

М. Е. ЕСҚАЛИЕВ, Г. К. ИЗБАСАРОВА, М. К. ЧАНБАЕВА

(Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

## ДАРА ЖҮКТЕЛГЕН ӘСЕРДЕН БОЛҒАН ЭЛЕМЕНТТЕГІ КЕРНЕУЛЕР МЕН ЖЫЛЖУЛАРДЫ ЖУЫҚТАП АНЫҚТАУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

**Аннотация.** Цилиндрлік қуысы бар екі қисық сызықтармен тұйықталған анизотропты денедегі дара жүктелген әсерден болған элементтегі кернеулер мен жылжуларды анықтаудың жуықтама жолдары көрсетілген. Шекаралық элементтер әдісіне (ШЭӘ) сәйкес дене шекарасы шекаралық элементтер деп аталатын сынық сызықтармен бейнеленеді. Көрсетілген элементтер ортасындағы пішіндік шарттардың орындалуы тұтас жазықтықта шекаралық элементтерге кейбір жалған әсерлердің жүктелуімен орындалады. Жазықтықтың кез келген нүктесінде осы элементтерден туындаған кернеулер мен жылжулар екі комплексті потенциалдар арқылы өрнктеліп, онымен қоса осы потенциалдардың механика-математикалық өрнегі келтірілген.

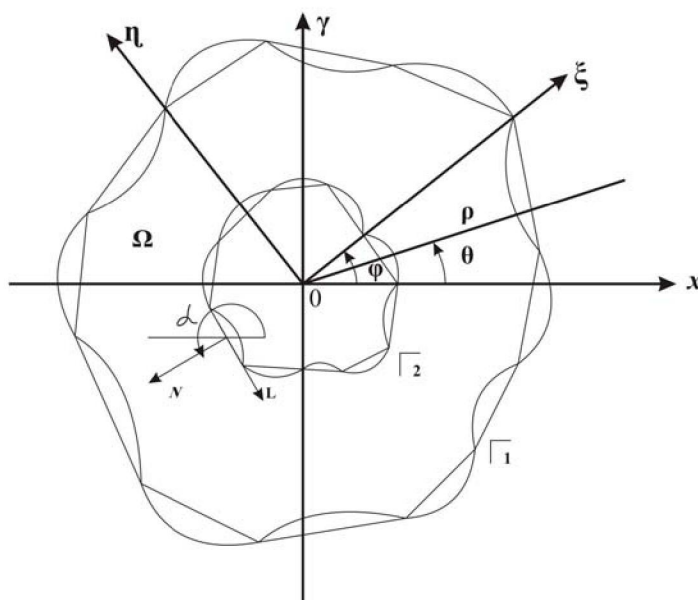
**Тірек сөздер:** жүктеме, қабыршақ, тербеліс, алгоритм, параметр, жылжу, тұтқырлық.

**Ключевые слова:** нагрузка, оболочка, колебания, алгоритм, параметр, перемещение, вязкость.

**Keywords:** loading, cover, rotation algorithm, parameters, moving, viscous.

Цилиндр тәріздес қуысы бар жазық деформация жағдайындағы анизотроптық денені қарастырамыз. Қуыстың көлденең қима ауданы  $\Omega$  облысын қамтиды, ол  $\Gamma_1$  және  $\Gamma_2$  тұйық қисықтармен қоршалған (1-сурет). Кернеулік жағдайдағы жазықтық екі осте қарастырылады. Нақты қойылған шекаралық есепке беттегі күштер берілген. Берілген шарттар бойынша жазықтықта кернеулер мен жылжуларды анықтау керек.

Есепті шешуде шекаралық элементтер әдісі (ШЭӘ) қолданылады [1, 2]. Осы әдіске сәйкес дененің  $n$  түзу кесінділерден тұратын шекарасы сынық сызықтармен аппроксимацияланады (1-сурет). Әрбір элементтегі жергілікті остер (тік  $N$  және  $L$  жанама) элементтердің ортасы арқылы өтеді.

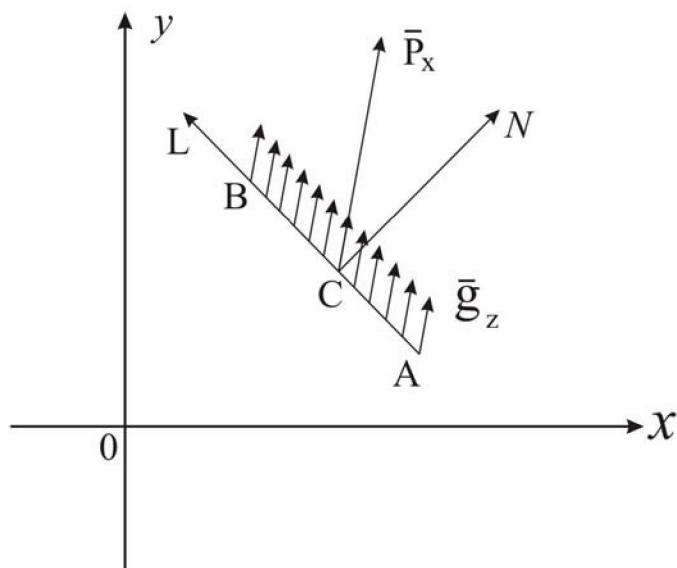


1-сурет

Белгілі бір жалған күштерді шекаралық элементтерге жүктеу арқылы элементтердің ортасында жиектік шарттардың орындалуына әкеледі. Бұл жалған күштер шекара-элементтердің бойында бірқалыпты таралған деп есептейміз.

$AB$  элементіне бірқалыпты таралған  $g_z$  күштері жүктелсін, онда ол өзінің  $OX$  және  $OY$  арқылы бас векторға келтіріледі.

$$\bar{P} = |AB| * \bar{g}_z$$



2-сурет

Элементтің ұзындығы өзінің шеткі нүктелері мен  $A(x_1, x_2)$  және  $B(x_2, y_2)$  мынаған тең болады

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Жазықтықтың кез келген  $D(x, y)$  нүктесінде осы элементтердегі кернеулер мен жылжулар екі комплексті потенциалдың  $\Phi_j(z_j)$  ( $j=1, 2$ ) күрделі комплексті айнымалылары арқылы көрсетіледі, мұндағы  $z_j = x + \mu_j y$ ,  $\mu_j$  – сипаттамалық теңдеудің түбірі [3].

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0 \quad (1)$$

Бұл теңдеудің түбірлерінің барлығы комплексті [3];  $\mu_1$  және  $\mu_2$  бұлар түбірдің оң жорымал бөлігі;

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad (i, j=1, 2, 4, 5, 6)$$

Жазық деформация жағдайындағы серпімді тұрақтылар;  $a_{ij}$  – техникалық  $E_i, G_{ki}, \nu_{mn}$  ( $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ ) тұрақтылар арқылы көрсетілген серпімді тұрақтылары:

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_{11} = \frac{\cos^4(\alpha - \varphi)}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2(\alpha - \varphi) \cos^2(\alpha - \varphi) + \frac{\sin^4(\alpha - \varphi)}{E_2}, \\
a_{22} = \frac{\sin^4(\alpha - \varphi)}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2(\alpha - \varphi) \cos^2(\alpha - \varphi) + \frac{\cos^4(\alpha - \varphi)}{E_2}, \\
a_{12} = \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2(\alpha - \varphi) \cos^2(\alpha - \varphi) - \frac{\nu_{12}}{E_1}, \\
a_{66} = 4 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2(\alpha - \varphi) \cos^2(\alpha - \varphi) + \frac{1}{G_{12}}, \\
a_{16} = \left[ 2 \left( \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{E_2} - \frac{\cos^2(\alpha - \varphi)}{E_1} \right) + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) (\cos^2(\alpha - \varphi) - \sin^2(\alpha - \varphi)) \right] \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi), \\
a_{26} = \left[ 2 \left( \frac{\cos^2(\alpha - \varphi)}{E_2} - \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{E_1} \right) + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) (\cos^2(\alpha - \varphi) - \sin^2(\alpha - \varphi)) \right] \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi), \\
a_{44} = \frac{\cos^2(\alpha - \varphi)}{G_{23}} + \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{G_{13}}, \\
a_{45} = \left( \frac{1}{G_{23}} - \frac{1}{G_{13}} \right) \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi), \\
a_{55} = \left( \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{G_{23}} - \frac{1}{G_{13}} \right) \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi), \\
a_{13} = - \left( \frac{\nu_{23}}{E_2} \sin^2(\alpha - \varphi) \right) + \frac{\nu_{13}}{E_1} \cos^2(\alpha - \varphi), \\
a_{23} = - \left( \frac{\nu_{23}}{E_2} \cos^2(\alpha - \varphi) \right) + \frac{\nu_{13}}{E_1} \sin^2(\alpha - \varphi), \\
a_{33} = \frac{1}{E_3}, \\
a_{36} = 2 \left( \frac{\nu_{13}}{E_1} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi).
\end{array} \right.$$

қалған  $a_{ij}$  нөлге тең. Бұл жерде серпімді тұрақтыларды координат жүйесіне ауыруды түрлендіру формуласы пайдаланылады, себебі техникалық тұрақтылар  $\xi O \eta$  остерінде берілген (1-сурет),  $\varphi$  –  $OX$  осіне түскен жазықтық изотропиясының бұрышы,  $\alpha$  –  $AB$  көлбеу элементтің  $OX$  осіне түскен бұрышы.

Қарастырылып отырған жағдайда  $\Phi_j(z_j)$  потенциалы  $AB$  бойындағы шоғырланған күштердің сәйкес потенциалын интегралдау арқылы алынады. Координат басындағы тұтас шексіз анизотроптық жазықтықтағы шоғырланған күштің потенциалы  $\Phi_j(z_j) = A_j \ln z_j$ , ( $z_j = 1, 2$ ) болады. Координат басын жаңа нүктеге параллель тасымалдағанда осы екі функция анизотроптық жазықтықта инвариантты болады [4]. Сондықтан егерде күш координаттары  $(x_0, y_0)$  кез келген нүктеге түскенде  $\Phi_j(z_j) = A_j \ln(z_j - z_{0j})$  болады, мұнда  $z_{0j} = x_0 + \mu_j y_0$  нүктесінің физикалық жазықтықтағы күш түскен  $z_0 = x_0 + iy_0$  нүктесіне сәйкестігі.

Егер  $AB$  кесіндінің бойында шоғырланған күшті интегралдасак, онда бірқалыпты таралған күштерден комплексті потенциалдар үшін осы кесіндіде мынаны аламыз:

$$\Phi_j(z_j) = \frac{A_j |AB|}{z_{2j} - z_{1j}} \left[ (z_j - z_{1j})(\ln(z_j - z_{1j}) - 1) - (z_j - z_{2j})(\ln(z_j - z_{2j}) - 1) \right], \quad (2)$$

мұндағы  $z_{1j} = x_1 + \mu_j y_1$ ,  $z_{2j} = x_2 + \mu_j y_2$ ,  $(j=1, 2)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$   $AB$  кесіндінің шеткі нүктелерінің координаталары, ал  $A_j$  коэффициенттері төменгі теңдеулер жүйесінен табылады

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 - \bar{A}_1 - \bar{A}_2 &= \frac{P_y}{2\pi |AB| i}, \\ \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 - \bar{\mu}_1 \bar{A}_1 - \bar{\mu}_2 \bar{A}_2 &= -\frac{P_x}{2\pi |AB| i}, \\ \mu_1^2 A_1 + \mu_2^2 A_2 - \bar{\mu}_1^2 \bar{A}_1 - \bar{\mu}_2^2 \bar{A}_2 &= -\left( \frac{\beta_{16}}{\beta_{11}} \frac{P_x}{2\pi i} + \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} \frac{P_y}{2\pi i} \right) \frac{1}{|AB|}, \\ \frac{1}{\mu_1} A_1 + \frac{1}{\mu_2} A_2 - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \bar{A}_1 - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \bar{A}_2 &= \left( \frac{\beta_{12}}{\beta_{22}} \frac{P_x}{2\pi i} + \frac{\beta_{26}}{\beta_{22}} \frac{P_y}{2\pi i} \right) \frac{1}{|AB|} \end{aligned} \quad (3)$$

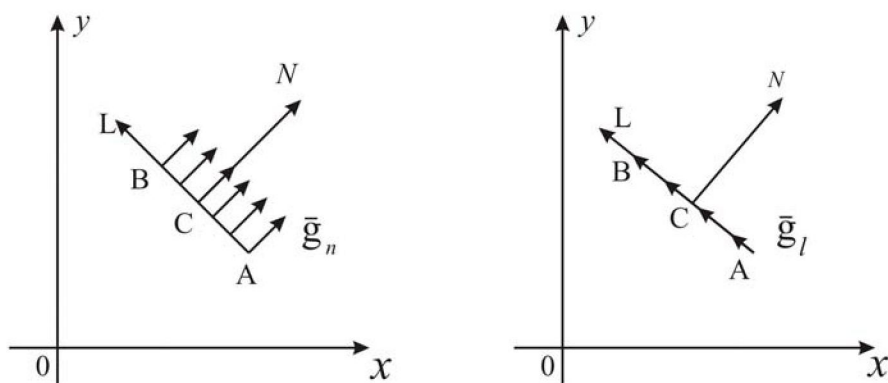
Дара жүктелген элементтің әсерінен болатын жазықтықтағы координаты  $(x, y)$  кез келген нүктедегі кернеулер мен жылжулар төмендегі формулалармен анықталады

$$\begin{cases} \sigma_x = 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1'(z_1) \mu_1^2 + \Phi_2'(z_2) \mu_2^2 \right], \\ \sigma_y = 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) \right], \\ \tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1'(z_1) \mu_1 + \Phi_2'(z_2) \mu_2 \right], \\ u = 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1(z_1) p_1 + \Phi_2(z_2) p_2 \right], \\ g = 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1(z_1) q_1 + \Phi_2(z_2) q_2 \right] \end{cases} \quad (4)$$

мұндағы

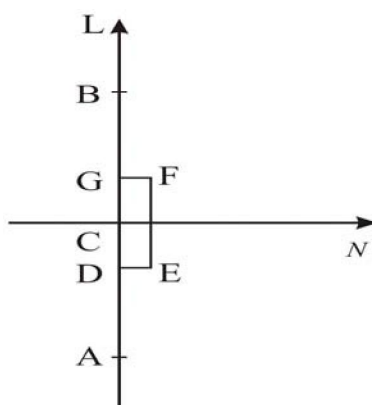
$$\begin{cases} p_1 = \beta_{11} \mu_1^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_1, \\ p_2 = \beta_{11} \mu_2^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_2, \\ q_1 = \beta_{12} \mu_1 + \frac{\beta_{22}}{\mu_1} - \beta_{26}, \\ q_2 = \beta_{12} \mu_2 + \frac{\beta_{22}}{\mu_2} - \beta_{26} \end{cases}$$

Жоғарыдағы өрнектерді пайдаланып жергілікті  $NCL$  жүйе координатында шексіз анизотропиялық жазықтың кез келген нүктесінде  $AB$  кесіндісінің бойында бір қалыпты таралған нормалді  $\bar{g}_n$  және  $\bar{g}_l$  әсерлерді табуға болады.



3-сурет

Егерде белгісіз шамалары анықталатын нүкте АВ кесіндісінде (4-сурет) орналасса (яғни, бұл С нүктесі), онда шоғырланған күштер үшін комплексті потенциалды интегралдау кезінде шоғырланған күштер үшін ерекшелік туады. Мұндай жағдайда интегралдау АВ кесіндісі бойынша жүргізілмейді, ол  $ADEFGB$  сынық сызығы бойынша  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  болғанда ғана интегралданады (мұнда  $\varepsilon = DC = CG$ ,  $\delta = DE$ ).



4-сурет

Бұл жағдайда зерттеулер комплексті потенциалдар үшін өрнекті  $NCL$  жергілікті жүйе остерінде формалды түрде қолдануға болатынын көрсетті.

#### ӘДЕБИЕТ

- 1 Айталиев Ш.М., Каюпов М.А. Метод граничного элемента для решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела // Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 1980, №5, с.6-12.
- 2 Ескалиев М.Е., Каюпов М.А., Масанов Ж.К. О решении упругопластической задачи для анизотропной среды с отверстием методом граничного элемента // Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат. 1983, №1, с.15-20.
- 3 Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, - 416с.
- 4 Грилицкий Д.В. Влияние точки приложения силы и момента на распределение напряжений у безграничной анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием // Прикл. Механика, 1956, Т.2. №2.

#### REFERENCES

- 1 Ajtaliev Sh.M., Kajupov M.A. Metod granichnogo jelementa dlja reshenija ploskoj zadachi teorii uprugosti anizotropnogo tela // Izv. ANKazSSR, ser. fizm-mat., 1980, №5, s.6-12.
- 2 Eskaliev M.E., Kajupov M.A., Masanov Zh.K. Oreshenii uprugoplasticheskoj zadachi dlja anizotropnoj sredy s otverstiem metodom granichnogo jelementa // Izv. ANKazSSR, ser.fizm-mat. 1983, №1, s.15-20.
- 3 Lehnickij S.G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela. M.: Nauka, 1977, - 416s.
- 4 Grilickij D.V. Vpliv točki prikladnija sily i momentu na razpodil napruzhen' u bezmezhnij anizotropnij plastince z eliptichnim otvorom // Prikl. Mehanika, 1956, T.2. №2.

## Резюме

*М. Е. Ескалиев, М. К. Чанбаева, Г. К. Избасарова*

(Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан)

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ВЫЗВАННЫХ ДЕЙСТВИЕМ ОДИНОЧНОГО НАГРУЖЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассматривается приближенное решение об определении напряжений и перемещений, вызванных действием одиночного нагруженного элемента в анизотропном теле с цилиндрической полостью, ограниченную двумя замкнутыми кривыми. В соответствии с методом граничных элементов (МГЭ) граница тела аппроксимируется ломаной линией, называемых граничными элементами. Выполнение контурных условий в серединах указанных элементов достигается прикладыванием к граничным элементам в сплошной плоскости некоторых фиктивных нагрузок. Напряжения и перемещения в произвольной точке плоскости, вызываемые таким элементом, выражается через два комплексных потенциала, а также подробно представлены механико-математические выражения этих потенциалов.

**Ключевые слова:** нагрузка, оболочка, колебания, алгоритм, параметр, перемещение, вязкость.

## Summary

*M. Yeskaliyev, M. Chanbayeva, G. Izbassarova*

(Kazakh State women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan)

### THEORETICAL BASIS OF THE APPROXIMATE DETERMINATION OF STRESSES AND DISPLACEMENTS CAUSED BY THE ACTION OF A SINGLE ELEMENT LOADED

Considered approximate solution of determination of stresses and displacements caused by a single-loaded element in the anisotropic body with cylindrical cavity bounded by two closed curves. In accordance with the boundary element method (BEM) boundary of the body is approximated by a polyline-called boundary elements. Execution of contour conditions in the middles of these elements is achieved by applying to a boundary elements in solid plane some dummy loads. Voltage and moving at an arbitrary point in the plane caused by such element is expressed via two integrated capacity and presented in detail the mechanical-mathematical expression of these potentials.

**Keywords:** loading, cover, rotation algorithm, parameters, moving, viscous.