

Сведения об авторах:

1. Сарбаев С.Ш. (д.т.н., профессор Казахская Академия транспорта и коммуникаций),
2. Габдуллин А.Ж. (магистрант Казахская Академия транспорта и коммуникаций)

УДК 656.212

С.Ш. САРБАЕВ, А.С. БАЙМАХАН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОЗОЧНЫМ ПРОЦЕССОМ В ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ

(Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева)

Рассмотрены локальные задачи отдельных технологических операций и центрального органа управления общетранспортного узла на основе декомпозиционного подхода.

Ключевые слова: Транспорт, вагон, перевозочный процесс, общетранспортный узел, оптимальное управление, ресурс, математическая модель.

Наличие множества факторов, влияющих на состояние транспортного процесса требует применения оптимальных моделей оперативного управления перевозочным процессом в транспортных системах. При этом задача должна охватывать весь процесс от поступления грузов на перевозку до вывоза их к получателям, включая процессы передачи их на другие виды транспорта.

Теоретически, с точки зрения управления, транспортный узел, где проходят все транспортные операции, можно представить как совокупность технологических процессов по обработке и управлению транспортными средствами. Каждая технологическая операция, имеющая вход и выход данных, а также какой-то оператор управления (G_j), может быть задана тройкой математических объектов общетранспортного узла (ОТУ):

$$(X_i, G_i, r_i) i \in \overline{1, S} \quad (1)$$

где $X_i \in R^{m_i}$, $r_i \in R^{n_i}$, и $G_i : X_i \rightarrow \overline{1, S}$, причем X_i и r_i некоторые, вообще говоря, невыпуклые и несвязанные подмножества конечномерных пространств R^{m_i} и R^{n_i} соответственно, а G_i - оператор, действующий на X_i в r_i .

Взаимосвязь технологических операций может быть задана оператором Q , действующим на прямом произведении $x_i \in \overline{1, S}$ в прямое произведение r_i , так что $Q : X_1 \times \dots \times X_s \rightarrow r_1 \times \dots \times r_s$ (перевод совокупности элемента из одной в другую).

Естественные ограничения, присущие каждой технологической операции, определяют в множества r_i и $r_i \forall i \in \overline{1, S}$ некоторые подмножества, так что переменные, определяющие эту операцию, оказываются связанными некоторыми функциональными (операторными) неравенствами вида $G_i(X_i) \leq b_i$, где $b_i \in R^{n_i}$ - некоторые фиксированные векторы при $i \in \overline{1, S}$.

Взаимосвязь технологических операций в ОТУ, отражающая естественные ограничения, свойственные ОТУ в целом, при этом связывает переменные $X_i \ i \in \overline{1, S}$ в некотором

функциональном операторном неравенстве вида $Q(X_1, \dots, X_s) \leq g$, где $g \in R^{\sum_{i=0}^s n_i}$.

Таким образом, общую математическую модель ОТУ можно записать в виде системы функциональных неравенств, имеющих блочно-диагональную структуру:

$$\begin{aligned}
 & Q(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_s) \leq g \\
 & G_1(\vec{X}_1)_1 \leq b_1 \\
 & G_2(\vec{X}_2) \leq b_2 \\
 & \text{(I)} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & G_s(\vec{X}_s) \leq b_s \\
 & \vec{x}_i \in X_i
 \end{aligned} \tag{2}$$

Это означает, что каждый вектор (x_i) , описывающий какую-либо технологическую операцию в общетранспортном узле, определяемую тройкой математических объектов (X_i, G_i, r_i) , принадлежит некоторому подмножеству множества $*$, лежащего в конечном пространстве R^{m_i} , а векторы b_1, b_2, \dots, b_s принадлежат множеству r_i , лежащему в конечномерном пространстве R^{n_i} .

При этом R^{m_i} и R^{n_i} - конечномерные евклидовы (арифметические) пространства, размерности m_i и n_i соответственно.

Каждое из S -функциональных неравенств, присутствующих в приведенной математической модели общетранспортного узла, можно рассматривать как систему ограничений некоторой задачи планирования и управления, связанной с какой-то определенной технологической операцией. Действительно, каждое из указанных неравенств $G_i(\vec{X}_i) \leq b_i$ связывают переменные, определяющие только i -ю технологическую операцию. Поэтому, добавляя к указанной схеме неравенств какой-либо критерий вида $f_i(\vec{x}_i) \rightarrow extremum$, где $f_i : X_i \rightarrow R^1$ - некоторый функционал, определенный на множестве X_i , и решая получающуюся экстремальную задачу $f_i(\vec{x}_i) \rightarrow extremum$, можно найти векторы \vec{x}_i , удовлетворяющие указанным системам неравенств, т.е. $G_i(\vec{x}_i) \leq b_i \forall i \in \overline{1, S}$.

Если окажется, что набор векторов $\vec{x}_i \ i \in \overline{1, S}$ таков, что $Q(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s) \leq g$, то этот набор определяет допустимый, согласованный план работы ОТУ.

Переход от приведенной общей системы ограничений математической модели ОТУ к решению отдельных задач планирования и управления отдельными технологическими операциями реализует один из этапов декомпозиционного подхода к решению задачи планирования и управления ОТУ.

Математическую модель ОТУ, приведенную выше, иллюстрирует рис.1.

Q, G_1, G_2, G_s - математические записи тех технологических ограничений, которые свойственны i -й технологической операции в узле.

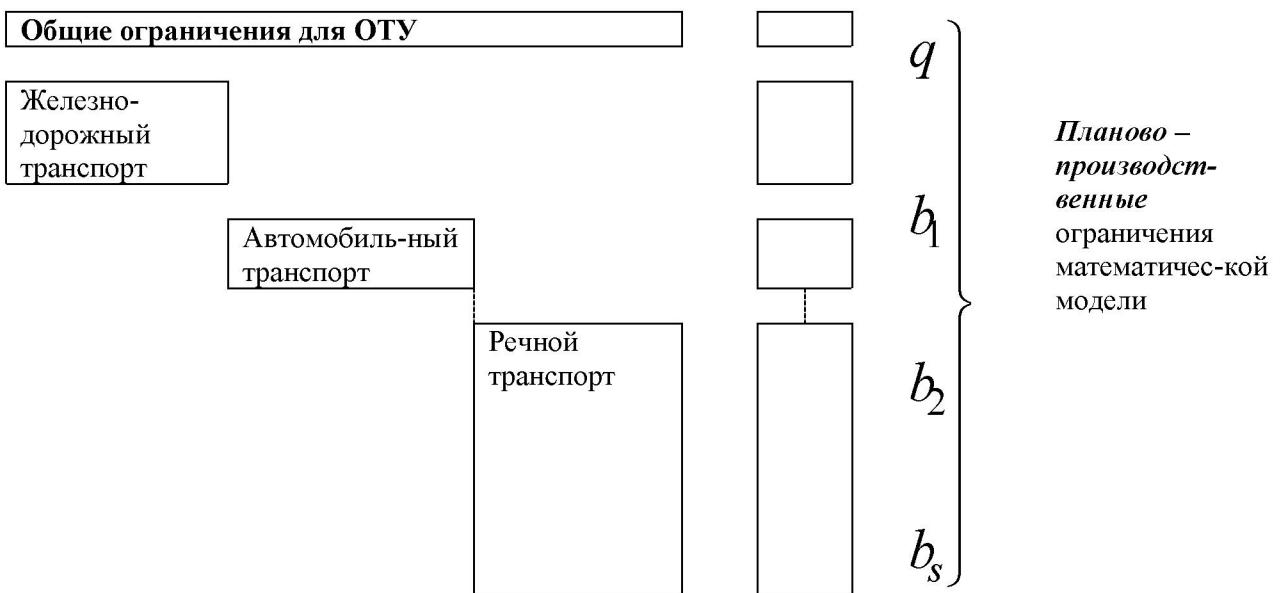


Рисунок 1. Содержание математической модели

В качестве примера содержательной интерпретации параметров и переменных математической модели ОТУ рассматривается конкретный вид векторов g, b_i и содержательный смысл компонентов этих векторов.

Можно считать, что в общетранспортном узле

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_s \\ \sum_{i=1}^{n_i} \end{pmatrix} \quad (3)$$

где g_1 - количество затрат труда в ОТУ; g_2 - количество кранов в ОТУ и т.д.

А в свою очередь:

$\vec{b}_i = \begin{pmatrix} (b_i)_1 \\ \vdots \\ (b_i)_{n_i} \end{pmatrix}$ - означает вектор плановых ограничений, относящихся к i -й технологической операции в ОТУ, который включает:

b_{i_1} - количество специфической техники, участвующей в технологической операции (например, для железной дороги – вагоны, локомотивы и др.);

b_{i_2} - количество трудовых ресурсов, специфичных для i -й технологической операции в узле;

b_{i_3} - производственные емкости складов, относящихся к $k \leq n_i$ технологической операции и т.д.

Под обозначением \vec{x}_1 понимается вектор интенсивности технологических способов i -й технологической операции (которая представляется набором технологических процессов).

Например, запись $\vec{x}_1 = (x_1, \dots, x_s m_i)$ может означать зависимость следующих обозначений: x_{i_1} - время использования первого вида вагонов в технологических операциях; x_{i_2} - время использования второго вида вагонов.

Конкретный вид этих математических записей определяется для каждого случая (объекта) теми видами моделей, которые используются для построения модели ОТУ. Так, простейший вид ее будет:

$$\begin{aligned} B_1 * \vec{x}_1 + B_2 * \vec{x}_2 + \dots + B_s * \vec{x}_s &= g; \\ A_1 * \vec{x}_1 &\leq b_1; \\ A_2 * \vec{x}_2 &\leq b_2; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ A_s * \vec{x}_s &\leq b_s, \end{aligned} \quad (4)$$

т.е. запись $A_1 \vec{x}_1 \leq b_1$ эквивалентна записи

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n_1} \end{pmatrix} + x_{11} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{m_1} 1 \\ a_{m_2} 2 \\ \vdots \\ a_{m_s n_s} \end{pmatrix} x_{1m1} &\leq \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n_1} \end{pmatrix}; \\ \text{где } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m_1 1}; \\ a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m_1 2}; \\ \vdots \\ a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{m_1 n_1} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (5)$$

причем каждый столбец этой матрицы отражает один из технологических способов, которые приняты в технологических процессах работы общетранспортного узла.

Применение модели вида (I) производится в следующем порядке. G_i являются линейными операторами, матрицы которых можно обозначить $A_i, j \in \overline{1S}$. Q является также линейным оператором, который можно представить в виде $Q(x_1, x_2, \dots, x_s) = B_1 x_1 + B_2 x_2 + \dots + B_s x_s$, где $B_i \cdot i \in \overline{1S}$ - матрицы некоторых размерностей.

Тогда математическая модель будет выглядеть:

$$\begin{aligned} (L) \quad B_1 x_1 + B_2 x_2 + \dots + B_s x_s &= g \\ A_1 x_1 &\leq b_1 \\ A_2 x_2 &\leq b_2 \\ \dots &\dots \\ A_s x_s &\leq b_s \end{aligned}$$

Пусть далее $\langle C_i, x_i \rangle$ - линейные функционалы, описывающие критерии эффективности планирования для отдельных технологических операций $i \in \overline{1, S}$, где, $C_i \in R^{m_i}$, так что -

линейный функционал на $\sum_{i=1}^B \langle C_i, x_i \rangle$, описывающий критерий эффективности работы ОТУ,

который требуется минимизировать на множестве допустимых планов работы ОТУ.

В соответствии со схемой декомпозиции локальные задачи отдельных технологических операций и центрального органа управления ОТУ будет выглядеть:

Локальные задачи по видам транспорта:

Железнодорожный автомобильный промышленный

$$A_1 x_1 \leq b_1; \dots \quad A_2 x_2 \leq b_2; \dots \quad A_s x_s \leq b_s;$$

$$B_1 x_1 \leq z_1; \dots \quad B_2 x_2 \leq z_2; \dots \quad B_s x_s \leq z_s;$$

$$\langle C_1 x_1 \rangle \rightarrow \min; \dots \quad \langle C_2 x_2 \rangle \rightarrow \min; \dots \quad \langle C_s x_s \rangle \rightarrow \min;$$

где z_1, \dots, z_s - некоторые векторы.

Задача центрального органа управления ОТУ:

$$z_1 + \dots + z_s \leq g; \quad (6)$$

$$\langle t_1 z_1 \rangle + \dots + \langle t_s z_s \rangle \rightarrow \min$$

где $t_i i \in \overline{1, S}$ - вектор решения задачи, двойственной i -й локальной задаче.

Процесс поиска допустимого плана работы ОТУ представляет собой итеративную процедуру последовательного решения задач, двойственных сформулированным локальным задачам, и последующего решения задачи центрального планирующего органа.

Как известно, при достаточно общих предположениях, которые будем считать выполненными, эта процедура порождает итеративный скользящий процесс (последовательность) решений вида

$$\left\{ \begin{matrix} (k) \\ i \end{matrix} \right\}_{k=1}^{\infty} \forall i \in \overline{1, S} \quad (7)$$

В практических расчетах можно считать решение законченным, если для некоторого числа k известно, что

$$k \max_{i \in \overline{1, S}} |t_i^k - t_i^{(k+m)}| < \varepsilon$$

При перевалке груза участвует, как правило, два вида транспорта. Процесс оптимизации управления начинается с распределения компонентов вектора g между двумя видами транспорта в виде

$$\bar{g} = \bar{z}_1^{(1)} + \bar{z}_2^{(1)};$$

причем компоненты $\bar{z}_1^{(1)}$ соответствуют общим ресурсам ОТУ и выделяется первому виду транспорта, $\bar{z}_2^{(1)}$ - соответствует ресурсам, выделяемым второму виду транспорта.

Эффективность предложенного на первом шаге распределения, как известно, можно оценить по значениям двойственных переменных, соответствующих решениям локальных задач вида:

Задача 1⁽¹⁾ *Задача 2⁽¹⁾*

$$A_1 x_1 \leq b_1; \quad A_2 x_2 \leq b_2;$$

$$B_1 x_1 \geq z_1^{(1)}; \quad B_2 x_2 \leq z_2^{(1)};$$

$$\langle C_1 x_1 \rangle \rightarrow \min; \quad \langle C_2 x_2 \rangle \rightarrow \min;$$

Пусть $t_1^{(1)}$ и $t_2^{(1)}$ - указанные двойственные оценки для задач 1 и 2 соответственно. Зная эти оценки, центральный орган управления работой ОТУ может оценить целесообразность выделения общих для ОТУ ресурсов, определенных векторами $z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$ для каждого из взаимодействующих видов транспорта, решив задачу

$$t_1^{(1)}z_1 + t_2^{(1)}z_2 \rightarrow \min; \quad (8)$$

$$z_1 + z_2 \leq g;$$

В результате будут найдены новые распределения общих для ОТУ ресурсов, которые для каждого из видов транспорта образуют векторы $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$, не совпадающие с векторами $z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$. В соответствии с полученным распределением ресурсов на втором шаге решаются задачи, двойственные локальным задачам вида:

Задача 1⁽²⁾ *Задача 2⁽²⁾*

$$A_1x_1 \leq b_1; \quad A_2x_2 \leq b_2;$$

$$B_1x_1 \geq z_1^{(2)}; \quad B_2x_2 \leq z_2^{(2)};$$

$$\langle C_1x_1 \rangle \rightarrow \min; \quad \langle C_2x_2 \rangle \rightarrow \min;$$

В результате этого определяются векторы двойственных оценок $t_1^{(1)}$ и $t_2^{(2)}$. Эти векторы характеризуют эффективность нового распределения общих ресурсов в ОТУ между видами транспорта. Указанный процесс будет продолжаться до тех пор, пока на некотором шаге с номером k будет установлено, что

$$\max \left(|t_1^{(k)} - t_1^{(km)}|, |t_2^{(k)} - t_2^{(km)}| \right) < \sigma \text{ для } m \leq 1. \quad (9)$$

Необходимо, чтобы на каждой итерации описанного процесса распределялись только общие для ОТУ ресурсы, в то время как для каждого вида транспорта его собственные ресурсы, определяемые компонентами векторов b_1 и b_2 , оставались неизменными. Это соответствует специализации ресурсов по видам транспорта, так что для каждого из них в ОТУ существуют ресурсы, которые не могут быть использованы другими видами транспорта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трихунков М.Ф. Транспортное производство в условиях рынка: Качество и эффективность. М. Транспорт, 1993 г., 255 с.
2. Л. Сквица, Я. Янчек, П. Ценек. Энергетически оптимальное управление транспортными системами. М. Транспорт, 1992 г., 246 с.
3. Magnanti, T.L., Wong, R.T.: Transportation Networks Design: Models and Algorithms. Transport. Sci., 1983.

C.Ш. САРБАЕВ, А.С. БАЙМАХАН

КӨЛКІ ЖҮЙЕСІНДЕ ТАСЫМАЛДАУ ҮРДІСІН ТИМДІ БАСҚАРУ ЕСЕБІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Мақалада жалпыкөліктік тораптың жеке технологиялық операциялар және орталық басқару үйімінің есептері декомпозициялық тұрғыдан қарастырылған.

S.Sh. SARBAEV S., A.S. BAIMAXAN

MATHEMATICAL FORMALIZATION OF CONCERN OPTIMAL HANDLING OF TRANSPORTATION PROCESS IN TRANSPORTATION SYSTEM

Local objectives of separate technological operations and central governing body of the general transport hub based on the decomposition approach are considered in the article.