

*А. Е. ДАВЛЕТОВ<sup>1</sup>, Е. С. МУХАМЕТКАРИМОВ<sup>1</sup>, Ж. А. КУДЫШЕВ<sup>1</sup>, И. Р. ГАБИТОВ<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Университет Аризоны, Тусон, США)

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИССИПАТИВНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

**Аннотация.** Рассматривается процесс генерации второй гармоники в диссипативных метаматериалах, имеющих отрицательный коэффициент преломления на частоте фундаментальной волны и положительный коэффициент преломления на частоте волны второй гармоники. Изучается влияние потерь энергии на критическое значение фазовой расстройки, определяющее характер обмена энергией между фундаментальной волной накачки и волной второй гармоники. Показано, что концепция критического значения фазовой расстройки качественно изменяется для среды с потерями, в частности, оно начинает зависеть от длины образца. Предлагается механизм компенсации потерь энергии волной второй гармоники с помощью параметрического усиления.

**Ключевые слова:** метаматериал, генерация второй гармоники, фазовая расстройка, потери энергии.

**Тірек сөздер:** метаматериал, екінші ретті толқынның генерациясы, фазалар ауытқуы, энергия жұтылуы.

**Keywords:** metamaterials, second harmonic generation, phase mismatch, energy losses.

**Введение.** Метаматериалы с отрицательным показателем преломления являются одними из наиболее необычных и широко известных представителей семейства структурированных материалов, основанных на резонансных явлениях [1-7]. Главное отличие таких материалов от обычных диэлектриков заключается во взаимной ориентации тройки фундаментальных векторов. В классических диэлектриках вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , магнитного поля  $\mathbf{H}$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  являются право-ориентированными, а в метаматериалах эти вектора леворазориентированы [8-11]. Следствием левосторонней ориентации фундаментальной тройки векторов является противоположная ориентация векторов Умова-Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$  [12, 13]. Это означает, что в случае непрерывного излучения поток энергии и фазовая скорость направлены в противоположные стороны, а в случае волновых пакетов противоположную ориентацию имеют фазовая и групповая скорости.

При взаимодействии излучения разных частот с метаматериалом, может оказаться так, что для одной спектральной области показатель преломления будет отрицательным, а для другой –

положительным. В данной работе рассматривается именно такая ситуация, приводящая к тому, что волна второй гармоники распространяется навстречу волне накачки. Это приводит к целому ряду новых эффектов по сравнению с процессом генерации второй гармоники в обычных материалах. В частности, не требуется выполнение идеального фазового синхронизма и даже существует целый набор значений фазовых расстроек, при которых происходит эффективная передача энергии от волны накачки к волне второй гармоники. Более того можно компенсировать потери энергии волной второй гармоники с помощью явления параметрического усиления света.

**Основные уравнения.** В данной работе теоретически изучается нелинейное многоволновое взаимодействие в метаматериалах с отрицательным показателем преломления. Первым представителем такого взаимодействия волн является генерация второй гармоники, то есть появление волны на удвоенной частоте по сравнению с частотой волны накачки. Следует отметить, что генерация второй гармоники происходит при распространении волны только в нелинейных средах, в частности с квадратичной нелинейностью.

Пусть показатель преломления метаматериала отрицателен на основной частоте  $\omega$  падающей волны и положителен на частоте второй гармоники  $2\omega$ . Это в свою очередь означает, что основная волна накачки и волна второй гармоники должны распространяться в противоположных направлениях, так как фундаментальная тройка векторов является лево-ориентированной для волны накачки.

Рассмотрим коллинеарный случай генерации второй гармоники. Выберем направление падающей на образец волны накачки за ось  $Z$ , тогда вторая гармоника будет распространяться в обратном направлении.

Из уравнений Максвелла можно получить систему уравнений, описывающих распространение и взаимодействие трех волн в нелинейной квадратичной среде  $\chi^2$ . Для того, чтобы описываемый процесс был более реальным, учтем и потери энергии. Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} &= -i\kappa_1 E_2 E_1^* - \alpha_1 E_1, \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} &= i\kappa_2 E_1^2 - i\Delta E_2 + \alpha_2 E_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  описывает фазовую расстройку,  $E_{1,2}$  – комплексные амплитуды фундаментальной волны и волны второй гармоники,  $\kappa_j = 2\pi\chi^2(\omega_j)\omega_j^2\mu(\omega_j)/(c^2k_j')$ ,  $j = 1, 2$  обозначает коэффициенты связи для основной и второй гармоники,  $\alpha_j = k_j''$  – коэффициенты потерь.

В силу того, что волны распространяются в противоположных направлениях, граничные условия задаются на разных концах образца и выглядят так:

$$E_1(0) = e_{10} \exp(i\varphi_{10}), \quad E_2(L) = 0, \quad (2)$$

где  $e_{10}$ ,  $\varphi_{10}$  – амплитуда и фаза падающей на левый конец волны накачки.

Далее с помощью замен  $E_1 = \sqrt{I_0}\varepsilon_1(\zeta)$ ,  $E_2 = \sqrt{I_0\kappa_2/\kappa_1}\varepsilon_2(\zeta)$ ,  $\zeta = z\sqrt{I_0\kappa_2\kappa_1}$ ,  $\tilde{\Delta} = \Delta\sqrt{I_0\kappa_2\kappa_1}$ ,  $\tilde{\alpha}_{1,2} = \alpha_{1,2}\sqrt{I_0\kappa_2\kappa_1}$ ,  $I_0 = E_{10}^2$ ,  $l = L\sqrt{I_0\kappa_2\kappa_1}$  эту систему можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \zeta} &= -i\varepsilon_2\varepsilon_1^* - \tilde{\alpha}_1\varepsilon_1, \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \zeta} &= i\varepsilon_1^2 - i\tilde{\Delta}\varepsilon_2 + \tilde{\alpha}_2\varepsilon_2, \\ \varepsilon_1(0) &= 1, \quad \varepsilon_2(l) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Комбинируя первые два уравнения из (3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (|\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_2|^2) = -2(\tilde{\alpha}_1|\varepsilon_1|^2 + \tilde{\alpha}_2|\varepsilon_2|^2). \quad (4)$$

Это соотношение определяет, как градиент полного потока связан с диссипацией энергии в единицу времени в единице объема. Ее также можно рассматривать как дифференциальную форму соотношения Мэнли-Роу при наличии потерь.

Если рассматривать интенсивность, то оказывается удобным записать систему (3) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\varepsilon_1|^2}{\partial \zeta} &= i(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* - \varepsilon_1^{*2} \varepsilon_2) - 2\tilde{\alpha}_1 \varepsilon_1, \\ \frac{\partial |\varepsilon_2|^2}{\partial \zeta} &= i(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* - \varepsilon_1^{*2} \varepsilon_2) + 2\tilde{\alpha}_2 \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения в скобках последней системы уравнения (5) описывает процесс обмена энергией между полями волны накачки и волной второй гармоники. Если выражение в скобках отрицательно, то поток энергии идет в направлении от волны накачки к волне второй гармоники, а когда выражение в скобках положительно, то происходит обратный процесс. Обозначим выражение в скобках как функцию  $Q(\zeta)$ :

$$Q_{\Delta l}(\zeta) = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* - \varepsilon_1^{*2} \varepsilon_2 = \frac{\partial |\varepsilon_1|^2}{\partial \zeta} + 2\tilde{\alpha}_1 \varepsilon_1 = \frac{\partial |\varepsilon_2|^2}{\partial \zeta} - 2\tilde{\alpha}_2 \varepsilon_2. \quad (6)$$

С помощью выражения (6) будем определять достижение фазовой расстройкой величины критического значения. Если вдоль всего образца происходит передача энергии волны накачки к волне второй гармоники, то функция  $Q(\zeta)$  должна быть отрицательна во всем интервале  $\zeta$ . Тогда условием достижения фазовой расстройкой критического значения является  $Q_{\Delta l}(0) = 0$  и  $Q_{\Delta l}(l) = 0$ .

На рисунке 1 показаны кривые зависимостей критических значений фазовой расстройки от коэффициента потерь  $\tilde{\alpha}_1$  для разных длин образца  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 2$ . Только нижние ветки соответствуют реально наблюдаемому критическому значению фазовой расстройки (жирная сплошная линия для  $l_1 = 1$ , пунктирная линия для  $l_2 = 2$ ), остальные ветки не являются физическими. Для  $l_1 = 1$  критические значения фазовой расстройки лежат в интервале  $0 \leq \alpha_1 \leq 0.553$ .

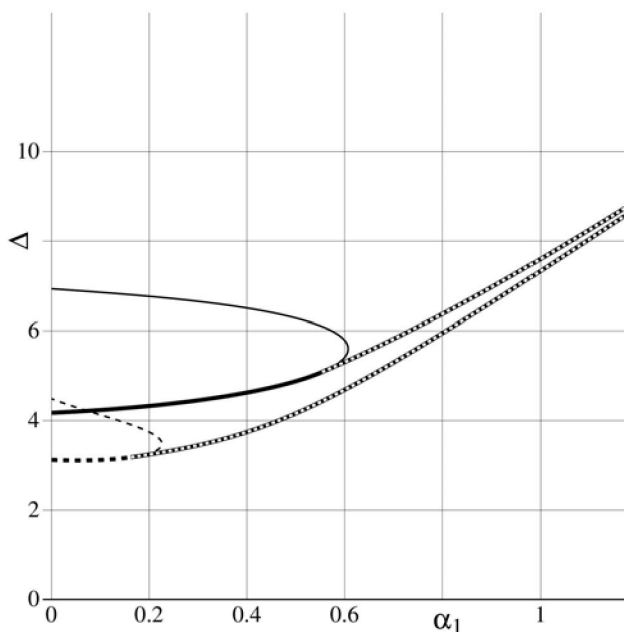


Рисунок 1 – Зависимость критического значения фазовой расстройки от коэффициента потерь на основной частоте

Компенсацию потерь энергии волной второй гармоники можно произвести путем усиления второй гармоники небольшим внешним сигналом, распространяющимся в направлении фазовой скорости второй гармоники. Тогда граничные условия примут вид:

$$E_1(0) = e_{10} \exp(i\varphi_{10}), \quad E_2(L) = e_{20} \exp(i\varphi_{20}), \quad (7)$$

где  $e_{10}$ ,  $\varphi_{10}$  – амплитуда и фаза падающей на левый конец волны,  $e_{20}$ ,  $\varphi_{20}$  – амплитуда и фаза падающей на другой конец волны. При распространении волны накачки на частоте  $\omega_1$  в образце генерируется вторая гармоника, которая взаимодействует с падающей на другой конец образца волной частоты  $\omega_2$ . На рисунке 2 показаны направления падающих волн на образец с отрицательным показателем преломления на частоте волны накачки.



Рисунок 2 – Направления падающих на образец волн для изучения параметрического усиления волны второй гармоники

На рисунке 3 показаны кривые распределения интенсивностей полей волн накачки и второй гармоники вдоль образца. Фазу падающей волны накачки можно выбрать произвольной, в данном случае было положено  $\varphi_{10} = \varphi_1(0) = 0$ . Интенсивность и фаза волны второй гармоники, падающей на другой конец образца, равна  $I(L) = 0.1$ ,  $\varphi_{20} / \pi = -0.5$ . При этом безразмерные коэффициенты потерь энергии для двух волн были положены равными  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 0.3$ , а фазовая расстройка –  $\Delta = 1$ .

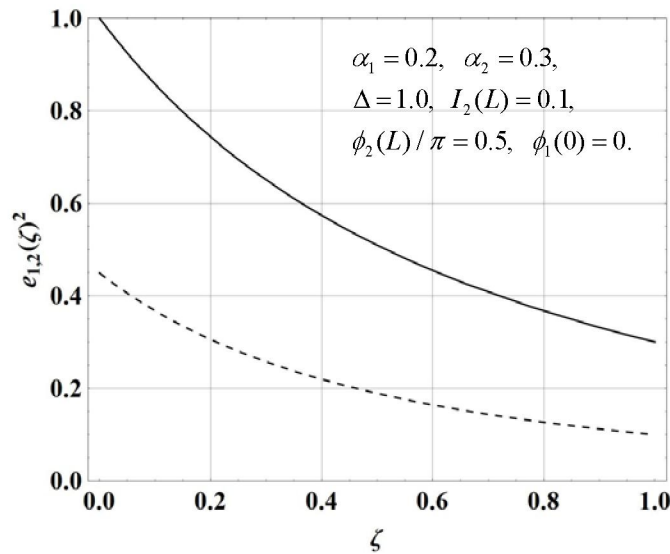


Рисунок 3 – Пространственные профили интенсивностей волн накачки и второй гармоники

На рисунке 4 показаны зависимость значения интенсивности второй гармоники на левом конце образца от фазы волны второй гармоники  $\varphi_0 / \pi$  на правом конце при выбранных параметрах  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 0.3$ ,  $\Delta = 0$ ,  $e_{10} = 1$ ,  $e_{2L} = 0.5 \exp(-i\varphi_{2L} / \pi)$  и  $\varphi_{2L} = 1.5$ . При определенных значениях начальной фазы падающей на правый конец волны второй гармоники происходит компенсация потерь энергии, то есть эффективность генерации второй гармоники на выходе имеет максимальное значение.

При этом на рисунке 5 представлены пространственные профили интенсивностей волн накачки и второй гармоники для значения фазы  $\varphi_0 / \pi \approx 0.922$ . Видно, что, несмотря на существенные потери энергии волна второй гармоники распространяется практически без затухания.

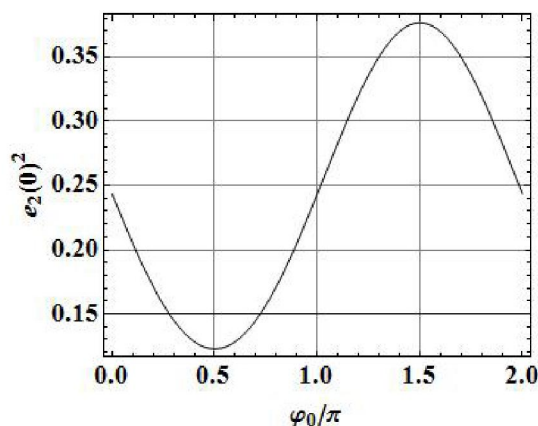
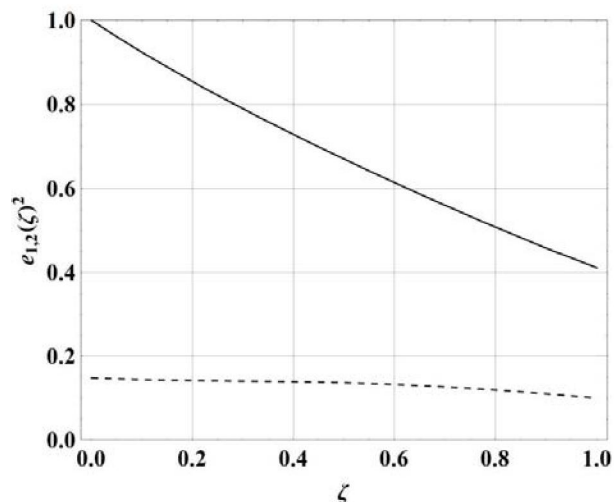


Рисунок 4 – Зависимость интенсивности от фазы второй гармоники на выходе



$$\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.3, \Delta = 3, e_{10}^2 = 1, e_{2L}^2 = 0.1$$

Сплошная линия – волна накачки,  
пунктирная линия – волна второй гармоники

Рисунок 5 – Пространственные профили интенсивностей волн накачки и второй гармоники

**Заключение.** В данной работе изучено влияние потерь энергии на критическое значение фазовой расстройки в процессе генерации второй гармоники в метаматериалах с отрицательным показателем преломления. Показано, что критическое значение фазовой расстройки зависит не только от коэффициентов потерь, но и от длины образца.

Рассмотрено явление параметрического усиления света, которое может быть использовано для компенсации потерь в метаматериалах и создании параметрических усилителей, предназначенных для получения дифференциальной фазовой манипуляции и трансформации фазовой модуляции в частотную. Найдены конкретные значения параметров системы, при которых происходит компенсация энергетических потерь на поглощение и параметрическое усиление падающего сигнала.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Агранович В.М., Гарпштейн Ю.Н. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света. УФН, 2006, Т. 176, №10, С 1052-1068.
- 2 Smith D. R., Padilla J. W., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, **2000**, Vol. 84, No 18, P. 4184-4187.
- 3 Shelby R. A., Smith D. R., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, **2001**, Vol. 78, No 1, P. 489-491.
- 4 Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, **2001**, Vol. 292, No 5514, P. 77-79.
- 5 Valentine J., Zhang Sh., Zentgraf Th., Ulin-Avila E., Genov D. A., Bartal G., Xiang Zhang. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, **2008**, Vol. 455, P. 376-379.
- 6 Drachev V.P., Cai W., Chettiar U., Yuan H.K., Sarychev A.K., Kildishev A.V., Klimeck G., Shalaev V.M. Experimental verification of an optical negative-index material. *Laser Phys. Lett.*, **2006**, Vol. 3, No 1, P.49 - 55.
- 7 Pendry, J.B. Negative Refraction. *Contemporary Physics*, **2004**, Vol. 45, P. 191-202.
- 8 Lamb H. On group-velocity. *Proc. London Math. Soc. 1*, **1904**, P.473-479.
- 9 Pocklington H.C. Growth of a wave-group when the group velocity is negative, *Nature*, **1905**, Vol. 71, P. 607-608.
- 10 Sivukhin D.V. The energy of electromagnetic waves in dispersive media. *Opt. Spektrosk.*, **1957**, Vol. 3, P. 308-312.
- 11 Pafomov V. E. On transition radiation and the Vavilov-Cherenkov radiation. *Soviet Physics-JETP*. **1959**, Vol. 36, P. 1853-1858.
- 12 Nichols E. F. An Introduction to the Theory of Optics by Arthur Schuster. *Astrophysical Journal*, **1904**, Vol. 21, P. 382-387.
- 13 Mandelshtam L.I. Group velocity in crystalline arrays. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **1945**, Vol. 15, P. 475-478.
- 14 Robert W. Boyd. Nonlinear Optics. *Third Edition* – New York: *Academic Press, Elsevier*, **2008**, 571 p.

## REFERENCES

- 1 Arganovich V.M., Gartshtein Yu.N. Prostranstvennaya dispersiya i otricatel'noe prelomlenie sveta. UPN, 2006. T. 176, №10. S. 1052-1068.
- 2 Smith D. R., Padilla J. W., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity. *Phys. Rev. Lett*, **2000**, Vol. 84, No 18, P. 4184-4187.
- 3 Shelby R. A., Smith D. R., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterials. *Appl. Phys. Lett*, **2001**, Vol. 78, No 1, P. 489-491.
- 4 Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, **2001**, Vol. 292, No 5514, P. 77-79.
- 5 Valentine J., Zhang Sh., Zentgraf Th., Ulin-Avila E., Genov D. A., Bartal G., Xiang Zhang. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, **2008**, Vol. 455, P. 376-379.
- 6 Drachev V.P., Cai W., Chettiar U., Yuan H.K., Sarychev A.K., Kildishev A.V., Klimeck G., Shalaev V.M. Experimental verification of an optical negative-index material. *Laser Phys. Lett.*, **2006**, Vol. 3, No 1, P.49 - 55.
- 7 Pendry, J.B. Negative Refraction. *Contemporary Physics*, **2004**, Vol. 45, P. 191-202.
- 8 Lamb H. On group-velocity. *Proc. London Math. Soc. 1*, **1904**, P.473-479.
- 9 Pocklington H.C. Growth of a wave-group when the group velocity is negative, *Nature*, **1905**, Vol. 71, P. 607-608.
- 10 Sivukhin D.V. The energy of electromagnetic waves in dispersive media. *Opt. Spektrosk*, **1957**, Vol. 3, P. 308-312.
- 11 Pafomov V. E. On transition radiation and the Vavilov-Cherenkov radiation. *Soviet Physics-JETP*. **1959**, Vol. 36, P. 1853-1858.
- 12 Nichols E. F. An Introduction to the Theory of Optics by Arthur Schuster. *Astrophysical Journal*, **1904**, Vol. 21, P. 382-387.
- 13 Mandelshtam L.I. Group velocity in crystalline arrays. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, **1945**, Vol. 15, P. 475-478.
- 14 Robert W. Boyd. Nonlinear Optics. *Third Edition* – New York: *Academic Press, Elsevier*, **2008**, 571 p.

## Резюме

*А. Е. Дәулетов<sup>1</sup>, Е. С. Мұхаметқаримов<sup>1</sup>, Ж. А. Құдышев<sup>1</sup>, И. П. Габитов<sup>2</sup>*

<sup>(1)</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,  
<sup>(2)</sup>Аризона университеті, Тусон, АҚШ)

## ДИССИПАЦИЯСЫ БАР МЕТАМАТЕРИАЛДАРДАҒЫ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ТОЛҚЫНДЫҚ ПРОЦЕСТЕРІ

Түскен толқын жиілігінде сыну көрсеткіші теріс және екінші ретті гармоника жиілігінде оң болатын метаматериалдардағы екінші ретті гармониканың генерациясы қарастырылады. Түскен фундаментал толқын мен екінші ретті гармониканың арасындағы энергия алмасуды сипаттайтын фазалар ауытқуының критикалық мәніне энергия жұтылуының әсері зерттелінді. Фазалар ауытқуы мәнінің концепциясы жұтылуы бар орталарда түпкілікті өзгертінді, материалдың ұзындығына да тәуелділі болатыны көрсетілген. Екінші ретті толқын үшін энергияның жұтылуын компенсациялайтын параметрлік күшейту механизмі ұсынылды.

**Тірек сөздер:** метаматериал, екінші ретті толқынның генерациясы, фазалар ауытқуы, энергия жұтылуы.

## Summary

*A. Davletov<sup>1</sup>, Ye. Mukhametkarimov<sup>1</sup>, Zh. Kudyshev<sup>1</sup>, I. Gabitov<sup>2</sup>*

<sup>(1)</sup>Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,  
<sup>(2)</sup>Arizona University, Tucson, USA)

## NONLINEAR WAVE PROCESSES IN DISSIPATIVE METAMATERIALS

The process of second harmonic generation is considered in dissipative metamaterials with negative refractive index at the frequency of the fundamental wave and with the positive refractive index at the frequency of second-harmonic wave. Influence of the energy losses is studied on the critical value of the phase mismatch determining the character of the energy exchange between the fundamental pump wave and the second harmonic wave. It is shown that the concept of the critical value of the phase mismatch changes qualitatively for a medium with energy losses, in particular, it begins to depend on the sample length. A mechanism is proposed to compensate for energy losses of the second harmonic wave which is based on the parametric amplification.

**Keywords:** metamaterials, second harmonic generation, phase mismatch, energy losses.

*Поступила 14.01.2014 г.*