УДК 517.956

*С. А. АЛДАШЕВ*

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан)

# КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

**Аннотация.** В работе показано, что корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе однозначно разрешима. Получен, также критерий единственности решения.

**Ключевые слова:** задача Дирихле, уравнение Лаврентьева–Бицадзе, цилиндрическая область.

**Тірек сөздер:** Дирихле есебі, Лаврентьев–Бицадзе теңдеуі, цилиндрлік аймақ.

**Keywords:** the Dirichlet problem, the equation of the Lavrent'ev-Bitsadze, the cylindrical region.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости и в пространстве.

Более полную библиографию работ, посвященных этой тематике, можно найти в монографиях [7, 8].

В данной работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе однозначно разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства $E_{m+1}$ точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ - длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через $\Omega_\alpha$ и $\Omega_\beta$ части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ - части поверхности Г, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$ ; $\sigma_\alpha$ -верхнее, а $\sigma_\beta$ - нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$. Пусть далее $S$ - общая часть границ областей $\Omega_\alpha$ ,$\Omega_\beta$ представляющее множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в $E_m$ .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$sgnt\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_x$ - оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$, которое играет важную роль в теории обтекания тонких тел [9].

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, \ldots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

***Задача D(Дирихле).*** Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$,удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta)\,, u\big|_{\sigma_\alpha} = \psi_1(t,\theta)\,, \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \quad u\big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$, $\varphi_2(1, \theta) = \psi_2(\beta, \theta)$, $\psi_1(0, \theta) = \psi(0, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ -система линейно независимых сферических функций порядка $n$, $1 \leq k \leq k_n$ , $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$ , $W_2^l(S),\ l = 0,1,\ldots$ –пространства Соболева.

Имеет место ([10])

***Лемма 1.*** Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, Если $l \geq m-1$ то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка, $p \le l-m+1$ , сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f_n^k(r) = \int_H f(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH, \tag{4}$$

где, H-единичная сфера в $E_m$.

***Лемма 2.*** Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$ необходимо и достаточно,чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \le c_1, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \le c_2, \;\; c_1, c_2 = const.$$

Через $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\bar{\psi}_{1n}^k(t)$, $\bar{\psi}_{2n}^k(t)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S), \psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), \psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l \ge \frac{3m}{2}$, и имеет место

$$\cos \mu_{s,n}\alpha \text{ sh } \mu_{s,n}\beta \, f \ne \sin \mu_{s,n}\alpha \text{ ch } \mu_{s,n}\beta, \; s = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то задача D однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}$ - положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+(m-2)/2}(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

***Теорема 2.*** Решение задачи D единственна, тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).

***Доказательство теоремы 1.*** В сферических координатах уравнения (1) в области $\Omega_\alpha$ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0, \tag{6}$$

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta j} \frac{\partial}{\partial \theta j}\left(g_j \sin^{m-j-1}\theta j \frac{\partial}{\partial \theta j}\right), g_1 = 1 \;\; g_j = \left(\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1}\right)^2, j>1.$$

Известно ([10]), что спектр оператора $\delta$ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$ каждому из которых соответствует $k_n$ ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи D в области $\Omega_\alpha$ принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$-функций, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$([10]), будет иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, k = \overline{1,n}, n = 0,1 \ldots. \tag{8}$$

При этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \; \bar{u}_n^k(1,t) = \bar{\psi}_{1n}^k(t), \; k = \overline{1,n}, n = 0,1 \ldots. \tag{9}$$

В (8), (9) произведя замену $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{1n}^k(t)$, получим

$$\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{\vartheta}_{nr}^k - \bar{\vartheta}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{\vartheta}_n^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \; \bar{u}_n^k(1,t) = 0 \;\; k = \overline{1,n}, n = 0,1 \ldots, \tag{11}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = \psi_{1ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{1n}^k, \; \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} \vartheta_n^k(r,t)$, задачу (10),(11) приведем к следующей задаче

$$L\vartheta_n^k \equiv \vartheta_{nrr}^k - \vartheta_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \vartheta_n^k = f_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\ \vartheta_n^k(1,t)=0 \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\quad f_n^k(r,t)=r^{\frac{1-m}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),\qquad \varphi_n^k(r,t)=r^{\frac{1-m}{2}}\bar{\varphi}_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (12),(13) ищем в виде

$$\vartheta_n^k(r,t)=\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t), \tag{14}$$

где $\vartheta_{1n}^k(r,t)$-решение задачи

$$L\vartheta_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{15}$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha)=0,\vartheta_{1n}^k(1,t)=0. \tag{16}$$

а $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – решение задачи

$$L\vartheta_{2n}^k=0, \tag{17}$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_n^k(r),\ \ \vartheta_{2n}^k(r,t)=0 \tag{18}$$

Рещение выше указанных задач, аналогично [11] рассмотрим в виде

$$\vartheta_n^k(r,t)=\textstyle\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t). \tag{19}$$

При этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\textstyle\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\ \bar{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{20}$$

Подставляя (19) в (15),(16), с учетом (20), получим

$$R_{srr}+\tfrac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,0<r<1, \tag{21}$$

$$R_s(1)=0,\quad |R_s(0)|<\infty, \tag{22}$$

$$T_{stt}+\mu T_s=-a_{s,n}(t),0<t<\alpha, \tag{23}$$

$$T_s(\alpha)=0. \tag{24}$$

Ограниченным решением задачи (21),(22) является (|12|)

$$R_{s,n}(r)=\sqrt{r}J_v(\mu_{s,n}r), \tag{25}$$

где $v=n+\frac{m-2}{2},\mu=\mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (23) представимо в виде (|12|)

$$T_{s,n}(t)=c_{1s}cos\mu_{s,n}t+c_{2s}sin\mu_{s,n}t+\frac{cos\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{s,n}(\xi)sin\mu_{s,n}\xi d\xi-$$

$$-\tfrac{sin\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\textstyle\int_0^t a_{s,n}(\xi)cos\mu_{s,n}\xi d\xi, \tag{26}$$

$c_{1s},c_{2s}$ —произвольные постоянные ,удовлетворив условию (24) будем иметь

$$c_{1s}cos\mu_{s,n}\alpha+c_{2s}sin\mu_{s,n}\alpha+\frac{cos\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)sin\mu_{s,n}\xi d\xi-$$

$$-\tfrac{sin\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\textstyle\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)cos\mu_{s,n}\xi d\xi=0. \tag{27}$$

Подставляя (25) в (20) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_v(\mu_{s,n}r), \tag{28}$$

$$r^{-\frac{1}{2}}\bar{\varphi}_{1n}^k(r)=\textstyle\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_v(\mu_{s,n}r),\ o<r<1.$$

Ряды (28)- разложения в ряды Фурье-Бесселя (|13|), если

$$a_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\, f_n^k(\xi,t) J_v(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{29}$$

$$b_{s,n} = \frac{2}{[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\, \bar{\varphi}_{1n}^k(\xi,t) J_v(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{30}$$

$\mu_{s,n}, s = 1,2,\dots$ -положительные нули функций Бесселя $J_v(\mu_{s,n}r)$.

Из (25), (26) получим решение задачи (15) , (16)

$$\vartheta_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\, T_{s,n}(t) J_v(\mu_{s,n}r), \tag{31}$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (29).

Далее, подставляя (19) в (17) ,(18), с учетом (20), будем иметь

$$T_{stt} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0,\ 0 < t < \alpha\ , \tag{32}$$

$$T_s(\alpha) = b_{s,n}. \tag{33}$$

Общее решение уравнения (32) записывается в виде

$$T_{s,n}(t) = c_{1s}' \cos\mu_{s,n}t + c_{2s}' \sin\mu_{s,n}t, \tag{34}$$

удовлетворив которого условию (33) получим

$$c_{1s}' \cos\mu_{s,n}\alpha + c_{2s}' \sin\mu_{s,n}\alpha = b_{s,n}\ , \tag{35}$$

где $b_{s,n}$ находится из (30).

Из (25), (34) найдем решение задачи (17), (18)

$$\vartheta_{2n}^k(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}\left(c_{1s}' \cos\mu_{s,n}t + c_{2s}' \sin\mu_{s,n}t\right) J_V(\mu_{s,n}r) \tag{36}$$

Теперь переходим в области $\Omega_\beta$ к первой краевой задаче для уравнения

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} = 0 \tag{37}$$

с условием (3).

Решения задачи (37), (3) будем искать в виде (7).

Подставляя (7) в (37) получим уравнение

$$u_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = 0,\ \ k = \overline{1,k_n},\ \ n = 0,1,\dots, \tag{38}$$

при этом краевое условие (3) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \varphi_{2n}^k(r), \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{2n}^k(t), k = \overline{1,k_n},\ \ n = 0,1,\dots . \tag{39}$$

Произведя замены $\bar{\omega}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{2n}^k(t)$, а затем $\bar{\omega}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}}\omega_n^k(r,t)$ задачу (38),(39) приведем к следующей задаче

$$L\omega_n^k = \omega_{nrr}^k + \omega_{ntt}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\omega_n^k = g_n^k(r,t), \tag{40}$$

$$\omega_n^k(r,\beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \omega_n^k(1,t) = 0, \tag{41}$$

$$g_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\left[-\psi_{2ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k(t)\right], \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\left[\varphi_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta)\right].$$

Решение задачи (40),(41) ищем в виде

$$\omega_n^k(r,t) = \omega_{1n}^k(r,t) + \omega_{2n}^k(r,t), \tag{42}$$

где $\omega_{1n}^k(r,t)$ решение задачи

$$L\omega_{1n}^k = g_n^k(r,t), \tag{43}$$

$$\omega_{1n}^k(r,\beta) = 0, \quad \omega_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{44}$$

а $\omega_{1n}^k(r,t)$ – решение задачи

$$L\omega_{2n}^{k} = 0, \tag{45}$$

$$\omega_{2n}^{k}(r,t) = \bar{\varphi}_{2n}^{k}(r)\,, \quad \omega_{2n}^{k}(1,t) = 0. \tag{46}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\omega_{n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)\,V_s(t)\,, \tag{19′}$$

при этом пусть

$$g_{n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,n}(t) R_{s,n}(r), \bar{\varphi}_{2n}^{k}(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} R_{s,n}(r). \tag{47}$$

Подставляя (19′) в (43), (44), с учетом (47), получим задачу (21),(22), решение которого имеет вид (25), и задачу

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^{2} V_s = d_{s,n}(t), \ \ \beta < t < 0, \tag{48}$$

$$V_s(\beta) = 0. \tag{49}$$

Общее решение уравнения (48) представимо в виде ([10])

$$V_{s,n}(t) = c_{1s} ch\mu_{s,n} t + c_{2s} sh\mu_{s,n} t + \frac{ch\mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_{t}^{0} d_{s,n}(\xi) sh\mu_{s,n}\xi d\xi - \frac{sh\mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_{t}^{0} d_{s,n}(\xi) ch\mu_{s,n}\xi d\xi\,, \tag{50}$$

удовлетворив которого условию (49) будем иметь

$$c_{1s} ch\mu_{s,n} t + c_{2s} sh\mu_{s,n} t + \frac{ch\mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_{t}^{0} d_{s,n}(\xi) sh\mu_{s,n}\xi d\xi - \frac{sh\mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_{t}^{0} d_{s,n}(\xi) ch\mu_{s,n}\xi d\xi = 0. \tag{51}$$

Подставляя (25) в (47) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} g_{n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,n}(t) J_v(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \bar{\varphi}_{2n}^{k}(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} J_v(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1.$$

которые являются рядами Фурье-Бесселя, если

$$d_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, g_n^k(\xi,t) J_v(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi. \tag{52}$$

$$e_{s,n} = \frac{2}{[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \bar{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_v(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi \tag{53}$$

Из (25), (50) получим решение задачи (43), (44)

$$\omega_{1n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_v(\mu_{s,n} r), \tag{54}$$

где $d_{s,n}(t)$ определяется из (52).

Далее, подставляя (19′) в (45), (46), с учетом (47), получим задачу

$$V_{stt} - \mu_s^2 V_s = 0, \quad \beta < t < 0, \tag{55}$$

$$V_s(\beta) = e_{s,n}. \tag{56}$$

Общее решение уравнения (55) имеет вид

$$V_{s,n}(t) = c'_{1s} ch\mu_{s,n} t + c'_{2s} sh\mu_{s,n} t\,, \tag{57}$$

удовлетворив условию (56) имеем

$$c'_{1s} ch\mu_{s,n}\beta + c'_{2s} sh\mu_{s,n}\beta = e_{s,n}, \tag{58}$$

где $e_{s,n}$ находится из (53).

Из (25), (58) найдем решение задачи (45), (46)

$$\omega_{2n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\left(c'_{1s} ch\mu_{s,n} t + c'_{2s} sh\mu_{s,n} t\right) J_v(\mu_{s,n} r). \tag{59}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $c_{1s}, c_{2s}$ и $c'_{1s}, c'_{2s}$ из (26), (51) и (35), (58) получим следующие системы алгебрических уравнений

$$\begin{cases} \mu_{s,n}(c_{1s}\cos\mu_{s,n}\alpha + c_{2s}\sin\mu_{s,n}\alpha) = (\sin\mu_{s,n}\alpha)\int\limits_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}d\xi - (\cos\mu_{s,n}\alpha)\int\limits_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi, \\ \mu_{s,n}(c_{1s}ch\mu_{s,n}\beta + c_{2s}sh\mu_{s,n}\beta) = (\mathrm{sh}\,\mu_{s,n}\beta)\int\limits_\beta^0 d_{s,n}(\xi)ch\mu_{s,n}\xi d\xi - (ch\mu_{s,n}\beta)\int\limits_\beta^0 d_{s,n}(\xi)\,\mathrm{sh}\,\mu_{s,n}\xi d\xi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'_{1s}\cos\mu_{s,n}\alpha + c'_{2s}\sin\mu_{s,n}\alpha = b_{s,n}, \\ c'_{1s}ch\mu_{s,n}\beta + c'_{2s}\,\mathrm{sh}\,\mu_{s,n}\beta = e_{s,n}, \end{cases}$$

которые однозначно разрешимы, если выполняется условие (5).

Следовательно, из (14), (42) получим единственное решение задачи D в виде ряда

$$\begin{gathered} u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}}[\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)]\right\} Y_{n,m}^k(\theta), t > 0, \\ u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}}[\omega_{1n}^k(r,t) + \omega_{2n}^k(r,t)]\right\} Y_{n,m}^k(\theta), t < 0, \end{gathered} \tag{60}$$

где $\vartheta_{1n}^k(r,t), \vartheta_{2n}^k(r,t)$ определяются из (31), (36), а $\omega_{1n}^k(r,t), \omega_{2n}^k(r,t)$ из (54), (59).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя ([14]):

$1^0$. Если $\mu_{\nu,1}$, $\mu_{\nu,2}$, …– положительные нули функций $J_\nu(z)$ , упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < \cdots, \quad \nu > -1.$$

$2^0$. Пусть $\mu_\nu$, $\mu'_\nu$, $\mu''_\nu$ являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z), J''_\nu(z)$ соответственно

Тогда

$$\begin{gathered} \sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \nu > 0, \\ \sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \nu > 0 \\ \sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)},\ \nu > 1, \end{gathered}$$

и формулы ([13, 11])

$$\begin{gathered} \sin z = z(1 - z\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2), \\ J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu \ge 0, \\ 2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \end{gathered}$$

применяя признак Даламбера, доказываются, что ряды (31), (36), (54), (59) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее используя оценки ([13, 10])

$$|J_\nu(z)| \le \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \tag{61}$$

$$|k_n| \le c_1 n^{m-2}, \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, j = \overline{1,m-1}, q = 0,1,\dots,$$

Γ(z) – гамма функция, а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$ показывается, что полученное решение (60) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$.

Теорема 1 доказано.

***Доказательство теоремы 2.*** Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 вытекает, что решение задачи D единственно.

Пусть теперь условие (5) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче D будем искать в виде (6), то приходим к краевым задачам $t > 0$

$$L\vartheta_n^k = 0,$$
$$\vartheta_n^k(r,\alpha) = 0, \vartheta_n^k(1,t) = 0,$$

и при $t < 0$

$$L\omega_n^k = 0,$$
$$\omega_n^k(r,\beta) = 0, \omega(1,t) = 0.$$

решениями которых, являются функции

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sqrt{r}(sin\mu_{l,n}t + cos\mu_{l,n}t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r),$$

$$\omega_n^k(r,t) = \sqrt{r}\left(sh\mu_{l,n}t + ch\mu_{l,n}t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r\right).$$

Следовательно, нетривиальные решения однородной задачи D записываются в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p}r^{\frac{(2-m)}{2}}(sin\mu_{l,n}t + cos\mu_{l,n}t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r)Y_{n,m}^k(\theta),$$
$$t > 0,$$
$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p}r^{\frac{(2-m)}{2}}(sh\mu_{l,n}t + ch\mu_{l,n}t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r)Y_{n,m}^k(\theta),$$
$$t < 0.$$

Из оценок (61) следует ,аналогично [15,16], что она принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, если $p > \frac{3m}{2}$.

### ЛИТЕРАТУРА

1 Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112, № 3. – С. 386-389.

2 Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // ДАН СССР. – 1958. – Т. 122, № 2. – С.167-170.

3 Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Доклады РАН. – 1993. – Т. 336, № 6. – С. 696-698; – Т. 333, № 1. – С. 16-18.

4 Сабитов К.Б. Задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Доклады РАН. – 2007. – Т. 413, № 1. – С. 23-26.

5 Алдашев С.А. Критерий единственности решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Материалы межд. Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик, НИИПМА КБНЦ РАН, 2010. – С. 22-23.

6 Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqeness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J. Math. Mech. – 1969 – Vol. 18, 8.

7 Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. – Нальчик: Эльбрус, 1998. – 168 с.

8 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

9 Pivko S. On nonlinear effects in stender and a related one // Publ. I'inst. Math. N.S. – 1969. – Vol. 9(23).

10 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

11 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 659 с.

12 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

13 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 297 с.

14 Ватсон Г. Теория бесселевых функций. – Т. 1. – М.: ИЛ, 1949.

15 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

16 Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 34, № 1. – С. 64-68.

### REFERENCES

1 Shabat B.V. Primery reshenija zadachi Dirihle dlja uravnenija smeshannogo tipa. DAN SSSR. 1957. T. 112, № 3. S. 386-389.

2 Bicadze A.V. Nekorrektnost' zadachi Dirihle dlja uravnenij smeshannogo tipa v smeshannyh oblastjah. DAN SSSR. – 1958. T. 122, № 2. S.167-170.

3 Soldatov A.P. Zadachi tipa Dirihle dlja uravnenija Lavrent'eva-Bicadze. Doklady RAN. 1993. T. 336, № 6. S. 696-698; T. 333, № 1. S. 16-18.

4 Sabitov K.B. Zadachi Dirihle dlja uravnenija smeshannogo tipa v prjamougol'noj oblasti. Doklady RAN. 2007. T. 413, № 1. S. 23-26.

5 Aldashev S.A. Kriterij edinstvennosti reshenija zadachi Dirihle v cilindricheskoj oblasti dlja mnogomernogo uravnenija Lavrent'eva-Bicadze. Materialy mezhd. Rossijsko-Bolgarskogo simpoziuma «Uravnenija smeshannnogo tipa i rodstvennye problemy analiza i informatiki». Nal'chik, NIIPMA KBNC RAN, 2010. S. 22-23.

6 Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains. J. Math. Mech. 1969 Vol. 18, 8.

7 Hachev M.M. Pervaja kraevaja zadacha dlja linejnyh uravnenij smeshannogo tipa. Nal'chik: Jel'brus, 1998. 168 s.

8 Nahushev A.M. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenija v chastnyh proizvodnyh. M.: Nauka, 2006. 287 s.

9 Pivko S. On nonlinear effects in stender and a related one. Publ. I'inst. Math. N.S. 1969. Vol. 9(23).

10 Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962. 254 s.

11 Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1977. 659 s.

12 Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1965. 703 s.

13 Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii T. 2. M.: Nauka, 1974. 297 s.

14 Vatson G. Teorija besselevyh funkcij. T. 1. M.: IL, 1949.

15 Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskih i smeshannyh uravnenij. Almaty: Gylym, 1994. 170 s.

16 Aldashev S.A. O zadachah Darbu dlja odnogo klassa mnogomernyh giperbolicheskih uravnenij. Differenc. uravnenija. 1993. T. 34, № 1. S. 64-68.

## Резюме

*С. А. Алдашев*

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

КӨП ӨЛШЕМДІ ЛАВРЕНТЬЕВ-БИЦАДЗЕ ТЕҢДЕУІНЕ ЦИЛИНДРЛІК АЙМАҚТА
ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ КОРРЕКТІЛІГІ

Жұмыста көп өлшемді Лаврентьев-Бицадзе теңдеуіне цилиндрлік аймақта Дирихле есебінің коррективтілігі көрсетілген және де шешімнің жалғыздық критерийі алынған.

**Тірек сөздер:** Дирихле есебі, Лаврентьев–Бицадзе теңдеуі, цилиндрлік аймақ.

## Summary

*S. A. Aldashev*

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan)

THE CORRECTNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN
FOR MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS OF THE LAVRENT'EV-BITSADZE

It is shown that the correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional equations of the Lavrent'ev-Bitsadze uniquely solvable. Also obtain a uniqueness criterion for solutions.

**Keywords:** the Dirichlet problem, the equation of the Lavrent'ev-Bitsadze, the cylindrical region.