УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], А. А. БЕКОВ[1], Е. С. АЯШЕВА[2],
С. С. ДАИРБЕКОВ[2], А. С. САНСЫЗБАЕВА[2], Д. И. УСИПБЕКОВА[3]

([1]Институт космических исследований им. акад. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан;
[2]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан;
[3]Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан)

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Аннотация. Найден новый интегрируемый случай дифференциальных уравнений вращательных движений твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения, когда главные моменты инерции тела связаны между собой $A = B = 4C$.

Полная система дифференциальных уравнений движения тела около центра масс состоит из трех динамических и трех кинематических уравнений Эйлера, а также из девяти уравнений Пуассона. Эти уравнения в случае $A = B = 4C$ допускают четыре независимых первых интегралов, согласно общей теории, этого достаточно для полного интегрирования вышеназванных дифференциальных уравнений вращательных движений твердого тела относительно его центра масс в ньютоновском поле тяготения. Полученные первые интегралы позволяют записать квадратуры для углов Эйлера.

Полученные квадратуры дают основу для разработки способов нахождения орбитальных параметров движения космических объектов в поступательном и вращательном движениях в центральном поле ньютоновского тяготения. Результаты исследований представляют ценность при разработке модельных задач небесной механики и динамики космического полета.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательные движения, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело в центральном ньютоновском поле тяготения совершает движение около центра масс, тогда полная система дифференциальных уравнений в подвижных осях имеет вид*:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr&=\varepsilon(C-B)\gamma'\gamma'',\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr&=\varepsilon(A-C)\gamma''\gamma,\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq&=\varepsilon(B-A)\gamma\gamma', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} p&=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\\ q&=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,\\ r&=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\dot\gamma=r\gamma'-q\gamma'',\ \dot\gamma'=p\gamma''-r\gamma,\ \dot\gamma''=q\gamma-p\gamma', \qquad (3)$$

$$\gamma=\sin\varphi\sin\theta,\ \gamma'=\sin\theta\cos\varphi,\ \gamma''=\cos\theta, \qquad (4)$$

$$\theta=\arccos\gamma'',\ \varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right),\ \dot\psi=\frac{p\gamma+q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \qquad (5)$$

* Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

где (1) – динамические уравнения Эйлера, (2) – кинематические уравнения Эйлера, (3) – соотношения Пуассона, $\varepsilon = \dfrac{3\mu}{R^3}$, μ – гравитационная постоянная, R – расстояние до центра притяжения, (4) – направляющие косинусы подвижных осей, (5) – соотношения Ю.А.Архангельского, θ, φ, ψ – углы Эйлера, p, q, r – проекции угловой скорости $\overline{\omega}$ на подвижные оси x,y,z, которые направлены по главным центральным осям инерции тела с началом в центре масс, A, B, C – главные моменты инерции тела.

Рассмотрим случай, когда главные центральные моменты инерции тела связаны между собой соотношением

$$A = B = 4C\,. \tag{6}$$

Перепишем (1) с учетом (6)

$$\left.\begin{aligned} &4\frac{dp}{dt} - 3qr = -3\varepsilon\gamma'\gamma'',\\ &4\frac{dq}{dt} + 3pr = 3\varepsilon\gamma\gamma'',\\ &\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из последнего уравнения системы (7) имеем

$$r = r_0 = const\,. \tag{8}$$

Подставим (8) в первые два уравнения системы (7)

$$\left.\begin{aligned} &4\dot{p} - 3qr_0 = -3\varepsilon\gamma''\gamma'',\\ &4\dot{q} + 3pr_0 = 3\varepsilon\gamma\gamma''. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Найдем интеграл энергии. Для этого первое уравнение из (9) умножим на p, второе на q, затем сложим

$$4\left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt}\right) = 3\varepsilon(q\gamma - p\gamma')\gamma''\,,$$

где в соответствии с (3) имеем $(q\gamma - p\gamma') = \dfrac{d\gamma''}{dt}$, отсюда находим интеграл энергии

$$4(p^2 + q^2) - 3\varepsilon\gamma''^2 = 2C_1\,, \tag{10}$$

где C_1 – постоянная интеграла энергии.

Найдем интеграл площадей. Для этого умножим первое из (9) на γ, второе на γ' и сложим

$$4\left(\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt}\right) + 3r_0(p\gamma' - q\gamma) = 0\,, \tag{11}$$

здесь в соответствии с (3)

$$(p\gamma' - q\gamma) = -\frac{d\gamma''}{dt}\,. \tag{12}$$

Подставим (12) в (11)

$$\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt} - \frac{3}{4}r_0\frac{d\gamma''}{dt} = 0\,. \tag{13}$$

Предположим, что до дифференцирования по t (13) имел вид

$$\left(\gamma p + \gamma' q - \frac{3}{4}r_0\gamma''\right) = D = const\,,$$

тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p + \gamma' q - \frac{3}{4}r_0\gamma''\right) = 0\,,$$

с другой стороны, продифференцировав, имеем

$$\frac{d\gamma}{dt}p+\frac{d\gamma'}{dt}q-\frac{3}{4}r_0\frac{d\gamma''}{dt}+\gamma\frac{dp}{dt}+\gamma'\frac{dq}{dt}=0,$$

то есть с учетом (3) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p+\gamma' q-\frac{3}{4}r_0\gamma''\right)=\frac{d\gamma}{dt}p+\frac{d\gamma'}{dt}q=r_0\frac{d\gamma''}{dt}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p+\gamma' q+\frac{1}{4}r_0\gamma''\right)=0,$$

отсюда находим интеграл площадей

$$4(\gamma p+\gamma' q)+r_0\gamma''=4C_2, \qquad (14)$$

где C_2 – постоянная интеграла площадей.

Таким образом, у нас есть четыре первых интеграла:

$$\left.\begin{aligned} &r=r_0=const,\\ &4(p^2+q^2)-3\varepsilon\gamma''^2=2C_1,\\ &4(\gamma p+\gamma' q)+r_0\gamma''=4C_2,\\ &\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=C_3=1. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Проверим их на линейную независимость:

$$\lambda_1(r_0)+\lambda_2(rC_1)+\lambda_3(4C_2)+\lambda_4(C_3)=0, \qquad (16)$$

здесь $r_0\neq 2C_1\neq 4C_2\neq C_3\neq 0$, поэтому (16) выполнимо только при условии

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,$$

то есть найденные четыре первых интеграла (15) линейно независимы, следовательно, их достаточно для полного интегрирования дифференциальных уравнений вращательного движения относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения при $A=B=4C$.

REFERENCES

Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[1], Е. С. Аяшева[2], С. С. Дайырбеков[2], А. С. Сансызбаева[2], Д. И. Үсiпбекова[3]

([1]Академик Ө. М.Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,
[2]Сырдария университетi, Жетiсай, Қазақстан,
[3]Қ. И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетi, Алматы, Қазақстан)

ОРТАЛЫҚ НЬЮТОН КҮШ ӨРIСIНДЕ ҚАТТЫ ДЕНЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ БIР ИНТЕГРАЛДАНАТЫН КЕЗI ТУРАЛЫ

Ньютонның күш өрiсiндегi қатты дененiң массалық центрiне қатысты айналмалы қозғалысының жаңа интегралданатын кезi анықталды.

Бұл шешiмде орталық бас инерциялық моменттер өзара былай байланысады $A=B=4C$. Толық дифференциалдық теңдеулер бұл жағдайда Эйлердiң үш динамикалық, үш кинематикалық және 9 Пуассон қатынастарынан тұрады. Олар $A=B=4C$ болғанда 4 тәуелсiз бiрiншi интегралдар орнатуға мүмкiншiлiк бередi, бұл жалпы теория бойынша айтылған дифференциалдық теңдеулер толық шешiледi деген тұжырым жасау заңды екенiн бiлдiредi.

Бұл квадратуралар арқылы Эйлер бұрыштарын айқын түрде анықтауға мүмкiншiлiк бередi. Олар ғарыштық нысандардың iлгерiлемелi және айналмалы қозғалыстарында қажеттi параметрлердi айқындайды.

Тiрек сөздер: динамика, қатты дене, күштiк өрiс, ньютон тартылыс өрiсi, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененiң инерциялық күйi.

Summary

M. D. Shinibaev[1], A. A. Bekov[1], E. S. Ajasheva[2], S. S. Dairbekov[2], A. S. Sansyzbaeva[2], D. I. Usipbekova[3]

([1]Acad. A. M Sultangazin Space research institute, Almaty, Kazakhstan;
[2]University of the Syr-Dariya, Djetysay, Kazakhstan;
[3]Kazakh national technical university after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan)

ABOUT ONE INTEGRIRUEMOST CASE OF THE RIGID BODY DYNAMICS IN CENTRAL NEWTONS-RUSSIAN GRAVITATIONAL FIELD

Found a new integrable case of the differential equations of rotational motion of motions of a rigid body about the center of mass in the Central Newtonian field, the burden of when the principal moments of inertia of the body are linked $A = B = 4C$.

A complete system of differential equations of motion of a body about the center of mass consists of three dynamic and three of the kinematic equation of Euler, as well as of the nine Poisson equations. These equations in the case $A = B = 4C$ allow four independent first integrals, according to the General theory, this is enough to fully integrated of the above differential equation of rotational motions of a rigid te La relative to its center of mass in Newtonian gravitational field. The first in-tegral allow you to record quadrature for the Euler angles.

Received quadrature provide a basis for developing ways of finding the orbital parameters of motion of space objects in translational and rotational movements in the Central Newtonian field of gravitation. The research results are of value in the development of model problems of celestial mechanics and dynamics of space flight.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 05.05.2014 г.