УДК 531.1

А. А. БЕКОВ[1], М. Д. ШИНИБАЕВ[1], С. С. ДАИРБЕКОВ[2], А. АБЖАПБАРОВ[3], Е. К. АКИНБЕКОВ[3], К. С. АСТЕМЕСОВА[4]

([1]Институт космических исследований им. академика У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,
[2]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан,
[3]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан,
[4]Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан)

О КВАДРАТУРАХ ТИПА КОББА В СЛУЧАЕ $A = B = 2C$

Аннотация. Найдены новые квадратуры типа Кобба в случае $A = B = 2C$. Принимая за канонические переменные углы Эйлера и импульсы по этим углам для твердого тела, совершающего вращательные движения относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения, получены канонические уравнения движения.

Распределение масс тела в случае $A = B = 2C$, позволяет записать первые интегралы Клебша для канонических уравнений. Они находятся в инволюции, поэтому выполнены все условия теоремы Лиувилля. Записывая полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, находим квадратуры типа Кобба. Ценность полученных квадратур заключается в том, что они позволяют избежать ультраэллиптических интегралов, и неоднозначности в аналитических решениях дифференциальных уравнений движения твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательное движение, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает движение относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения, тогда принимая за канонические переменные θ, φ, ψ, $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$, имеем [1] канонические уравнения следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, \\ &\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \frac{dp_\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где θ, φ, ψ, $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ – углы Эйлера и соответственно импульсы по этим углам, H – функция Гамильтона

$$H=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+\frac{1}{2}\varepsilon(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2) \tag{2}$$

соответственно

$$\left.\begin{array}{l} p=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\quad q=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi, \\ r=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi,\quad \gamma=\sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma'=\sin\theta\cos\varphi,\ \gamma''=\cos\theta, \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2),\ \overline{\omega}=p\bar{i}+q\bar{j}+r\bar{k}\,, \tag{4}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot\theta},\quad p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi},\quad p_\psi=\frac{\partial T}{\partial\dot\psi},\quad \varepsilon=\frac{3\mu}{R^3}, \tag{5}$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции тела, μ – гравитационная постоянная, R – расстояние от центра масс тела до центра притяжения.

С учетом (3)-(5) функцию Гамильтона запишем в следующем виде:

$$H=\frac{1}{A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)+p_\theta\cos\varphi\right]^2+\frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)+p_\theta\sin\varphi\right]^2+$$
$$+\frac{1}{C}p_\varphi^2+\varepsilon\,[(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\sin^2\theta+C\cos^2\theta]\,. \tag{6}$$

Используя интегралы Клебша [2], получим первые интегралы для (1):

$$\left.\begin{array}{l} F_1=H=\alpha_1, \\ F_2=\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)+p_\theta\cos\varphi\right]^2+\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)+p_\theta\sin\varphi\right]^2+ \\ \quad +p_\varphi^2-\varepsilon\,[(BC\sin^2\varphi+AC\cos^2\varphi)\sin^2\theta+AB\cos^2\theta]=\alpha_2, \\ F_3=p_\psi=\alpha_3, \end{array}\right\} \tag{7}$$

где α_1, α_2, α_3 – произвольные постоянные.

Далее учтем, что $p_\psi=\alpha_3$ и $A=B=2C$, а также, что в нашем случае скобки Пуассона равны нулю

$$(F_1,F_2)\equiv 0,\ (F_1,F_3)\equiv 0,\ (F_2,F_3)\equiv 0\ \text{и}\ \frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(p_\theta,p_\varphi,p_\psi)}\neq 0,$$

следовательно, выполнены все условия теоремы Лиувилля, значит (1) интегрируются в квадратурах.

Таким образом, полное решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\alpha_3-\frac{\partial W}{\partial\varphi}\cos\theta\right)+\frac{\partial W}{\partial\theta}\cos\varphi\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\alpha_3-\frac{\partial W}{\partial\varphi}\cos\theta\right)-\frac{\partial W}{\partial\theta}\sin\varphi\right]^2+$$
$$+\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2+C^2\varepsilon\,(1+\sin^2\theta)=\alpha_1 C \tag{8}$$

имеет вид

$$W=\alpha_3\psi+\int p_\theta d\theta+\int p_\varphi d\varphi, \tag{9}$$

где

$$p_\varphi=Cr_0-const\,,$$

$$p_\theta=\frac{\sqrt{a_4\cos^4\theta+a_3\cos^3\theta+a_2\cos^2\theta+a_1\cos\theta+a_0}}{\sin\theta},$$

здесь

$a_4 = -2C^2\varepsilon$, $a_3 = 0$, $a_2 = -\alpha_2$, $a_1 = 2\alpha_3\sqrt{2\alpha_1 C - \alpha_2 - 6\varepsilon C^2}$, $a_0 = 8\varepsilon C^2 + 2\alpha_2 - 2\alpha_1 C - \alpha_3^2$.

Исходя из (9), представим квадратуры типа Кобба, которые и есть решения канонических уравнений (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \tag{10}$$

где β_1, β_2, β_3 – новые произвольные постоянные.

$$\left.\begin{aligned}
t + \beta_1 &= -\int \frac{2C\left(\dfrac{\alpha_3^2}{a_1}\cos\theta - 1\right) d(\cos\theta)}{\sqrt{a_4\cos^4\theta + a_3\cos^3\theta + a_2\cos^2\theta + a_1\cos\theta + a_0}},\\
\beta_2 &= \int \frac{-\left(2 - \cos^2\theta - \dfrac{2\alpha_3^2}{a_1}\cos\theta\right) d(\cos\theta)}{\sqrt{a_4\cos^4\theta + a_3\cos^3\theta + a_2\cos^2\theta + a_1\cos\theta + a_0}}\\
\beta_3 &= \psi + \int \frac{\left(\alpha_3 - \dfrac{a_1}{2\alpha_3}\cos\theta\right) d(\cos\theta)}{\sqrt{a_4\cos^4\theta + a_3\cos^3\theta + a_2\cos^2\theta + a_1\cos\theta + a_0}}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти квадратуры приводятся к эллиптическим интегралам, так как подкоренной полином имеет четвертую степень. Обращение этих квадратур дают однозначные аналитические решения канонических уравнений движения твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения.

Новые квадратуры типа Кобба (1) справедливы для всех ($A = B = 2C$) осесимметричных тел, вращающихся относительно центра масс в центральном ньютоновском поле.

ЛИТЕРАТУРА

1 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

2 Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. – М.: Наука, 1977. – 328 с.

REFERENCES

1 Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010, 132 p. (in Russ.).

2 Arhangelski Ju.A. Analiticheskay dinamika tverdogo tela. M.: Nauka, 1977, 328 p. (in Russ.).

Резюме

А. А. Беков[1], М. Д. Шыныбаев[1], С. С. Дайырбеков[2],
А. Абжапбаров[3], Е. К. Ақынбеков[3], К. С. Астемесова[4]

([1]Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,
[2]Сыр-Дария университеті, Джетысай, Қазақстан,
[3]М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,
[4]Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан)

КОББА КВАДРАТУРАЛАРЫНА ТИПТЕС $A = B = 2C$ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ КВАДРАТУРАЛАР

Ньютон орталық өрісінде массалық центріне қатысты айналмалы қозғалыстағы қатты дененің орталық инерциялық моменттерінің қатынасы $A = B = 2C$ жағдайында Кобба квадратураларына типтес жаңа шешім қорытылды. Канондық айнымалылар ретінде Эйлер бұрыштары және сол бұрыштарға сәйкес импульстар алынып, ньютон орталық өрісінде массалық центріне қатысты айналмалы қозғалатын қатты дененің канондық теңдеулері құрылды.

Массалардың ерекше жайылуы ($A = B = 2C$) Клебштің тәуелсіз бірінші интегралдарын қорытуға мүмкіншілік берді. Олар Пуассон жақшалары нөлге тең болғандықтан инволюциялық болып Лиувилль теоремасының барлық шарттары орындалды. Сондықтан Гамильтон-Якоби теңдеуінің толық интегралы табылып, канондық теңдеулеріне Кобба квадратураларына типтес шешімдер анықталды. Бұл квадратуралардың басқа шешімдерге қарағанда басымдылығы бар, ол шешімдердің бірмәнділігі және ультраэллиптикалық интегралдардың жоқтығы.

Жаңа Кобба типтес квадратуралар барлық ($A = B = 2C$) өстік симметриялық денелерге орынды, егер ол дене ньютонның орталық өрісінде қозғалса.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Summary

A. A. Bekov[1], M. D. Shynybayev[1], S. S. Da'yrbekov[2],
A. Abzhapbarov[3], I. K. Akinbekov[3], K. S. Astemesova[4]

([1] Professor W. M. Sultangazina Institute of space research of JSC «NCKIT», Almaty, Kazakhstan,
[2] University Of Syr-Daria, Džetysaj, Kazakhstan,
[3] M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan,
[4] Kazakh National Technical University after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan)

ABOUT QUADRATURE TYPE COBB IN THE CASE $A = B = 2\,C$

New type quadrature Cobb in the case A = B = 2C. The canonical variables, Euler angles and pulses on these corners for solid body engaged in rotational motion about the center of mass in a central Newtonian field Chagotenià, received canonical equations of motion.

Mass distribution of the body in case A = B = 2C allows you to record the first integrals of Inverse for canonical equations. They are in involution, therefore, Liouville's theorem, all conditions. Writing a complete integral of the Hamilton-Jacobi equation, we find the squaring Cobb type. The value obtained by quadrature method is that they avoid ul′traèlliptičeskih integrals, and ambiguity in the analytical solutions of differential equations of motion of a rigid body about the center of mass in a central Newtonian gravitation field.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 14.01.2014 г.