ӘОЖ 519.911, 517.75

Э.А. БАКИРОВА, Х.ДАЛЕЛХАН

ИМПУЛЬС ӘСЕРІ БАР ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ПЕРИОДТЫ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

Импульс әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты периодты шеттік есебі параметрлеу әдісі көмегімен зерттелген. Қарастырылып отырған шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары тағайындалған және оның жуық шешімдерін табудың алгоритмдері құрылған.

Импульс әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есепті қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = B_0(t)x + B_1(t)x(\mu) + f(t), \quad t \in [0,T] \setminus \{\theta\}, \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to \theta - 0} x(t) - \lim_{t \to \theta + 0} x(t) = \varphi, \qquad \varphi \in R^n, \tag{2}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3}$$

мұндағы $(n \times n)$ - өлшемді $B_0(t), B_1(t)$ матрицалары және n- өлшемді $f(t)$ вектор – функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз, $0 < \theta < \mu < T$, $\|x\| = \max_{i=1,n} |x_i|$,

$$\|B_0(t)\| = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij}^1(t) \right| \le \beta_1, \; \|B_1(t)\| = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij}^2(t) \right| \le \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 - const.$$

(1) – (3) есебінің шешімі деп $t \in [0,T] \setminus \{\theta\}$ аралығында жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесін, θ нүктесіндегі импульстік (2) шартын қанағаттандыратын және $t = 0$ мен $t = T$ нүктелеріндегі мәндері үшін (3) теңдігі орындалатын $(0,T)$ аралығында бөлікті үзіліссіз дифференциалданатын $x^*(t)$ вектор-функциясын айтамыз.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әртүрлі әдістермен көптеген авторлардың жұмыстарында қарастырылған [1,2]. Мұндай теңдеулерді зерттеу жүктелген дифференциалдық теңдеудің қолданбалы математикадағы алатын орнымен маңызды. Мысалға, шоғырланған массалармен жүктелген шектің тербелісі туралы есеп, серпімді желіге ілінген жүктің ұзына бойғы қозғалысы туралы есеп, ұштарына масса ілінген желінің бұрамалы тербелістері есебі және т.т. жүктелген дифференциалдық теңдеулерге әкеледі.

(0,T) интервалын бөліктеу және қосымша параметрлерді енгізу арқылы жүктелген дифференциалдық теңдеуі үшін екі нүктелі шеттік есепті шешудің әдісі [3] жұмысында ұсынылған болатын. Назарларыңызға ұсынылып отырған жұмыста осы әдіспен (1)-(3) импульс әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін периодты шеттік есеп зерттелінеді.

$[0,T]$ аралығын жүктеу нүктесі мен импульс нүктесін ескере отырып үш аралыққа бөлейік: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{3} [t_{r-1}, t_r)$, мұндағы $t_0 = 0,\ t_1 = \theta,\ t_2 = \mu,\ t_3 = T$. Ізделінді функцияның бөлінген аралықтарға сығылуын $x_r(t) = x(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,3}$ деп белгілейік, $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1,3}$, қосымша параметрлерін енгізіп және әрбір $[t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,3}$, интервалында

$u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,3}$, алмастыруларын жасайық. Соның нәтижесінде келесі параметрі бар шеттік есепті аламыз:

$$\frac{du_r}{dt} = B_0(t)u_r(t) + B_0(t)\lambda_r + B_1(t)\lambda_3 + f(t), \quad u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in (t_{r-1}, t_r), \; r = \overline{1,3}, \qquad (4)$$

$$\lambda_2 + \lim_{t\to\mu-0} u_2(t) = \lambda_3, \qquad (5)$$

$$\lambda_1 + \lim_{t\to\theta-0} u_1(t) - \lambda_2 = \varphi, \qquad (6)$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 + \lim_{t\to T-0} u_3(t). \qquad (7)$$

(1) – (3) және (4) – (7) есептері пара-пар болады. Егер $x(t)$ функциясы (1) – (3) есебінің шешімі болса, онда келесі $(\lambda, u[t])$ жұбы, мұндағы $\lambda = (x(0), x(\theta), x(\mu))$, $u[t] = (x(t) - x(0), x(t) - x(\theta), x(t) - x(\mu))$ – (4) – (7) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ жұбы, мұндағы $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t))$ – (4) – (7) есебінің шешімі болса, онда $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{u}_1(t)$, $t \in [0,\theta)$, $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_2 + \tilde{u}_2(t)$, $t \in [\theta,\mu)$, $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_3 + \tilde{u}_3(t)$, $t \in [\mu, T)$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_3 + \lim_{t\to T-0} \tilde{u}_3(t)$ теңдіктерімен анықталатын $\tilde{x}(t)$ функциясы бастапқы (1) – (3) есебінің шешімі болады.

(4) Коши есебі келесі интегралдық теңдеуге пара-пар болады:

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} \left[B_0(\tau)(u_r(\tau) + \lambda_r) + B_1(\tau)\lambda_3 + f(\tau)\right]d\tau, \qquad t \in (t_{r-1}, t_r), \; r = \overline{1,3}. \qquad (8)$$

Енді интегралдың астындағы $u_r(\tau)$, $r = \overline{1,3}$, функциясының орнына (8) теңдеуінің сәйкес оң жағын қойып, бұл үдерісті $\nu(\nu = 1,2,...)$ рет қайталасақ, онда $u_r(t)$, $r = \overline{1,3}$, функциясының келесі кейіптемесін аламыз

$$u_r(t) = \tilde{D}^0_{\nu,r}(t)\lambda_r + \tilde{D}^1_{\nu,r}(t)\lambda_3 + \tilde{G}_{\nu,r}(u,t) + \tilde{F}_{\nu,r}(t), \qquad t \in (t_{r-1}, t_r), \; r = \overline{1,3}, \qquad (9)$$

мұндағы

$$\tilde{D}^i_{\nu,r}(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} B_i(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} B_0(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1} B_i(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} B_0(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} B_0(\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} B_i(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1, \quad i = 0,1, \quad r = \overline{1,3},$$

$$\widetilde{F}_{\nu,r}(t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}B_0(\tau_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}B_0(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}B_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,\quad r=\overline{1,3},$$

$$\widetilde{G}_{\nu,r}(u,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}B_0(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}B_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}B_0(\tau_\nu)u_1(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,\quad r=\overline{1,3}.$$

(9) теңдеуінен $\lim\limits_{t\to t_r-0}u_r(t),\ r=\overline{1,3},$ мәнін тауып, оны (5) – (7) шарттарына қойсақ, $\lambda_r,\ r=\overline{1,3},$ параметрлеріне сәйкес теңдеулер жүйесін аламыз:

$Q_\nu(\theta,\mu)\lambda=-F_\nu(\theta,\mu)-G_\nu(u,\theta,\mu),\ \lambda\in R^{3n}$, (10)

мұндағы

$$Q(\theta,\mu)=\begin{pmatrix}0 & I+\widetilde{D}^0_{\nu,2}(\mu) & \widetilde{D}^1_{\nu,2}(\mu)-I\\ I+\widetilde{D}^0_{\nu,1}(\theta) & -I & \widetilde{D}^1_{\nu,1}(\theta)\\ I & 0 & -I-\widetilde{D}^0_{\nu,3}(T)-\widetilde{D}^1_{\nu,3}(T)\end{pmatrix},$$

$$F_\nu(\theta,\mu)=(\widetilde{F}_{\nu,2}(\mu),-\varphi+\widetilde{F}_{\nu,1}(\theta),-\widetilde{F}_{\nu,3}(T)),$$

$$G_\nu(u,\theta,\mu)=(\widetilde{G}_{\nu,2}(u,\mu),\widetilde{G}_{\nu,1}(u,\theta),-\widetilde{G}_{\nu,3}(u,T)).$$

Енді (8), (10) есебінің шешімі болатын $(\lambda,u[t])$ жұбы төмендегі алгоритм арқылы анықталатын $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]),\ k=0,1,2,\ldots$ жұптар тізбегінің шегі ретінде ізделінеді:

0-ші қадам: а) $Q_\nu(\theta,\mu)$ матрицасының кері матрицасы бар деп жорамалдап, λ параметрлерінің $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\lambda_3^{(0)})$ бастапқы жуықтауын $Q_\nu(\theta,\mu)\lambda=-F_\nu(\theta,\mu)$ теңдеуінен табамыз, яғни $\lambda^{(0)}=-[Q_\nu(\theta,\mu)]^{-1}F_\nu(\theta,\mu)$. б) $\lambda^{(0)}\in R^{3n}$ векторының компоненттерін қолданып және $t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3},$ аралықтарында $\lambda=\lambda^{(0)}$ болғанда (8) Коши есебін шешіп $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),u_3^{(0)}(t))$ функцияларын табамыз.

1-ші қадам: а) Табылған $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),u_3^{(0)}(t))$ функцияларын (10) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің оң жағына қойып, $Q_\nu(\theta,\mu)\lambda=-F_\nu(\theta,\mu)-G_\nu(u^{(0)},\theta,\mu)$ теңдеуінен $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\lambda_3^{(1)})$ параметрін табамыз. б) $t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3},$ аралықтарында $\lambda=\lambda^{(1)}$ болғанда (8) Коши есебін шешіп $u^{(1)}[t]=(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t),u_3^{(1)}(t))$ функцияларын табамыз. Т.с.с.

Осы үдерісті қайталап отырып, алгоритмнің k-шы қадамында $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,\ldots$ жұптар жүйесін аламыз.

Ұсынылып отырған алгоритмнің жүзеге асуы мен жалғыз шешімге жинақталуының жеткілікті шарттары және (1) – (3) импульстік әсері бар шеттік есебінің жалғыз шешімі болатыны келесі теоремада келтірілген:

Теорема 1. *Егер кез келген* $\nu\in N$ *үшін* $Q_\nu(\theta,\mu):R^{3n}\to R^{3n}$ *матрицасының кері матрицасы бар болса және*

$$\left\| [Q_\nu(\theta,\mu)]^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(\theta,\mu),$$

$$q_\nu(\theta,\mu) = \gamma_\nu(\theta,\mu)\left\{ e^{\beta_1 \overline{h}} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\beta_1 \overline{h})^j}{j!} + \beta_2 \overline{h}\left(e^{\beta_1 \overline{h}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\beta_1 \overline{h})^j}{j!} \right) \right\} < 1,$$

мұндағы $\overline{h} = \max(\theta, \mu-\theta, T-\mu)$, *теңсіздіктері орындалса, онда (1) – (3) есебінің жалғыз шешімі болады.*

Теореманың дәлелі [4] теоремаға ұқсас дәлелденеді.

Мысал. $[0,1]$ кесіндісінде импульс әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін төмендегідей периодты шеттік есебі қарастырылады

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{t}{4} & 0 \\ 0 & \frac{t}{16} \end{pmatrix} x\left(\frac{2}{3}\right) + \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ f_2(x,t) \end{pmatrix},\ t \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, \quad (11)$$

$$\lim_{t\to\frac{1}{3}-0} x(t) - \lim_{t\to\frac{1}{3}+0} x(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$x(0) = x(1), \quad (13)$$

мұндағы $B_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix}$, $B_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} & 0 \\ 0 & \frac{t}{16} \end{pmatrix}$, $\theta = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, $T = 1$.

Параметрлеу әдісінің сүлбесін есере отырып $[0,1]$ аралығын үш аралыққа бөлейік: $[0,1) = \bigcup_{r=1}^{3} [t_{r-1}, t_r)$, мұндағы $t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{3},\ t_2 = \frac{2}{3},\ t_3 = 1$. Ізделінді функцияның бөлінген аралықтарға сығылуын $x_r(t) = x(t),\quad t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,3}$ деп белгілейік, $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1,3}$, қосымша параметрлерін енгізіп және әрбір $[t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,3}$, интервалында $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,3}$, алмастыруларын жасайық. Соның нәтижесінде келесі параметрі бар шеттік есепті аламыз:

$$\frac{du_r}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} [u_r(t) + \lambda_r] + \begin{pmatrix} \frac{t}{4} & 0 \\ 0 & \frac{t}{16} \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ f_2(x,t) \end{pmatrix},\ u_r(t_{r-1}) = 0,\ \ t \in (t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,3},$$

$$\lambda_2 + \lim_{t\to\frac{2}{3}-0} u_2(t) = \lambda_3,$$

$$\lambda_1 + \lim_{t\to\frac{1}{3}-0} u_1(t) - \lambda_2 = \varphi,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 + \lim_{t\to 1-0} u_3(t).$$

$\nu = 2$ болғанда $Q_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ матрицасы келесі түрде болады:

$$Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0238 & 0.3333 & -0.9583 & 0.0015 \\ 0 & 0 & -0.1591 & 1.0292 & 0.0033 & -0.9896 \\ 1.0061 & 0.3333 & -1 & 0 & 0.0139 & 0.0003 \\ 0.055 & 1.0122 & 0 & -1 & 0.0004 & 0.0035 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1.1083 & -0.336 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.254 & -1.0604 \end{pmatrix}.$$

Бұл матрицаның кері матрицасы бар.Ол келесі түрде болады:

$$\left[Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right]^{-1}=\begin{pmatrix} -0.211 & 2.2718 & 0.1454 & 2.2678 & 0.7289 & -2.344 \\ 1.0559 & -0.3019 & 1.033 & 0.0412 & -1.0416 & 0.6139 \\ 0.1327 & 2.2168 & -0.5115 & 2.3258 & 0.3866 & -2.1837 \\ 1.0609 & -0.1826 & 1.0571 & -0.8343 & -1.0177 & 0.4921 \\ -0.5308 & 2.3034 & -0.177 & 2.1938 & 0.0574 & -2.1615 \\ 1.1229 & -0.8364 & 1.0166 & -0.4865 & -0.9961 & 0.1536 \end{pmatrix}.$$

Теореманың шарттарының орындалуын тексерейік:

$$\left\|\left[Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right]^{-1}\right\|\le 7.969,$$

$$q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=7.969\cdot\left[\left(e^{\frac{1}{3}}-1-\frac{1}{3}-\frac{(1/3)^2}{2}\right)+0.25\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(e^{\frac{1}{3}}-1-\frac{1}{3}\right)\right]=0.949<1.$$

Теореманың барлық шарттары орындалып тұр, онда (11) – (13) есебінің жалғыз шешімі бар болады.

LITERATURA

1 *Nakhushev A.M.*Uravneniya matematicheskoi biologii. -M: Vyshaya shkola, 1995. - 205 s.

2 Abdullaev B.M.,Aida-zade K.R. O chislennom reshenii nagruzhennikh differentcial'nikhuravnenii //Zhurnal vichisl. matem. i matem. fiz. 2004.T. 44. №9. –S.1585-1595.

3 *Dzhumabaev D.S.* Priznaki odnoznachnoi razreshimosti lineinoi kraevoi zadachi dlya obiknovennogo differentcial'nogo uravneniya //Zhurnal vichisl. matem. i matem. fiziki. - 1989. - T.29, №1. -S. 50-66.

4 *Bakirova E.A.* O priznake odnoznachnoi razreshimosti dvukhtochechnoi kraevoi zadachi dlya systemi nagruzhennikh differentcial'nikh uravnenii //Izvestiya NAN RK. Ser. phyz-matem. – 2005. - №1. -S. 95-102.

Э.А. Бакирова[1], Х. Далелхан[2]

О периодических решениях краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Аннотация

Методом параметризации исследована линейная периодическая краевая задача для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Получены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи и предложены алгоритмы нахождения ее приближенного решения.

E.A. Bakirova, Kh. Dalelhan

Solvability of linear boundary value problem with integral condition for loaded differential equations

Summary

The linear periodic boundary value problem for system of loaded differential equations with impulse effect was investigated by parametrization method. Sufficient conditions of unique solvability of considering problem are established and algorithms for finding its approximate solution are constructed.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, ведущий сотрудник[1]
Казахский государственный женский педагогический университет, магистрант[2]