l\delta(x),\quad k,l=1,2\,, \tag{8}$$

δ_k^l – символ Кронекера. Как известно, если такая свертка существует, то обобщенное решение существует и оно единственно. А если оно регулярное и дифференцируемое, то совпадает с классическим.

Подставляя в (7) правую часть (5) и вычисляя, получим решение задачи в виде

$$u(x)H(|x|-L)=F_1*U_1^1+F_2*U_1^2+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(p_k-\breve{\gamma}\theta_k\right)U_1^1(x-(-1)^kL,\omega)+u_k(\omega)U_1^1,_x(x-(-1)^kL,\omega)\right\}+ \tag{9$_1$}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(q_k+i\omega\eta\, w_k\right)U_1^2\left(x-(-1)^kL,\omega\right)+\theta_k(\omega)U_1^2,_x\left(x-(-1)^kL,\omega\right)\right\}$$

$$\theta(x)H\left(L-|x|\right)=F_1*U_2^1+F_2*U_2^2+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(p_k-\gamma\theta_k\right)U_2^1(x-(-1)^kL,\omega)+w_kU_2^1,_x(x-(-1)^kL,\omega)\right\}+ \tag{9$_2$}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k+i\omega\eta w_k\right)U_2^2\left(x-(-1)^kL,\omega\right)+\theta_kU_2^2,_x\left(x-(-1)^kL,\omega\right)$$

Формулы (9) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи известны только четыре граничных значения комплексных амплитуд, например, для КЗ1 известны только перемещения и температура на концах стержня. Для ее решения надо определить напряжения и тепловые потоки на его концах.

Аналогично для других КЗ. Для определения недостающих краевых значений следует использовать краевые условия, исходя из свойств фундаментальной матрицы $U_k^j(x,\omega)$.

3. Матрица фундаментальных решений и ее свойства. Фундаментальную матрицу $U_k^j(x,\omega)$ удается построить аналитически с помощью обобщенного преобразования Фурье уравнений (8). Ее трансформанта Фурье имеет следующий вид:

$$\bar{U}_1^j(\xi,\omega)=\frac{\delta_1^j(\xi^2-i\omega k^{-1})+i\xi\gamma\delta_2^j}{\Delta(\xi,\omega)},$$
$$\bar{U}_2^j(\xi,\omega)=\frac{\xi\omega\eta\delta_1^j+(\xi^2c^2-\omega^2)\delta_2^j}{\Delta(\xi,\omega)},\quad j=1,2, \tag{10}$$

где знаменатель – определитель соответствующей алгебраической системы уравнений относительно ее компонент – имеет вид:

$$\Delta(\xi,\omega)=(\xi^2-ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2-\omega^2)-i\gamma\eta\xi^2\omega=c^2\left(\xi^2-\lambda_1\right)\left(\xi^2-\lambda_2\right). \tag{11}$$

Корни квадратного относительно ξ^2 уравнения: $\Delta(\xi,\omega)=0$ -комплексные:

$$\lambda_{1,2}=\frac{\omega}{2c^2}\left\{\left(\omega+i\gamma\eta\right)+ic^2k^{-1}\pm\sqrt{\left(\omega+i\left(\gamma\eta+c^2k^{-1}\right)\right)^2-4i\omega c^2k^{-1}}\right\},$$

зависят от трех безразмерных параметров среды: $\nu=\frac{L\omega}{c},\quad \alpha=\frac{\gamma\eta}{\omega},\quad \beta=\frac{c^2k^{-1}}{\omega}$,

$$\lambda_{1,2}=\frac{\nu^2}{2L^2}\left\{1+i\left(\alpha+\beta\right)\pm\sqrt{\left(1+i\left(\alpha-\beta\right)\right)^2-4i\beta}\right\} \tag{12}$$

Для построения оригинала удобно разложить $\frac{1}{\Delta(\xi,\omega)}$ в простые дроби. Тогда компоненты трансформанты (10) преобразуются к виду:

$$\bar{U}_1^j=\frac{\delta_1^j(\xi^2-i\omega\kappa^{-1})+i\xi\gamma\delta_2^j}{\left(\xi^2-\lambda_1\right)\left(\xi^2-\lambda_2\right)}=\frac{\delta_1^j(\xi^2-i\omega\kappa^{-1})+i\xi\gamma\delta_2^j}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\left(\xi^2-\lambda_1\right)}-\frac{1}{\left(\xi^2-\lambda_2\right)}\right\}$$
$$\bar{U}_2^j=\frac{\xi\omega\eta\delta_1^j+(\xi^2c^2-\omega^2)\delta_2^j}{\left(\xi^2-\lambda_1\right)\left(\xi^2-\lambda_2\right)}=\frac{\xi\omega\eta\delta_1^j+(\xi^2c^2-\omega^2)\delta_2^j}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\left(\xi^2-\lambda_1\right)}-\frac{1}{\left(\xi^2-\lambda_2\right)}\right\} \tag{13}$$

Выражениям, стоящих в числителях в пространстве оригиналов соответствуют следующие дифференциальные операторы:

$$\delta_1^j(\xi^2-i\omega\kappa^{-1})+i\xi\gamma\delta_2^j\rightleftarrows\delta_1^j(-i\omega\kappa^{-1}-\partial_x\partial_x)-\gamma\delta_2^j\partial_x$$
$$\xi\omega\eta\delta_1^j+(\xi^2c^2-\omega^2)\delta_2^j\rightleftarrows i\omega\eta\delta_1^j\partial_x-\delta_2^j(c^2\partial_x\partial_x+\omega^2) \tag{14}$$

Поэтому для восстановления оригиналов надо построить оригинал функции

$$\psi^*(\xi,\lambda)=\left(\xi^2-\lambda\right)^{-1}=F_x\left[\psi(x,\lambda)\right].$$

Нетрудно показать, что функция $\frac{\sin k|x|}{k}$ имеет обобщенное преобразование Фурье вида:

$$F_x\left[\frac{\sin k|x|}{k}\right]=\left(\frac{1}{\left(\xi^2-(k+i0)^2\right)}+\frac{1}{\left(\xi^2-(k-i0)^2\right)}\right),$$

откуда следует, что

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin|x|\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \tag{15}$$

Используя (15) и (14), получим выражения для компонент фундаментальной матрицы:

$$U_1^j(x,\omega)=\frac{\delta_1^j H_0(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{i\omega\kappa^{-1}\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)+\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\gamma\delta_2^j H_0(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right),\quad j=1,2$$

(16)

$$U_2^j(x,\omega)=$$

$$=\frac{H_0(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{i\omega\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)-\omega^2\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j+\right.$$

$$\left.+c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\},\quad j=1,2$$

где

$$H_0(x)=H(x)-\frac{1}{2}\equiv\frac{1}{2}\left(H(x)-H(-x)\right) \tag{17}$$

(заметим, что риманова поверхность матрицы по ω однолистная, так как значения компонент U_k^j не зависят от выбора знака радикалов $\sqrt{\lambda_j}$).

Как видим, компоненты фундаментальной матрицы являются регулярными обобщенными функциями, U_k^j непрерывныв точке $x = 0$:

$$U_k^j(\pm 0,\omega)=U_k^j(0,\omega)=0,\quad k,j=1,2, \tag{18}$$

а ее производные

$$\partial_x U_1^j(x,\omega)=\left[\frac{(\lambda_1-i\omega\kappa^{-1})}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)+\cos x\sqrt{\lambda_2}\right]\operatorname{sgn}(x)\delta_1^j-$$

$$+\frac{\gamma}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j$$

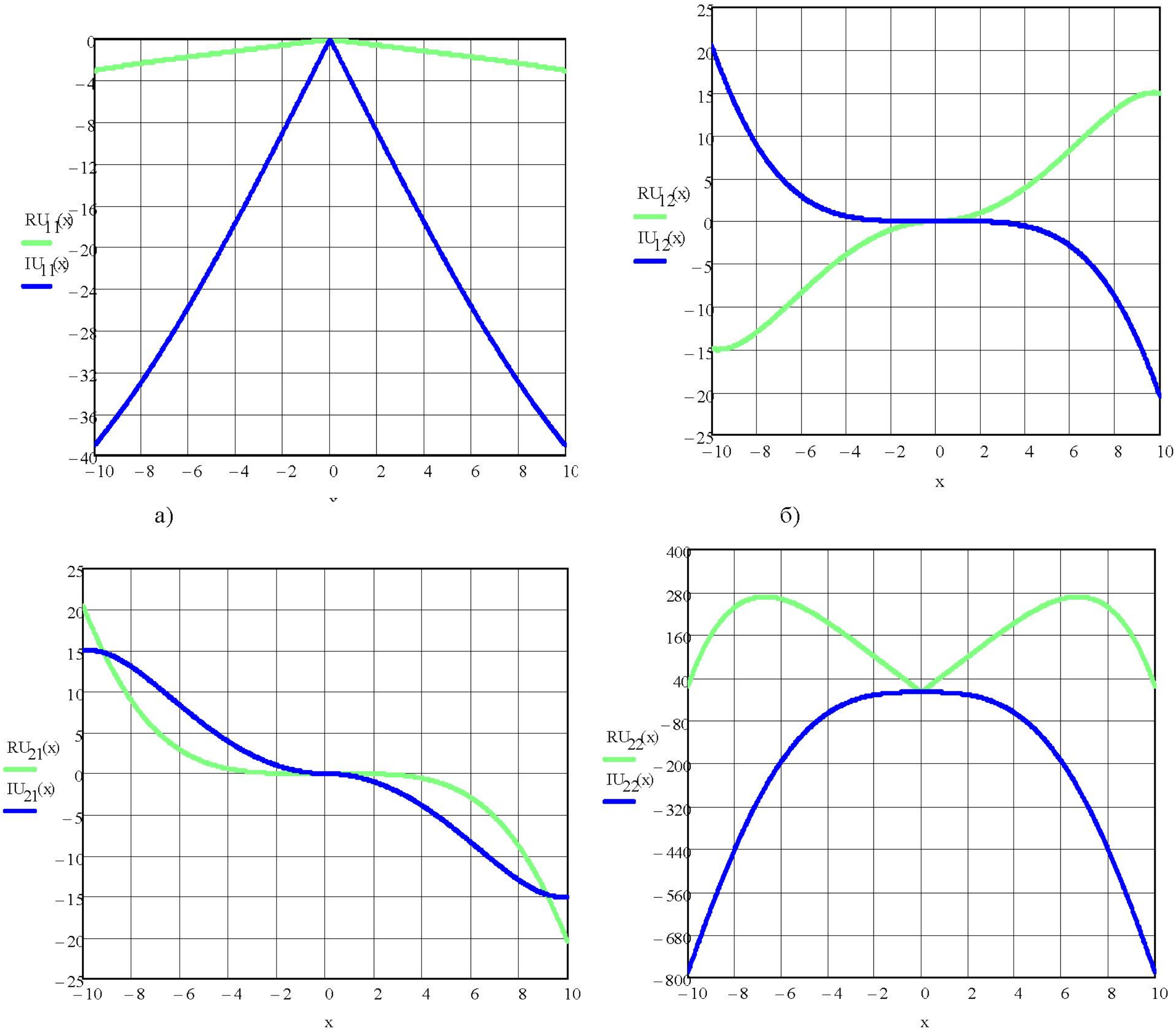
$$\partial_x U_2^j(x,\omega)=-\delta_1^j\,\frac{i\omega\eta\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}+$$

$$-\delta_2^j\operatorname{sgn}(x)\left\{\frac{\omega^2-\lambda_1c^2}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)-c^2\cos x\sqrt{\lambda_2}\right\}$$

в этой точке терпят разрыв первого рода:

$$\tilde{U}_1^j{}_{,x}(\pm 0,\omega)=\pm\frac{1}{2}\delta_1^j,\ \tilde{U}_2^j{}_{,x}(\pm 0,\omega)=\pm\frac{c^2}{2}\delta_2^j \tag{19}$$

(верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему – правый).



а) б) в) г)

Компоненты $U_k^j(x,\omega)$ при $\omega=1$ (γ=0.1, c=1, k=1, η=1)

Эти особенности наглядно продемонстрированы на рисунке 1, где изображены реальная и мнимая часть каждой компоненты [5].

4. Разрешающие уравнения краевой задачи. Используя (6) ипредельные свойства $U_j^i(x,\omega)$ при $x\to\pm 0$ (17), (18), из вида решения (9) получимсистему из четырех линейных алгебраических уравнений в левой и правой граничных точках для определения четырех неизвестных функций на концах стержня:

$$0.5u_1 = c^2\left(\breve{\gamma}\theta_2 - p_2\right) + u_2 U_1^1{,}_x(-2L,\omega) - \left(q_2 + i\omega\eta u_2\right)U_1^2\left(-2L,\omega\right) -$$

$$-\theta_2 U_1^2{,}_x\left(-2L,\omega\right) + \left(\hat{F}_1 * U_1^1 + \hat{F}_2 * U_1^2\right)_{x=-L}$$

$$0.5u_2 = c^2\left(p_1 - \breve{\gamma}\theta_1\right) + u_1 U_1^1{,}_x(2L,\omega) + \left(q_1 + i\omega\eta u_1\right) + \theta_1 U_1^2{,}_x\left(2L,\omega\right) +$$

$$+\left(\hat{F}_1 * U_1^1 + \hat{F}_2 * U_1^2\right)_{x=L}$$

$$0,5\theta_1 = c^2\left(\gamma\theta_2 - p_2\right)U_2^1(-2L,\omega) - c^2 u_2 U_{2,x}^1(-2L,\omega) -$$

$$-\left(q_2 + i\omega\eta u_2\right)U_2^2\left(-2L,\omega\right) + \theta_2 U_{2,x}^2\left(-2L,\omega\right) + \left(F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\right)\Big|_{x=-L},$$

$$0,5\theta_2 = \tag{20}$$

$$+c^2\left\{\left(p_1 - \gamma\theta_1\right)U_2^1(2L,\omega) + u_1 U_{2,x}^1(2L,\omega)\right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k + i\omega\eta u_k\right)U_2^2\left(2L,\omega\right) + \theta_1 U_{2,x}^2\left(2L,\omega\right) + \left(F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\right)\Big|_{x=L}$$

Если $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ – регулярные функции, то

$$\hat{F}_j * U_k^j = H(L - \|x\|)\int_{-L}^{L} F_j(y)U_k^j(x-y,\omega)dy..$$

Для сингулярных $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ следует пользоваться определением свертки [3].

Разрешающую систему уравнений (20) представим в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \left(U_{1,x}^1 - i\omega\eta U_1^2\right)_{(2L)} & -c^2 & \left(\breve{\gamma}c^2 - U_{1,x}^2\right)_{(2L)} & U_1^2\left(2L,\omega\right) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -c\left({}^2U_{2,x}^1 + i\omega\eta U_2^2\right)_{(2L)} & c^2U_2^1\left(2L,\omega\right) & \left(\gamma c^2 U_2^1 - U_{2,x}^2\right)_{(2L)} & -U_2^2\left(2L,\omega\right) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w_1 \\ p_1 \\ \theta_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} \left(-U_{1,x}^1 + i\omega\eta U_1^2\right)_{(-2L)} & c^2 & \left(-\breve{\gamma}c^2 + U_{1,x}^2\right)_{(-2L)} & U_1^2\left(-2L,\omega\right) \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \left(c^2U_{2,x}^1 + i\omega\eta U_2^2\right)_{-2L}, & c^2U_2^1\left(-2L,\omega\right) & \left(-\gamma c^2 U_2^1 + U_{2,x}^2\right)_{-2L} & U_2^2\left(-2L,\omega\right) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ p_2 \\ \theta_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \tag{21}$$

$$= \left\{F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2\Big|_{x=-L}, F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2\Big|_{x=L}, F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\Big|_{x=-L}, F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\Big|_{x=L}\right\}^T$$

(здесь в нижнем индексе в скобках указаны значения *x*, для которых вычисляются элементы матрицы).

Из этой системы легко построить линейную систему алгебраических уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с известными.

Так, например,для КЗ1 неизвестными являются напряжения и тепловые потоки на концах стержня (p_1, p_2, q_1, q_2). Тогда из (21) получим

$$\left\{M_{ij}(L,\omega)\right\}_{4\times4}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\q_1\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1(L,\omega)\\b_2(L,\omega)\\b_3(L,\omega)\\b_4(L,\omega)\end{pmatrix} \quad (22)$$

Определитель матрицы M_{ij} определяет спектр собственных термоупругих колебаний стержня, частоты которых должны удовлетворять уравнению:

$$\det\left\{M_{ij}(L,\omega_k)\right\}=0, \quad k=1,2... \quad (23)$$

В силу (16), это сложное трансцендентное уравнение, корни которого можно определять численно с помощью различных стандартных программ.

В случае собственных колебаний существование решений и его единственность определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера. После определения недостающих граничных функций по формулам (8), (2), определяем перемещения,температуру в стержне.

Для определения термоупругих напряжений подставим решение (9) в (3). В результате получим:

$$\sigma(x,\omega)=\rho c^2\left(\sum_{j=1}^{2}U_1^j{}_{,x}*\hat{G}_j(x,...)+\sum_{j=1}^{2}U_1^j{}_{,x}*\hat{F}_j(x)\right)-\gamma\theta(x,\omega), \quad (24)$$

где все входящие функции определены выше.

Заключение. Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах, а также во всем диапазоне частот колебаний. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Нетрудно видеть, что алгоритм решения сохраняется и для обратных краевых задач, если на одном конце стержнязадать не два краевых значения, а три, а на другом одно, недостающее для разрешимости системы (21), или даже 4 значения на одном, при неизвестных значениях на другом. Этот класс полуобратных и обратных задач очень важен для практических приложений при изготовлении разнообразных контроллеров в измерительных приборах для конструкций и сооружений, работающих в условиях переменных термических и динамических воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970 .

2 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975.

3 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978.

4 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. – 2006. – Т. 6, № 1(19). – С. 16-32.

5 Алексеева Л.А., Ахметжанова М. М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней // Материаловедение. – Бишкек, 2013. – № 2. – С. 46-50.

REFERENCES

1 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970 .

2 Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

3 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978.

4 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения. Математический журнал. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 16-32.

5 Алексеева Л.А., Ахметжанова М. М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. Материаловедение. Бишкек, 2013. № 2. С. 46-50.

Резюме

Л. А. Алексеева

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан)

ТЕРМОСЕРПІМДІ ӨЗЕК ДИНАМИКАСЫНЫҢ СТАЦИОНАРЛЫҚ ШЕТТІК ЕСЕБІ

Өзекті құрылымдардың термодинамикасын зерттеу үшін термосерпімді өзектің стационарлық есебі қарастырылған, өзекке әсер етуші күш пен жылу көздері белгілі болып шамаланған. Жинақталып қорытылған функциялар әдісі негізінде стационарлық шеттік есептің әрбір өзектің соңындағы кешенді амплитудалар: орын ауыстыру, кернеу, температура және жылу ағысы сияқты төрт мәнінің екеуінің аналитикалық шешімі құрылған.

Тірек сөздер: термосерпімділік, өзек, стационарлық тербеліс, фундаментальдық матрица, жинақталған функциялар әдісі.

Summary

L. A. Alexeyeva

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan)

STATIONARY BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DYNAMICS OF THERMOELASTIC CORES

For research of thermodynamics of rods the problem of stationary fluctuations of a thermoelastic core is considered in the assumption that acting dynamic forces and thermal sources are known. On the basis of the generalized functions method the analytical solution of boundary value problemsare constructed when the two complex amplitudes are known from forth ones of movements, stresses, temperature and heat flows on the ends of a core.

Keywords: thermoelasticity, rod, stationary oscillations, fundamental matrix method of generalized functions.

Поступила 05.05.2014 г.