

Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 517.956

На правах рукописи

АХТАЕВА НАЗГУЛЬ СМАЙЛХАНОВНА

**Вопросы разрешимости задач для смешанного парабола-
гиперболического уравнения**

6D060100 – «Математика»

Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
Доктор физико-математических наук,
профессор Бердышев А. С.
Зарубежный научный консультант:
Доктор естественных наук,
профессор Alberto Cabada
(Университет Сантьяго де Компостела,
Испания)

Республика Казахстан
Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	25
1.1 Сильная разрешимость и вольтерровость краевой задачи с интегральными условиями склеивания для смешанного парабола- гиперболического уравнения.....	25
1.2 Сильная разрешимость и существование собственных значений краевой задачи с интегральными условиями склеивания для смешанного парабола- гиперболического уравнения.....	37
1.3 Разрешимость локальной задачи с интегральными условиями сопряжения на линии изменения типа.....	46
1.4 Аналог задач Трикоми и Геллерстедта для смешанного парабола- гиперболических уравнений дробного порядка.....	51
2 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.....	59
2.1 Сильная разрешимость краевых задач для гиперболического уравнения третьего порядка.....	59
2.2 Сильная разрешимость задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.....	64
2.3 О неединственности решения аналога задачи Дарбу для гиперболического уравнения третьего порядка.....	71
2.4 О разрешимости краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка в области с характеристической границей.....	75
3. ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.....	79
3.1. Вольттерровость аналога задачи Трикоми для смешанного парабола- гиперболического уравнения третьего порядка.....	79
3.2 Сильная разрешимость краевой задачи для смешанного парабола- гиперболического уравнения третьего порядка.....	88
Заключение.....	95
Список использованных источников.....	96

АХТАЕВА НАЗГУЛ СМАЙЛХАНҚЫЗЫ

**АРАЛАС ПАРАБОЛА- ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН
ҚОЙЫЛҒАН ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛУ МӘСЕЛЕЛЕРІ**

6D060100– Математика мамандығы бойынша философия ғылымдарының докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындаған диссертациясына

АННОТАЦИЯ

Тақырыптың өзектілігі. Аралас типті теңдеулер теориясы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің заманауи теориясындағы ең негізгі бөлігі болып табылады. Бұл есептерге қызығушылық алынатын нәтиженің теориялық мәнімен және қарастырылып отырған аймақта тәуелсіз айнымалылардың өзгеруін зерттейтін әртүрлі типтегі теңдеулердің математикалық моделдеуге негізделген қолданбалы есептерді қарастырумен байланысты.

Аралас типті теңдеулердің маңыздылығын алғаш рет С.А. Чаплыгин 1902 жылы «Газдың ағыстары» атты еңбегінде көрсетті. Аралас типті теңдеулерге шекаралық есептердің қойылуы 1920- 1930 жж Ф. Трикоми, С. Геллерстедтің жұмыстарында бастау алған. Бұл теорияның дамуында маңызды мәселелердің теориялық зерттеулерімен бірге практикалық мәні қарастырылған М. А. Лаврентьевтің, А. В. Бицадзенің, Ф.И. Франкльдің, М. Проттердің, С. Моравецтің жұмыстары жаңа түрткі болды.

Қазіргі кезде аралас типті теңдеулер түсінігі кеңейді және ол екі немесе үш классикалық типті теңдеулерді қосып қарастырады. Аралас парабола-гиперболалық типті теңдеулерді қарқынды түрде зерттеу бір жағынан олар теориялық негізде аз зерттелсе, екінші жағынан олар әртүрлі табиғат құбылыстарының математикалық моделінің негізінде жатыр.

Екінші және үшінші ретті аралас парабола- гиперболалық типті теңдеулерге қойылған локальды және локальді болмаған шектік есептерді шешу мәселелері қарқынды түрде зерттелуде. Дегенмен, бұл бағыт бойынша жасалған көптеген жұмыстарға қарамай, екінші және үшінші ретті парабола-гиперболалық теңдеулер үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген шеттік есептердің шешілу мәселелері ашық күйде қалады. Жоғарыда айтылғанның барлығы диссертация тақырыбының өзектілігін көрсетеді.

Жұмыстың мақсаты. Жұмыстың негізі мақсаты жазықтықта екінші және үшінші ретті гиперболалық және парабола- гиперболалық теңдеулер үшін шектік есептердің қойылуы мен регуляр және күшті шешімдердің бар болуы болып табылады.

Зерттеу мәселелері. Зерттеудің негізі мәселелері:

Екінші және үшінші ретті аралас парабола- гиперболалық теңдеулер үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген Трикоми есебіне аналог есептің күшті шешімі мен вольтеррь болуын көрсету.

Үшінші ретті гиперболалық теңдеу үшін жазықтықта шектік есепті қою және зерттеу.

Аралас парабола- гиперболалық теңдеулер үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген шектік есептердің бір классында күшті шешімнің болу шартын анықтау.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста келесі нәтижелер алынды:

– Екінші ретті аралас парабола- гиперболалық теңдеу үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген Трикоми есебіне аналог есептің күшті шешімінің бар болуы мен вольтерр болуы дәлелденді.

– Аралас парабола- гиперболалық теңдеулер үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген шектік меншікті мәнінің бар болуы туралы теорема дәлелденді

– Екінші ретті аралас парабола- гиперболалық теңдеулер үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген шектік есептің шешімінің бар болуының жеткілікті шарты табылды.

– Үшінші ретті гиперболалық теңдеу үшін шектік есептердің; сонымен бірге Дирихле есебінің күшті шешімінің бар болуы дәлелденді.

– Үшінші ретті аралас парабола- гиперболалық теңдеу үшін интегралдық біріктіру шарттарымен берілген Трикоми есебіне аналог есептің күшті шешімінің бар болуы мен вольтерр болуы дәлелденді.

– Үшінші ретті аралас парабола- гиперболалық теңдеу үшін қойылған шектік есептің бір классы үшін бірімәнді шешілуі анықталды.

Зерттеу әдісі. Зерттелген шектік есептер интегралдық- функционалдық теңдеулерге келтіріледі. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, функционалдық теңдеулер теорияларының әдістері қолданылады.

Теориялық және пратикалық құндылығы. Жұмыстың негізгі нәтижесі негізінен теориялық қызығушылық тудырады. Олар механика мен физика көптеген бөлімдерінің математикалық мәселелерін зерттеуде кең көлемді кластағы гиперболалық типтегі дербес туындылы, сонымен бірге аралас және аралас- құрамдас типті теңдеулер үшін шектік есептер теориясында қолданылуы мүмкін.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыс 100 бетті қамтиды, қолданылған әдебиеттер тізімі 72.

АХТАЕВА НАЗГУЛЬ СМАЙЛХАНОВНА

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100–Математика

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Актуальность темы. Теория уравнений смешанного типа является одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес к этим вопросам связан как с теоретической значимостью получаемых результатов, так и с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обуславливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

Впервые на важность изучения уравнений смешанного типа указал С. А. Чаплыгин в 1902 г. в своей работе «О газовых струях». Начало же исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 1920-1930 гг. работами Ф. Трикоми, С. Геллерстедта. Новым толчком в развитии этой теории послужили работы М. А. Лаврентьева, А. В. Бицадзе, Ф.И. Франкля, М. Проттера, С. Моравец где наряду с теоретическими исследованиями ряда существенных вопросов этой теории была указана и их практическая значимость.

В настоящее время понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трех классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного парабола- гиперболического типа обусловлена тем, что с одной стороны, новые типы смешанных уравнений мало исследована в теоретическом плане, с другой стороны они лежат в основе математических моделей различных природных явлений.

Вопросы разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для смешанных парабола- гиперболических уравнении второго и третьего порядков изучается интенсивно. Однако, несмотря на большое количество работ по этому направлению, вопросы разрешимости краевых задач с интегральными условиями сопряжения для уравнений парабола- гиперболических уравнении второго и третьего порядково остаются открытыми. Все вышесказанное позволяет заключить, что тема диссертации актуальной.

Цель работы. Основная цель работы состоит в постановке и исследовании вопросов регулярной и сильной разрешимости краевых задач для гиперболических и парабола- гиперболических уравнений второго и третьего порядков на плоскости.

Задачи исследования. Основными задачами исследования является:

Установление сильной разрешимости и вольтерровости аналога задачи Трикоми с интегральными условиями склеивания для смешанного парабола-гиперболического уравнения второго и третьего порядков.

Постановка и изучение краевых задач на плоскости для гиперболического уравнения третьего порядка.

Определение условия сильной разрешимости для одного класса краевых задач с интегральными условиями склеивания для смешанного парабола-гиперболического уравнения.

Научная новизна. В работе получены следующие результаты

- Доказана сильная разрешимость и вольтерровость аналога обобщенной задачи Трикоми с интегральными условиями склеивания для смешанного парабола-гиперболического уравнения второго порядка.
- Доказана теорема о существовании собственных значений одной краевой задачи со специальными условиями склеивания для смешанного парабола-гиперболического уравнения.
- Найдены достаточные условия разрешимости для одного класса краевых задач с интегральными условиями склеивания для парабола-гиперболического уравнения второго порядка.
- Доказана сильная разрешимость ряда локальных задач, в том числе задача Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.
- Доказана однозначная разрешимость и вольтерровость аналога задачи Трикоми со специальными условиями склеивания для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка.
- Для одного класса краевых задач для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка установлена однозначная (регулярная и сильная) разрешимость.

Методы исследования. Исследуемые краевые задачи эквивалентно редуцируются к интегро-функциональным уравнениям. Используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории функциональных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы прежде всего представляют теоретический интерес. Они могут быть использованы в теории краевых задач для широкого класса уравнений в частных производных гиперболического типа, а также смешанного и смешанно-составного типов, при изучении математических вопросов многих разделов механики и физики.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка использованных источников из 72 наименований. Работа изложена на 100 страницах.

AKHTAEVA NAZGUL SMAILKHANOVNA

SUMMARY

of thesis on scientific degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty
6D060100-Mathematics

**ISSUES OF SOLVABILITY FOR THE MIXED PARABOLIC-
HYPERBOLIC EQUATIONS**

Actuality of the theme. The theory of equations of mixed type is one of the main sections of the modern theory of differential equations with partial derivatives. Interest in this question associated with both the theoretical significance of the results, and the identification of multiple applied problems, mathematical modeling, which leads to the study of various types of equations in the considered region of variation of independent variables.

For the first time in 1902 the importance of studying of mixed-type equations pointed Chaplygin in his paper "On the gas jets". The beginning of the study of boundary value problems for equations of mixed type was initiated in 1920-1930 y. in works Tricomi, S. Gellerstedt. A new impetus to the development of this theory was works of M.A. Lavrentyev, A.V. Bicadze, F.I. Frankl, M. Protter, C. Morawetz where along with theoretical research a number of substantial questions of this theory has been specified their practical significance also.

At present the concept of mixed-type equations significantly expanded and includes all the possible combinations of two or three classic types of equations. Intensive study of mixed parabolic-hyperbolic type equations due to the fact that, on the one hand, new types of mixed equations studied a little in theory, on the other hand, they are the basis of mathematical models of various natural phenomena.

Solvability questions of local and nonlocal boundary value problems for mixed parabolic-hyperbolic equations of second and third orders are studied intensively. However, despite the large amount of work in this area, the solvability of boundary value problems with integral transmission conditions for parabolic-hyperbolic equations of the second and third orders are still open. All of the above permits us to conclude that the subject of the thesis is relevant.

Purpose of work. The main purpose of this paper is a study and statement of regular and strong solvability issues of boundary value problems for hyperbolic and parabolic-hyperbolic equations of the second and third orders on the surface.

Objectives of the study. The main objectives of the study are:

- establishment of the strong solvability and Volterra property of analogue of the Tricomi problem with gluing integral conditions for mixed parabolic-hyperbolic equations of the second and third orders
- a study and statement of boundary value problems on a surface for a hyperbolic equation of the third order
- determination of the conditions of strong solvability for a class of boundary value problems with gluing integral conditions for mixed parabolic-hyperbolic equations.

Scientific innovation. The following results have been obtained:

- Proved strong solvability and Volterra property of an analogue of generalized Tricomi problem with gluing integral conditions for mixed parabolic-hyperbolic equation of the second order.

– Proved the theorem on the existence of eigen values of a boundary value problem with a special gluing conditions for the mixed parabolic-hyperbolic equations.

– Found the sufficient conditions of the solvability for a class of boundary value problems with gluing integral conditions for parabolic-hyperbolic equation of second order.

– Proved a strong solvability of a number of local problems, including the Dirichlet problem for a hyperbolic equation of the third order.

– Proved the unique solvability and Volterra property of an analog of the Tricomi problem with special gluing conditions for the mixed parabolic-hyperbolic equation of the third order.

– Established the unique (regular and strong) solvability for a class of boundary value problems for mixed parabolic-hyperbolic equation of the third order.

Methods of research. Investigated boundary value problems are equivalent reduced to integral-functional equations. The methods of the theory of differential equations, the theory of functional equations are used.

The theoretical and practical importance. The results of the study primarily represent theoretical interest. They can be used in the theory of boundary value problems for a wide class of partial differential equations of hyperbolic type, as well as mixed and mixed-composite type, in the study of mathematical problems of many branches of mechanics and physics.

Structure and volume of thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and list of used references of 72 items. The work is set out on 100 pages.