УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], *А. А. БЕКОВ*[1], *А. АБЖАПБАРОВ*[2], *С. С. ДАЙЫРБЕКОВ*[3], *Е. КЫТАЙБЕКОВ*[3], *С. ЖОЛДАСОВ*[3]

([1]Институт космических исследований им. акад. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,
[2]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан,
[3]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ЭЙЛЕРА В СЛУЧАЕ $A = B = 4C$ НА ИНТЕРВАЛЕ $\alpha_4 \le \gamma'' \le \alpha_3$

Аннотация. Найдены явные функции для углов Эйлера в случае интегрируемости $A = B = 4C$.

Осесимметричное тело, совершающее вращательное движение в центральном ньютоновском поле тяготения при $A = B = 4C$, является моделью любого космического объекта, который совершает неуправляемое вращательное движение в околоземном космическом пространстве, поэтому решение поставленной задачи на сегодня является актуальной проблемой. Ранее было установлено, что дифференциальные уравнения задачи о движении твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения при $A = B = 4C$ допускают четыре первых независимых интеграла.

Согласно общей теории наличие этих интегралов приводит к полному решению поставленной задачи. Ниже приводится метод вывода углов Эйлера из указанных первых интегралов.

Решение задачи принципиально важно при анализе движений неуправляемых объектов в околоземном космическом пространстве.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательное движение, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает вращательное движение относительно центра масс в ньютоновском центральном поле тяготения и имеет распределение масс, соответствующее следующему равенству

$$A = B = 4C, \tag{1}$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции.

Введем две системы координат с общим началом в центре масс тела $Ox_1y_1z_1$ – фиксированная система координат, $Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с телом, оси которой направлены по главным центральным осям тела, причем положения осей определяется таблицей направляющих косинусов

	x_1	y_1	z_1
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

При этих расположениях имеем следующие дифференциальные уравнения движения твердого тела относительно центра масс [1]:

$$\left.\begin{aligned} &4\dot p - 3qr = -3\varepsilon\gamma'\gamma'', \\ &4\dot q + 3pr = 3\varepsilon\gamma\gamma'', \\ &\frac{dr}{dt} = 0, \quad r = r_0 - const; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\frac{d\gamma}{dt} = r_0\gamma' - q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r_0\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma',\right\} \tag{3}$$

$$p = \dot\psi\gamma + \dot\theta\cos\varphi, \; q = \dot\psi\gamma' - \dot\theta\sin\varphi, \; r_0 = \dot\psi\gamma'' + \dot\varphi, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \dfrac{3\mu}{R^3}$, μ – гравитационная постоянная, R– расстояние центра масс тела от притягивающего тела, p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ на подвижные оси, θ, φ, ψ – углы Эйлера, (2) – динамические уравнения Эйлера, (3) – уравнения Пуассона, (4) – кинематические уравнения Эйлера.

К этим уравнениям добавим соотношения Ю. А. Архангельского*

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right), \; \dot\psi = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \; \theta = \arccos\gamma'',$$

$$\gamma = \sin\varphi\sin\theta, \; \gamma' = \cos\varphi\sin\theta, \; \gamma'' = \cos\theta. \tag{5}$$

Ранее для (2)÷(4) получены следующие четыре независимых интеграла

$$\left.\begin{aligned} &r = r_0 - const, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ &4(p^2+q^2) - 3\varepsilon\gamma''^2 = 2C_1, \\ &4(p\gamma + q\gamma') + r_0\gamma'' = 4C_2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из (4) находим

$$p^2 + q^2 = \dot\theta^2 + \dot\psi^2(1-\gamma''^2). \tag{7}$$

Найдем $\dot\theta^2$ из (5)

* Названо с целью экономии места.

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Исключим $(p\gamma + q\gamma')$ из следующих выражений:

$$\dot{\psi} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2},\ 4(p\gamma + q\gamma') + r_0\gamma'' = 4C_2,$$

тогда получим

$$\dot{\psi}^2 = \frac{(4C_2 - r_0\gamma'')^2}{16(1-\gamma''^2)}. \tag{9}$$

Определим из (6) (p^2+q^2):

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{4}(2C_1 + 3\varepsilon\gamma''^2). \tag{10}$$

Перепишем (7), используя (8), (9), (10) и исключив (p^2+q^2), $\dot{\theta}^2$ и $\dot{\psi}^2$, найдем:

$$dt = \frac{d\gamma''}{\sqrt{a_4\gamma''^4 + a_3\gamma''^3 + a_2\gamma''^2 + a_1\gamma'' + a_0}}, \tag{11}$$

где

$$a_4 = -\frac{3}{4}\varepsilon,\ a_3 = 0,\ a_2 = \frac{1}{16}(12\varepsilon - 8C_1 - r_0^2),\ a_1 = \frac{1}{2}C_2 r_0,\ a_0 = \frac{1}{2}(C_1 - 2C_2^2).$$

Преобразуем (11)

$$dt = \frac{1}{a_{10}}\cdot\frac{d\gamma''}{\sqrt{-\gamma''^4 + b_3\gamma''^3 + b_2\gamma''^2 + b_1\gamma'' + b_0}}, \tag{12}$$

здесь

$$a_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon,\ b_3 = 0,\ b_2 = \frac{a_2}{a_{10}},\ b_1 = \frac{a_1}{a_{10}},\ b_0 = \frac{a_0}{a_{10}}.$$

Перейдем от (12) к нормальной форме Лежандра [2], обозначая корни подкоренного полинома через α_1, α_2, α_3, α_4, располагая их в порядке убывания $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ имеем два интервала

I) $\alpha_4 \le \gamma'' \le \alpha_3$ и II) $\alpha_2 \le \gamma'' \le \alpha_1$,

где полином

$$G_4(\gamma'') = -\gamma''^4 + b_3\gamma''^3 + b_2\gamma''^2 + b_1\gamma'' + b_0$$

положителен.

На I) интервале $\alpha_4 \le \gamma'' \le \alpha_3$ имеем

$$\gamma'' = \frac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}\sin^2\lambda}{\alpha_{31} + \alpha_{43}\sin^2\lambda} \text{ при } \gamma'' = \alpha_4,\ \lambda = 0; \tag{13}$$

при $\gamma'' = \alpha_3$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$,

$$a_{10}dt = \mu_0\frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}},\ 0 < k^2 < 1, \tag{14}$$

$$\mu_0 = \frac{2}{(\alpha_{31}\alpha_{42})^{1/2}},\ k^2 = \frac{\alpha_{43}\alpha_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{42}}, \text{ где } \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i,\ (i,k = 1,2,3,4).$$

Введем обозначение $a = \frac{a_{10}}{\mu_0}$, $u = at$, тогда имеем

$$u = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}}, \; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}}, \tag{15}$$

здесь К – полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Обратив интеграл (15), имеем [3]:

$$\lambda = atu = \upsilon + \left(\frac{k^2}{8} + \frac{k^4}{16}\right)\sin 2\upsilon + O(k^5), \; O(k^5) \approx 10^{-9}, \tag{16}$$

здесь $\upsilon = \frac{\pi}{2K} a \cdot t = nt$, $n = \frac{\pi a}{2K}$.

Таким образом, из (16) найдем

$$\lambda = nt + \left(\frac{1}{8}k^2 + \frac{1}{16}k^4\right)\sin 2nt. \tag{17}$$

Теперь преобразуем (13)

$$\gamma'' = \gamma''_{00} + k^2\gamma''_{02} + k^2\gamma''_{12}\cos 2\upsilon + k^2\gamma''_{22}\cos 4\upsilon \tag{18}$$

или

$$\gamma'' = \gamma''_{00} + k^2\gamma''_{02} + k^2\gamma''_{12}\cos 2nt + k^2\gamma''_{22}\cos 4nt, \tag{19}$$

где

$$\gamma''_{00} = \frac{2\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{33}}{2\alpha_{31} + \alpha_{43}}, \; \gamma''_{02} = -\frac{\alpha_{43}}{8}\left[\frac{1}{4(2\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43})} + \frac{\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{42}}{\alpha_{12}}\right],$$

$$\gamma''_{12} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{42}}{\alpha_{12}}\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_{31} + \alpha_{43}} - \frac{2\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}}{4}\right),$$

$$\gamma''_{22} = \frac{\alpha_{43}}{8}\left(\frac{2\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}}{4} - \frac{\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{42}}{\alpha_1}\right).$$

Угол нутации определяется из (5) и (18)

$$\theta = \arccos\left\{\gamma''_{00} + k^2\gamma''_{02} + k^2\gamma''_{12}\cos 2nt + k^2\gamma''_{22}\cos 4nt\right\}. \tag{19}$$

Угол прецессии найдем из (9)

$$\psi = \frac{1}{4}\int_0^t \frac{(4C_2 - r_0\gamma'')}{1-\gamma''^2}dt, \tag{20}$$

где γ'' определено выражением (18).

Угол собственного вращения найдем из (4)

$$\varphi = \int_0^t \left[r_0 - \gamma'' \cdot \frac{(4C_2 - r_0\gamma'')}{4(1-\gamma''^2)}\right]dt. \tag{21}$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

2 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

3 Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука, 1986. – 320 с.

REFERENCES

1 Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).

2 Korn G., Korn T. Spravochnik po matematyke. M.: Nauka, 1973. 832 p. (in Russ.).

3 Aksenov E.P. Spezialnye funkzii v nebesnoy mechanike. M.: Nauka, 1986. 320 p. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[1], А. Әбжапбаров[2], С. С. Дайырбеков[3], Е. Қытайбеков[3], С. Жолдасов[3]

([1]Академик Ө. М.Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,
[2]М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,
[3]Сырдария университеті, Жетісай, Қазақстан)

$\alpha_4 \le \gamma'' \le \alpha_3$ ИНТЕРВАЛЫНДА $A = B = 4C$ ШАРТЫНДАҒЫ ЭЙЛЕР БҰРЫШТАРЫН АНЫҚТАУ

$A = B = 4C$ интегралданатын кезеңіндегі қатты дененің айналмалы қозғалысын сипаттайтын Эйлер бұрыштары айқын түрде анықталды.

Өстік симметриялық дене $A = B = 4C$ жағдайында орталық ньютон өрісіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері жасанды жер серігінің математикалық моделін береді, егер ол қозғалыс жер маңындағы гарыштық кеңістікте орындалса.

Зерттеу басқарылмайтын ғарыштық объектілеріне арналған (штаттық жағдайдан ығысқан жер серіктері, ғарыштық қоқыстар т.б.), сондықтан мақала өзекті проблемаға айналады.

Егер дифференциалдық теңдеулер қатты дененің массалық центріне қатысты қозғалысын сипаттайтын болса, онда жалпы теория бойынша шешімді табу үшін тәуелсіз төрт бірінші интегралдардың бар болуы жеткілікті. Бірақ ол тек теория, өйткені қозғалыс заңын ол интегралдардан қорытып алатын нақты әдіс жоқ. Бұл мақалада сондай әдіс орнатылған.

Есептің шешімі басқарылмайтын гарыштық объектілердің қозғалысын талдауда қолданыста болады.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Summary

M. D. Shinibaev[1], A. A. Bekov[1], A. Abzhapbarov[2], S. S. Dajyrbekov[3], E. Kytajbekov[3], S. Zholdasov[3]

([1]Acad. A. M Sultangazin Space research institute, Almaty, Kazakhstan,
[2]M. Auezov South-Kazakhstan state university, Shymkent, Kazakhstan,
[3]University of the Syr-Dariya, Djetysay, Kazakhstan)

THE DEFINITION OF EULER ANGLES IN THE CASE $A = B = 4C$ IN THE INTERVAL $\alpha_4 \le \gamma'' \le \alpha_3$

We find the explicit functions for the Euler angles in the case of integrability of $A = B = 4C$.

Axisymmetric body that executes the rotary movement in Central new tanovska the gravitational field at $A = B = 4C$, is a model of any space objects that, which makes unmanaged rotational motion in the near-earth space-ish space, so the solution of the problem for today is an important issue. Previously, it was found that the differential equations of the problem of the movement-Institute of solid body about the center of mass in Newtonian gravitational field at $A = B = 4C$ allow the first four independent integral.

According to the General theory of the existence of these integrals leads to complete the task. Below is the output method of Euler angles of these first integrals.

The solution is fundamentally important in the analysis of movements unmanaged objects comrade in the near-earth space.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 05.05.2014 г.