УДК 519.622.2, 517.927

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, Г. Б. ИЛИЯСОВА

(Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан)

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Разбиением интервала точками нагружения и введением дополнительных параметров линейная двухточечная краевая задача сводится к эквивалентной краевой задаче с параметрами. Решением матричных и векторных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах построена система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Предложен численный метод решения рассматриваемой задачи, основанный на решении построенной системы и методе Рунге-Кутта 4-го порядка для решения задач Коши на подинтервалах.

Ключевые слова: краевая задача, метод параметризации, нагруженные дифференциальные уравнения.

Тірек сөздер: шеттік есеп, жүктелген дифференциалдық теңдеулер, параметрлеу әдісі.

Keyword: boundary value problem, loaded differential equations, parameterization method.

Рассматривается краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=0}^{m} K_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \;\; x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m < T$, $(n \times n)$ матрицы – $A(t)$, $K(t)$, $i = \overline{0,m}$ и n-вектор $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$. B и C – постоянные матрицы размера $(n \times n)$.

Нагруженные дифференциальные уравнения часто возникают в приложениях как математическая модель процессов, где состояния в определенные моменты времени оказывают существенное влияние на свойства описываемого процесса в целом.

Нагруженные дифференциальные уравнения также возникают при построении приближенных методов нахождения решения задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) на основе метода параметризации [1] установлены в [2].

Численное решение начальной и многоточечной краевой задачи для линейных нагруженных дифференциальных уравнений исследовано в [3]. При предположении существования и единственности решения предлагаются алгоритмы, основанные на идее переноса краевых условий (см. [4]).

Перенос осуществляется решением матричных задач Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью настоящей статьи является построение численных алгоритмов решения краевой задачи (1), (2), где не требуется нахождение решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

С этой целью к задаче (1), (2) применяется метод параметризации. Интервал $[0, T]$ разбивается на подинтервалы точками нагружения: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначается через $x_r(t)$, т.е $x_r(t) = x(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}$. В качестве параметра λ_r будем рассматривать значения функции $x_r(t)$ в точках $t = \theta_{r-1}$ и на каждом интервале $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ производим замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1, m+1}$. Тогда исходная задача (1), (2) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{i=0}^{m} K_i(t)\lambda_{i+1} + f(t), \quad t \in (\theta_{r-1}, \theta_r), \tag{3}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1} \tag{4}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{m+1} + C \lim_{t \to T-0} u_{m+1}(t) = d, \quad d \in R^n \tag{5}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to \theta_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, m} \tag{6}$$

Задачи (1), (2) и (3)-(6) эквивалентны. Если функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2), тогда пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (x_1(0), x_2(\theta_1), \ldots, x_{m+1}(\theta_m))$, $u[t] = (x_1(t) - x_1(0), x_2(t) - x_2(\theta_1), \ldots, x_{m+1}(t) - x_{m+1}(\theta_m))$ является решением задачи (3)-(6). И наоборот, если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_{m+1})$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_{m+1}(t))$, является решением задачи (3)-(6), тогда функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t), \; t \in (\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad \widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{m+1} + \lim_{t \to T-0} \widetilde{u}_{m+1}(t)$ является решением исходной задачи (1), (2).

Разбиение интервала $[0,T]$ точками нагружения и введение дополнительных параметров позволили получить обыкновенное дифференциальное уравнение с параметрами (3) и начальные условия (4).

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0,T].$$

Тогда единственное решение задачи Коши (3)-(4), при фиксированных значениях $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_{m+1})$ имеет вид

$$u_r(t) = X(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[A(\tau)\lambda_r + \sum_{i=0}^{m} K_i(t)\lambda_{i+1} + f(\tau)\right]d\tau, \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1} \quad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$$D_r(t) = X(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau, \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (8)$$

$$H_r^i(t) = X(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)K_i(\tau)d\tau, \quad r = \overline{1, m+1}, \ i = \overline{0, m}, \quad (9)$$

$$F_r(t) = X(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad r = \overline{1, m+1}. \quad (10)$$

Подставив выражения из (7) соответствующие $\lim\limits_{t \to \theta_r - 0} u_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$ в краевое условие (5) и условие склеивания решения во внутренних точках разбиения (6) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров λ_r, $r = \overline{1, m+1}$.

$$\left(B + H_{m+1}^0(T)\right)\lambda_1 + \sum_{i=1}^{m-1} H_{m+1}^i(T)\lambda_{i+1} + C\left(I + H_{m+1}^m(T)\right)\lambda_{m+1} = d - CF_{m+1}(T) \quad (11)$$

$$\lambda_s + D_s(\theta_s)\lambda_s + \sum_{i=0}^{m} H_s^i(\theta_s)\lambda_{i+1} - \lambda_{s+1} = -F_s(\theta_s), \ s = \overline{1, m} \quad (12)$$

Матрицу соответствующей левой части системы уравнений (11), (12) обозначим через $Q(\theta)$и систему запишем в виде

$$Q(\theta)\lambda = -F(\theta), \ \lambda \in R^{2n}, \quad (13)$$

где $F(\theta) = \left(-d + CF_{m+1}(T), F_1(\theta_1), F_2(\theta_2), ..., F_m(\theta_m)\right)$.

Нетрудно установить, что разрешимость линейной двухточечной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения (1), (2) эквивалентна разрешимости системы (13).

Предлагаемый численный метод основан на построении и решении системы (13). Как показывают формулы (8)-(10), коэффициенты и правая часть системы (13) определяются значениями решения задач Коши в конечных точках подинтервалов при нулевых начальных условиях. Значения матриц $D_r(t)$, $H_r^i(t)$ и вектора $F_r(t)$ на подинтервалах найдем численно решая матричные и векторные задачи Коши.

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + A(t), \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ X(\theta_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1, m+1} \quad (14)$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + K_i(t), \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ i = \overline{1, m}, \ X(\theta_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1, m+1} \quad (15)$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + f(t), \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ X(\theta_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1, m+1} \quad (16)$$

Для этого каждый r-ый подинтервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ делим на четные N_r, $r = \overline{1, m}$ части и используем метод Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $h_r = (\theta_r - \theta_{r-1}) / N_r$, $r = \overline{1, m+1}$.

Численное решение задач Коши (14)-(16) позволяет получить следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров λ

$$Q^{\tilde{h}}(\theta)\lambda = -F^{\tilde{h}}(\theta), \quad \lambda \in R^{2n}, \ \tilde{h} = (h_1, h_2, ..., h_{m+1}) \tag{17}$$

Решая систему (17) получаем $\lambda^{\tilde{h}} = \left(\lambda_1^{\tilde{h}}, \lambda_2^{\tilde{h}}, ..., \lambda_{m+1}^{\tilde{h}}\right)$.

Здесь $\lambda_r^{\tilde{h}}$, $r = \overline{1, m+1}$ является приближенным значением решения задачи (1), (2) в точках $t = \theta_{r-1}$, $r = \overline{1, m+1}$. Значения решения в остальных точках подинтервалов найдем вновь используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка к следующим задачам Коши

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{i=0}^{m} K_i(t)\lambda_{i+1}^{\tilde{h}} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad x_r(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad r = \overline{1, m+1} \tag{18}$$

В качестве иллюстрации вышеизложенного алгоритма рассмотрим следующий пример.

Пример. На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу с нагружением в точке $t = \frac{1}{4}$.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t)x\left(\frac{1}{4}\right) + f(t), \quad x \in R^2, \tag{19}$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \quad d \in R^2 \tag{20}$$

где

$$A(t) = \begin{Vmatrix} t & t^2 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \ K(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ f(t) = \begin{Vmatrix} -t^4 + t^3 - t - \frac{13}{16} \\ 2 \cdot t + \frac{3}{16} \end{Vmatrix}, \ B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \ d = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Решением задачи (19) – (20) является вектор $x(t)$ с координатами $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t(t-1)$.

Отрезок [0,1] делим на две части: $[0, 1) = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right)$, вводим дополнительные параметры $\lambda_1 = x(0)$, $\lambda_2 = x_2\left(\frac{1}{4}\right)$, и переходим к эквивалентной краевой задаче с параметрами.

Решаем ниже приведенные задачи Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Число разбиений на подинтервале $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ возьмем равным $N_1 = 10$, а на подинтервале $t \in \left[\frac{1}{4}, 1\right)$ равным $N_2 = 30$ с одинаковым шагом $h_1 = h_2 = 0{,}025$.

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + A(t), \ t \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \ X(0) = 0, \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X + A(t), \ t \in \left[\frac{1}{4}, 1\right), \ X\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + K(t), \ t \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \ X(0) = 0, \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X + K(t), \ t \in \left[\frac{1}{4}, 1\right), \ X\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + f(t), \ t \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \ X(0) = 0, \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X + f(t), \ t \in \left[\frac{1}{4}, 1\right), \ X\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Далее строим матрицу $Q^{\tilde{h}}(\theta)$ и вектор $F^{\tilde{h}}(\theta)$:

$$Q^{\tilde{h}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.322100484674096 & -1.522593254011246 \\ 0 & 1 & 1.200305578428558 & -1.305411068963566 \\ 1.03074980615337 & 0.005273286403315 & -0.74482524074714 & 0.256161477697417 \\ -0.252579327533418 & 0.999671771184004 & -0.031574132593694 & -0.781623323514369 \end{pmatrix},$$

$$F^{\tilde{h}}(\theta)=\begin{pmatrix} 1.036614232008716 \\ -1.445070160511025 \\ -0.237894288335282 \\ 0.137599086968513 \end{pmatrix}.$$

И решая систему уравнений (17) получаем численные значения параметров

$$\lambda_1^{\tilde{h}}=\begin{pmatrix} 1.000000048369212 \\ -0.000000116944915 \end{pmatrix},\quad \lambda_2^{\tilde{h}}=\begin{pmatrix} 1.000000009225569 \\ -0.187500165564572 \end{pmatrix}.$$

Численные решения в остальных точках подинтервалов найдем вновь используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка к следующим задачам Коши

$$\frac{dx_1}{dt}=A(t)x_1+K(t)\lambda_2^{\tilde{h}}+f(t),\quad t\in\left[0,\frac{1}{4}\right),\quad x_1(0)=\lambda_1^{\tilde{h}},$$

$$\frac{dx_2}{dt}=A(t)x_2+K(t)\lambda_2^{\tilde{h}}+f(t),\quad t\in\left[\frac{1}{4},1\right),\quad x_2\left(\frac{1}{4}\right)=\lambda_2^{\tilde{h}}.$$

Результаты вычислений представлены в следующей таблице

t	$x_1(t)$ (численное решение)	$x_1(t)$ (решение)	$x_2(t)$ (численное решение)	$x_2(t)$ (решение)
0	1.0000000005	1	-0.0000000015	0
0.025	1.0000000005	1	-0.0243750015	-0.024375
0.05	1.0000000004	1	-0.0475000016	-0.0475
0.075	1.0000000004	1	-0.0693750017	-0.069375
0.1	1.0000000003	1	-0.0900000017	-0.09
0.125	1.0000000003	1	-0.1093750018	-0.109375
0.15	1.0000000002	1	-0.1275000018	-0.1275
0.175	1.0000000002	1	-0.1443750019	-0.144375
0.2	1.0000000002	1	-0.1600000019	-0.16
0.225	1.0000000001	1	-0.1743750020	-0.174375
0.25	1.0000000001	1	-0.1875000020	-0.1875
0.275	1.0000000000	1	-0.1993750021	-0.199375
0.3	1.0000000000	1	-0.2100000021	-0.21
0.325	1.0000000000	1	-0.2193750022	-0.219375
0.35	0.9999999999	1	-0.2275000022	-0.2275
0.375	0.9999999999	1	-0.2343750023	-0.234375
0.4	0.9999999999	1	-0.2400000023	-0.24
0.425	0.9999999998	1	-0.2443750023	-0.244375
0.45	0.9999999998	1	-0.2475000024	-0.2475
0.475	0.9999999998	1	-0.2493750024	-0.249375
0.5	0.9999999998	1	-0.2500000024	-0.25
0.525	0.9999999998	1	-0.2493750024	-0.249375
0.55	0.9999999998	1	-0.2475000024	-0.2475
0.575	0.9999999998	1	-0.2443750025	-0.244375
0.6	0.9999999998	1	-0.2400000025	-0.24
0.625	0.9999999998	1	-0.2343750025	-0.234375
0.65	0.9999999998	1	-0.2275000024	-0.2275
0.675	0.9999999998	1	-0.2193750024	-0.219375
0.7	0.9999999998	1	-0.2100000024	-0.21
0.725	0.9999999998	1	-0.1993750024	-0.199375
0.75	0.9999999998	1	-0.1875000023	-0.1875
0.775	0.9999999998	1	-0.1743750023	-0.174375
0.8	0.9999999999	1	-0.1600000022	-0.16
0.825	0.9999999999	1	-0.1443750022	-0.144375
0.850	1.0000000000	1	-0.1275000021	-0.1275
0.875	1.0000000001	1	-0.1093750020	-0.109375
0.9	1.0000000001	1	-0.0900000019	-0.09
0.925	1.0000000002	1	-0.0693750018	-0.069375
0.950	1.0000000003	1	-0.0475000017	-0.0475
0.975	1.0000000004	1	-0.0243750016	-0.024375
1	1.0000000005	1	-0.0000000014	0

Как видно из таблицы разность между точным и приближенным решением не превышает значения $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1989. Т.29, №1. -С. 50-66.

2 Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ-матем. 2005. №1. -С. 95-102.

3 Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. №9. –С.1585-1595.

4 Абрамов А.А. Вариант метода прогонки // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.1961. Т.1. №2. С.349-351.

REFERENCES

1 Dzhumabaev D.S. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki 1989. T.29, №1. -P. 50-66.

2 Bakirova Je.A. Izvestija NAN RK. Ser.fiz-matem. 2005. №1. -P. 95-102.

3 Abdullaev V.M., Ajda-zade K.R. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2004. T. 44. №9. –P.1585-1595.

4 Abramov A.A. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki.1961. T.1. №2. P.349-351.

Резюме

Д. С. Жұмабаев, Г. Б. Ілиясова

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, ҚР БҒМ, Алматы, Қазақстан,
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІНІҢ САНДЫҚ ЖҮЗЕГЕ АСЫРЫЛУЫ

Интервалды жүктеу нүктелерімен бөлу және қосымша параметрлерді енгізу арқылы сызықты екінүктелі шеттік есеп эквивалентті шеттік есепке келтіріледі. Ішкі аралықтарда жәй дифференциалдық теңдеулерге қойылған матрицалық және векторлық Коши есептерінің шешімдері арқылы параметрлерге қатысты сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Қарастырылып отырған есепті шешудің құрылған жүйені шешуге және ішкі аралықтарда Коши есебі үшін 4-ретті Рунге-Кутта әдісіне негізделген сандық әдісі ұсынылған.

Тірек сөздер: шеттік есеп, жүктелген дифференциалдық теңдеулер, параметрлеу әдісі.

Summary

D. S. Dzhumabaev, G. B. Iliyassova

(Institute of mathematics of the Ministry of Education and Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty,
Kazakh National pedagogical university named after Abai, Kazakhstan)

ON ONE NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE PARAMETERIZATION METHOD FOR SOLVING OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Linear two-point boundary value problem is reduced to an equivalent boundary value problem with parameters by partition of the interval with points of loading and the introduction of additional parameters. A system of linear algebraic equations with respect to parameters is constructed by solving of Cauchy's matrix and vector problems for ordinary differential equations on the subintervals. Numerical method for solving of the problem is suggested, which based on the solving of the constructed system and method of Runge-Kutta 4th order for solving of the Cauchy problem on the subintervals.

Keyword: boundary value problem, loaded differential equations, parameterization method.

Поступила 14.01.2014 г.