

*Р. К. МАНАТБАЕВ, А. К. ТУЛЕПБЕРГЕНОВ, А. М. САТЫМБЕКОВ,  
К. Е. ШЕРНИЯЗОВ, Ж. И. УЗАКОВА*

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан)

## ОБ ОДНОМ СТАЦИОНАРНОМ 2-D МОДЕЛЕ ВЕТРОТУРБИНЫ ДАРЬЕ

**Аннотация.** Ветроурубина карусельного типа Дарье относится к виду вертикально-осевой ветроурубины, которая работает за счет действия подъемной силы на профиль рабочей лопасти [1-3]. В этой работе математическая модель взаимодействия вращающейся ветроурубины «Дарье» с угловой скоростью  $\omega$  со стационарным воздушным потоком описывается стационарными уравнениями Навье-Стокса и неразрывности.

Уравнения Навье-Стокса и неразрывности с граничными условиями сначала приводятся к виду  $\psi-\omega$  и методом продольно-поперечной прогонки определяется  $\omega$ , а затем  $\psi$ . Для проведения расчетов рассмотренным этим методом была разработана компьютерная программа на языке Фортран и реализована на компьютере. С помощью этой программы были проведены численные расчеты.

В конце статьи приведены некоторые результаты полученного из численного расчета, которые хорошо описывают физику явления. Полученные результаты будут полезны инженерам и проектировщикам при проектировании и изготовлении ВЭУ карусельного типа с высокими технико-экономическими показателями.

**Ключевые слова:** Дарье, вертикально-осевой, математическая модель, численный расчет, поле скоростей, аппроксимация, линии тока.

**Тірек сөздер:** Дарье, вертикаль-өсті, математикалық үлгі, сандық есептеу, жылдамдық өрісі, аппроксимация, ағын сызығы.

**Keywords:** Darrieus, vertical axis, mathematical models, numerical calculations, velocity field, approximation, streamlines.

В этой работе рассматриваем разработку математической модели для исследования взаимодействия ветроурубины карусельного типа «Дарье» со стационарным воздушным потоком [1-4]. Систему координат представим ( $xOy$ ) перпендикулярной к вращающейся с постоянной скоростью  $\omega$  оси (вала) турбины. Вращение турбины рассматриваем установившейся. Рабочая лопасть создает возмущение на стационарный воздушный поток, и эти возмущения в уравнении движения представляются, как источники объемных сил [5-7].

Целью данной работы является рассмотрение теоретического 2D моделирования работы ветроурубины карусельного типа, которая дает возможность определить оптимальные параметры турбины (см. рисунок 1).

Математическая модель воздействия стационарного воздушного потока со скоростью « $u$ » на вращающуюся ветроурубину «Дарье» (радиусом  $r_0$ ) с угловой скоростью  $\omega$  (эта показана на рисунке 2 – принципиальная схема) описывается стационарными уравнениями Навье-Стокса и неразрывности, и имеет следующий вид:

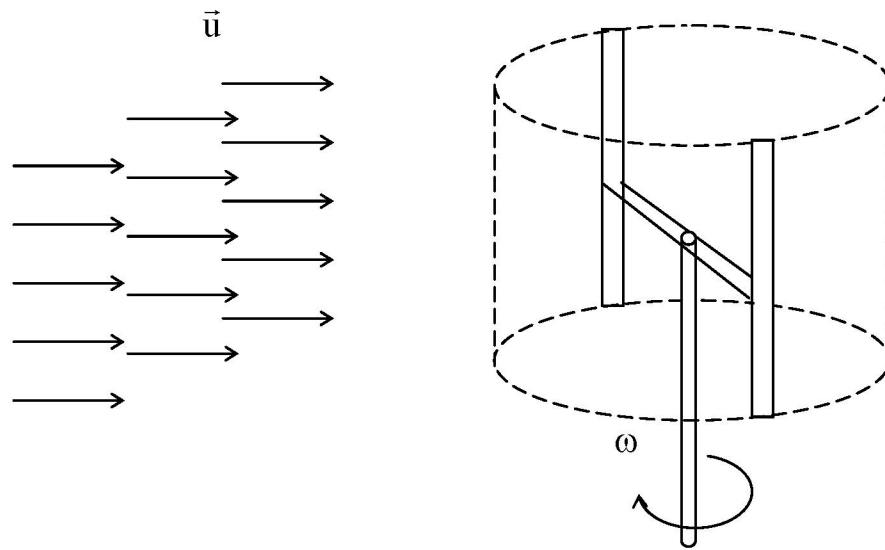


Рисунок 1

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} R_x, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} R_y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

С граничными условиями,

$$\begin{aligned} u(x,0)=u(x,1)=u(0,y)=u_\infty, \quad \frac{\partial u(1,y)}{\partial x} = 0; \\ v(x,0)=v(x,1)=v(0,y)=0, \quad \frac{\partial v(1,y)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1')$$

В качестве аэродинамических сил сопротивления ветровому потоку берутся проекции осредненных сил сопротивления и подъемной силы лопасти (в обратном направлении) на оси Oх и Oу в виде сосредоточенных источников  $R_x, R_y$  и входят в правую часть уравнений движения [4-8].

Для определения этих массовых сил сначала определяется угол атаки  $\alpha$  и скорость атаки  $\vec{W}$ , а коэффициенты подъемной силы и сил сопротивления зависит только от угла атаки.

$$\begin{aligned} |\vec{W}| &= \sqrt{(u \sin \theta + v \cos \theta)^2 + (r_0 \omega + u \cos \theta + v \sin \theta)^2}, \\ \text{tg} \alpha &= \frac{u \sin \theta + v \cos \theta}{r_0 \omega + u \cos \theta + v \sin \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вводя локальное число быстроходности  $Z = \frac{r_0 \omega}{u_\infty}$ , получим,

$$\alpha = \text{arctg} \left( \frac{u \sin \theta + v \cos \theta}{Z + u \cos \theta + v \sin \theta} \right). \quad (3)$$

Для определения аэродинамических сил введем единичные векторы:  $\vec{e}_w$  – единичный вектор сопротивления, направленный вдоль вектора относительной скорости и  $\vec{e}_L$  – единичный вектор подъемной силы направленный перпендикулярно ему.

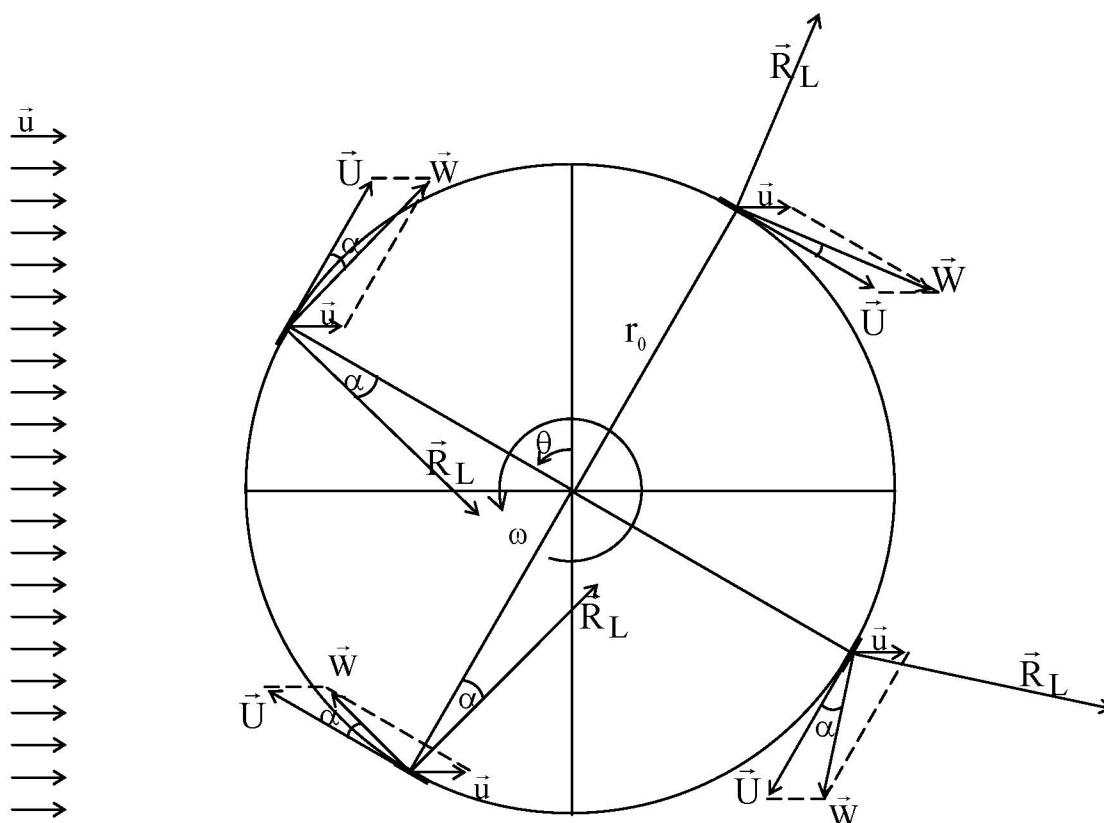


Рисунок 2

Элементарные составляющие аэродинамических сил:

а) подъемная сила профиля:

$$\vec{R}_L = C_L(\alpha) \rho \frac{W^2}{2} h \vec{e}_L, \quad (4)$$

где,  $C_L(\alpha)$  – коэффициент подъемной силы,  $h$  – длина хорды профиля,

б) сила сопротивления

$$\vec{R}_D = C_D(\alpha) \rho \frac{W^2}{2} h \vec{e}_w, \quad (5)$$

Коэффициенты  $C_L(\alpha)$ ,  $C_D(\alpha)$  как формулы угла атаки, являются результатами продувок используемого профиля для значений  $\alpha$  в интервале  $0-360^\circ$ . При значениях параметра  $Z = \frac{r_0 \omega}{u_\infty} = \frac{U}{u_\infty} > 5$ ,

угол атаки  $\alpha$  во всем интервале  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  становится менее  $13^\circ$ , что отвечает уже условиям эффективного действия подъемной силы во всей ометаемой лопастями площади [1-3].

Запишем выражения для вращающего момента турбины

$$M = \frac{nh r_0 H}{\pi} \int_0^\pi \rho \frac{W^2}{2} (C_L(\alpha) \sin \alpha - C_D(\alpha) \cos \alpha) d\theta, \quad (6)$$

где,  $n$  – число лопастей ротора,  $H$  – длина рабочей лопасти.

Теперь применяем следующие преобразования в формуле (1) для перехода к виду переменных  $(\psi-\omega)$ ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

формула (1) приводится к виду в переменных функция тока и завихренность  $(\psi-\omega)$ ,

$$\begin{cases} L_1\omega + L_2\omega = \frac{\partial R_x}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \end{cases} \quad (8)$$

здесь,  $L_1, L_2$  – дифференциальные операторы, или подробно,

$$L_1(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} (u(\cdot)) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}, \quad L_2(\cdot) = \frac{\partial}{\partial y} (v(\cdot)) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$$

или более подробно,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \omega \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \omega. \end{cases} \quad (9)$$

Конвективных членов формулы (9) напишем в следующем разностном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \omega \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] = \frac{\left[ \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2}j} - \left[ \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i-\frac{1}{2}j}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{\left[ \omega \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{ij+\frac{1}{2}} - \left[ \omega \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{ij-\frac{1}{2}}}{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}};$$

Далее конвективные члены аппроксимируются по схеме против потока второго рода, а вязкие члены с центральной разностью,

Второе уравнение из формулы (9) аппроксимируется центральной разностью,

$$\left( \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \left( \frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} \frac{\psi_{ij} - \psi_{ij-1}}{y_j - y_{j-1}} \right) = \omega.$$

следует кратко написать в виде,

$$A_i \psi_{i+1j} + B_i \psi_{i-1j} + C_{ij} \psi_{ij} + D_j \psi_{ij+1} + E_j \psi_{ij-1} - \omega_{ij} = 0 \quad (10)$$

Первое уравнение из формулы (8) аппроксимировав по схеме против потока второго рода, расщепляется по направлениям,

$$\begin{cases} \frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{ij}^n}{\Delta t/2} + L_1 \omega_{ij}^{n+1/2} + L_2 \omega_{ij}^n = f_{ij}^n, \\ \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + L_1 \omega_{ij}^{n+1/2} + L_2 \omega_{ij}^{n+1} = f_{ij}^{n+1/2} \end{cases} \quad (11)$$

Формула (11) записывается в таком виде

$$\begin{cases} \left( I_1 + \frac{\Delta t}{2} L_1 \right) \omega_{ij}^{n+1/2} = \left( I_1 - \frac{\Delta t}{2} L_2 \right) \omega_{ij}^n + \frac{\Delta t}{2} f_{ij}^n, \\ \left( I_1 + \frac{\Delta t}{2} L_2 \right) \omega_{ij}^{n+1} = \left( I_1 - \frac{\Delta t}{2} L_1 \right) \omega_{ij}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} f_{ij}^{n+1/2} \end{cases} \quad (12)$$

Формулу (10) пишем

$$\psi_{ij}^{n+1} - \psi_{ij}^n = \beta' (A_i \psi_{i+1j} + B_i \psi_{i-1j} + C_{ij} \psi_{ij} + D_j \psi_{ij+1} + E_j \psi_{ij-1} - \omega_{ij}) \quad (13)$$

Из первого уравнения формулы (12) продольной прогонкой вычисляется промежуточный  $\omega_{ij}^{n+1/2}$ , а из второго –  $\omega_{ij}^{n+1}$ . Потом уже из определенного  $\omega_{ij}^{n+1}$  по формуле (13) вычисляется  $\psi_{ij}^{n+1}$

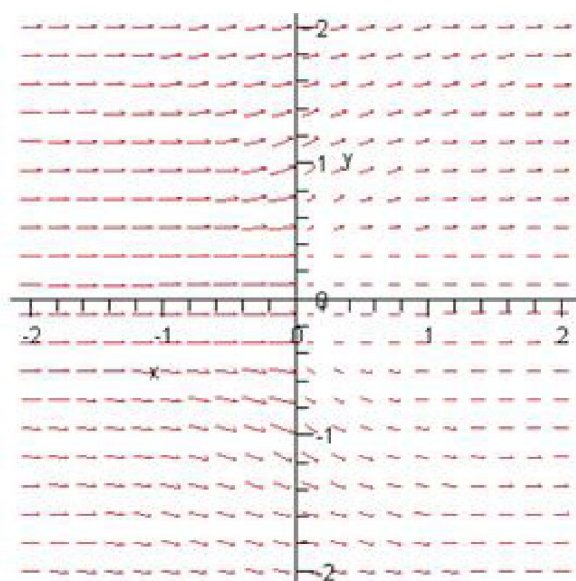


Рисунок 3

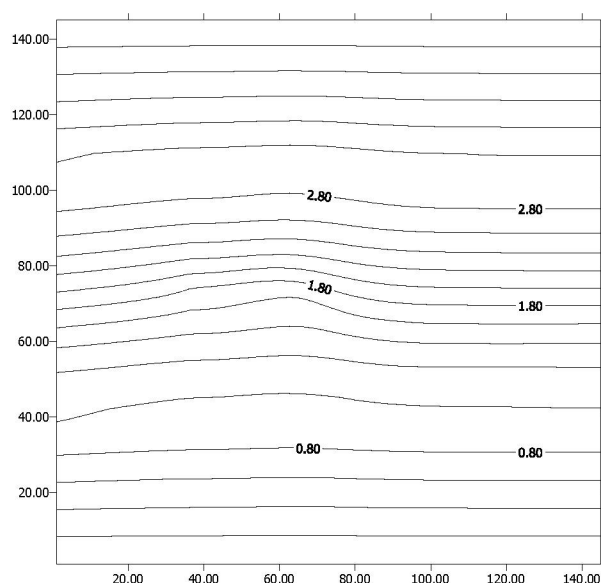


Рисунок 4

по методу верхней релаксации. На рисунке 3 показано график поля скоростей полученный без учета вязких членов в уравнении Навье-Стокса, а на рисунке 4 с учетом вязких членов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Турян К. Дж., Стрикленд Дж., Х., Бэрг Д.Э. Мощность ветроэлектрических агрегатов с вертикальной осью вращения //Аэрокосмическая техника. – 1988. – № 8. – С. 105-121.
- 2 Ganesh Rajagopalan R. and Jerome B. Fanucci Finite Difference Model for Vertical Axis Wind Turbines // J. Propulsion. – 1985. – Vol. 1, № 6. – P. 432-436.
- 3 Ерпина А.К., Ершин Ш.А., Жапбасбаев У.К. Основы теории ветротурбины Дарье. – Алматы, 2001. – 104 с.
- 4 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. 1987. – 840с.
- 5 Jon Paraschivoiu and Philippe Desy. Aerodynamics of Small – Scale Vertical – Axis Wind Turbines //J. Propulsion. – 1986. – Vol. 2, № 3. – P. 282-288.
- 6 Brochier G., P. Fraunie, and Bequier C. Water Channel Experiments of Dynamic Stall on Darrieus Wind Turbine Blades // J. Propulsion. – 1986. – Vol. 2, №5. – P. 445-449.
- 7 Satymbekov A.M., Tulepbergenov A.K., Ualiev Zh.R. Numerical modeling of modern wind turbines (carousel type) // V World Congress Engineering and Technology – WCET-2012, Kazakhstan, Almaty. 2012. – p.294-296.
- 8 Tulepbergenov A.K., Sherniazov K.E. The Vortex Model of the Windturbine Darrie // IV Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Azerbaijan, Baku, 2011. – p.475.

#### REFERENCES

- 1 Twryan K. Dj., Stri"kle'nd Dj., H., Be'rg D.E'. Moshlnost# vetroe'lektri"cheski" h agregatov s verti"kal#noy os#yu vrashheni"ya //Ae'rokosmi"cheskaya tehni"ka. – 1988. – № 8. – S. 105-121.
- 2 Ganesh Rajagopalan R. and Jerome B. Fanucci Finite Difference Model for Vertical Axis Wind Turbines // J. Propulsion. – 1985. – Vol. 1, № 6. – P. 432-436.
- 3 Ershi"na A.K., Ershi"n Sh.A., Japbasbaev W.K. Osnovi' teori"i" vetrotwrbi"ni' Dar#e. – Almati', 2001. – 104 s.
- 4 Loycyanski"y L.G. Mehani"ka ji"dkosti" i" gaza. – M.: Nawka. 1987. – 840s.
- 5 Jon Paraschivoiu and Philippe Desy. Aerodynamics of Small – Scale Vertical – Axis Wind Turbines //J. Propulsion. – 1986. – Vol. 2, № 3. – P. 282-288.
- 6 Brochier G., P. Fraunie, and Bequier C. Water Channel Experiments of Dynamic Stall on Darrieus Wind Turbine Blades //J. Propulsion. – 1986. – Vol. 2, №5. – P. 445-449.
- 7 Satymbekov A.M., Tulepbergenov A.K., Ualiev Zh.R. Numerical modeling of modern wind turbines (carousel type) //V World Congress Engineering and Technology – WSET-2012, Kazakhstan, Almaty. 2012. – p.294-296.
- 8 Tulepbergenov A.K., Sherniazov K.E. The Vortex Model of the Windturbine Darrie // IV Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Azerbaijan, Baku, 2011. – p.475.

## Резюме

*Р. К. Манатбаев, А. К. Төлепбергенов, А. М. Сатымбеков,  
К. Е. Шерниязов, Ж. И. Ұзақова*

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан)

### ДАРЬЕ ЖЕЛ ТУРБИНАСЫНЫҢ ОРНЫҚТАЛҒАН 2-D ҮЛГІСІ ТУРАЛЫ

Карусель типтес Дарье жел турбинасы, жұмысшы қалақшасының профиліне әсер ететін көтеру күшінің арқасында жұмыс істейтін вертикаль-өсті жел турбиналар түріне жатады [1-3]. Бұл жұмыста  $\omega$  бұрыштық жылдамдықпен айналып тұрған «Дарье» жел турбинасының орнықталған ауа ағынымен өзара әсерлесуінің математикалық үлгісі үздіксіздік және Навье-Стокстың орнықталған теңдеулерімен жазылады.

Үздіксіздік пен Навье-Стокстың теңдеулері және олардың шекаралық шарттары алдымен  $\psi$ - $\omega$  айнымалылары түрінде жазылады да, тік-көлденең қуалау әдісі бойынша  $\omega$ , ал содан соң  $\psi$  айнымалылары анықталады. Осы қарастырылған сандық әдістер бойынша есептеулер жүргізу үшін Фортран тілінде компьютерлік бағдарламасы құрылып, компьютерде өңделді. Осы бағдарламаның көмегімен сандық есептеулер жүргізілді.

Мақаланың соңында сандық есептеулерден алынған нәтижелері график түрінде келтірілген, олар мәселенің физикалық құбылысына сәйкес келеді. Алынған нәтижелердің тұжырымдары техника-экономикалық көрсеткіші жоғары карусель типтес жел турбиналарын жобалау және жасау кезінде инженерлерге және жобалаушыларға пайдасы бар деп білеміз.

**Тірек сөздер:** Дарье, вертикаль-өсті, математикалық үлгі, сандық есептеу, жылдамдық өрісі, аппроксимация, ағын сызығы.

## Summary

*R. K. Manatbayev, A. K. Tulepbergnov, A. M. Satimbekov,  
K. E. Sherniyazov, Zh. I. Uzakova*

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan)

### ABOUT ONE STATIONARY 2-D MODEL OF THE WIND TURBINE OF DARRIEUS

The wind turbine of rotary type to Darya belongs to a type of the vertically axial wind turbine which works due to action of carrying power for a profile of the working blade [1-3]. In this work the mathematical model of interaction of the rotating wind turbine to «Darya» with an angular speed of  $\omega$  with a stationary air stream is described by Navier-Stokes's stationary equations and continuity equations.

Navier-Stokes's equation and continuity with boundary conditions at first it is led to a type of  $\psi$ - $\omega$ , and  $\omega$  is defined by a method of longitudinally cross pro-race, and then  $\psi$ . The computer program was developed for carrying out calculations by considered this method in the Fortran language and realized on the computer. By means of this program numerical calculations were carried out.

At the end of article some results received of numerical calculation which well describes physics of the phenomenon are given. The received results will be useful to engineers and designers at design and production of WET of rotary type with high technical and economic rates.

**Keywords:** Darrieus, vertical axis, mathematical models, numerical calculations, velocity field, approximation, streamlines.