

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 512.81

На правах рукописи

БЕЙСЕНБАЕВА КУЛАЙША ШЕРТАЕВНА

Подалгебры и автоморфизмы свободных алгебр Лейбница

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание ученой степени

доктора философии (Ph.D)

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Умирбаев У.У.
Научный консультант
Ph.D, профессор Макара-Лиманов Л.

Казахстан

Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	13
1.1 Некоторые конструкции алгебры Лейбница	13
1.2 Базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры	15
1.3 Свободное произведение в группах и в алгебрах Ли	20
2 ПОДАЛГЕБРЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА	20
2.1 Некоторые свободные подалгебры свободных алгебр Лейбница	20
2.2 Свободное произведение алгебр Лейбница	24
3 РУЧНЫЕ И ПОЧТИ РУЧНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА РАНГА 2	31
3.1 Ручные автоморфизмы	31
3.2 Почти элементарные автоморфизмы	38
3.3 Почти ручные автоморфизмы	41
3.4 Пример не почти ручного автоморфизма	47
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	51
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	52

Бейсенбаева Кулайша Шертаевна

**Еркін Лейбниц алгебраларының ішкі алгебралары мен
автоморфизмдері**

6D060100-«Математика» мамандығы бойынша PhD докторы ғылыми
дәрежесін алу үшін ұсынылған диссертацияға

ТҰЖЫРЫМДАМА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Лейбниц алгебралары 1965 жылы D-алгебралары деген атпен А. Блохтың жұмысында алғаш рет кездесті. Кейінірек бұл алгебралар Ж-Л. Лодей мен Д. Куилленнің жұмысында циклдік гомологиялар мен матрицалар алгебраларының Хохшильд гомологияларының қасиеттерін зерттеу барысында пайда болды. Қазіргі уақытта Лейбниц алгебралары Франция, Германия, Ресей, Италия, Канада, Қазақстан, АҚШ сияқты көптеген елдердің математиктерімен белсенді түрде зерттелуде.

Лейбниц алгебраларының класы Ли алгебраларының жақын жалпыламасы болғандықтан, бірінші кезекте Ли алгебралары үшін алынған айқын нәтижелердің ұқсастығын зерттеу ұсынылады. Еркін алгебралардың ішкі алгебраларының құрылымын зерттеу, ақырлы ранкті еркін алгебралардың автоморфизмдер топтарын сипаттау, ақырлы туындаушы алгебралардың кіріс мәселелерін, еркін көбейтінділерді зерттеу ерекше қызығушылық тудырады.

А.И. Ширшов пен Е.Виттің еркін алгебраларының еркіндігі туралы теоремасы классикалық болады. Бұл теорема Лейбниц алгебралары үшін орындалмағанымен, еркін Лейбниц алгебраларының ішкі алгебраларының финит бөлінушілігін А.А. Михалев пен У.Ү. Өмірбаев дәлелдеді. Екі Ли алгебрасының көбейтіндісінің сызықты базисін де А.И. Ширшов сипаттады.

Атақты ағылшын математигі П. Кон ақырлы ранкті еркін Ли алгебраларының барлық автоморфизмі еркін болатынын дәлелдеді. А.Т. Абдықалықов, А.А. Михалев, У.Ү. Өмірбаев екі айнымалылы еркін Лейбниц

алгебрасының жабайы автоморфизмінің мысалын тұрғызды. Қазіргі уақытта еркін алгебралардың автоморфизмдер топтарын зерттеу барысында ван дер Калк, П. Кон, Л. Макар-Лиманов, А. Михалев, А. Чернякевич, Юнг, И.П. Шестаков, У.Ү. Өмірбаев сияқты ғалымдар бірқатар нәтижелер алды.

Жоғарыды келтірілгендерді ескерсек, еркін Лейбниц алгебраларының ішкі алгебраларының құрылымы және автоморфизмдер топтарының туындаушылары туралы сұрақ өзекті болады.

Зерттеу нысаны – Лейбниц алгебралары.

Зерттеу пәні – Еркін Лейбниц алгебраларының ішкі алгебралары мен автоморфизмдері.

Зерттеу тақырыбының мақсаты. Диссертациялық жұмыс екі айнымалылы еркін Лейбниц алгебраларының автоморфизмдері мен еркін Лейбниц алгебраларының ішкі алгебраларының құрылымын зерттеуге арналған.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста топтар теориясының әдістері мен нәтижелері, Ли алгебралар теориясының құрылымдық және комбинаторлық әдістері мен нәтижелері қолданылды.

Жұмыстың негізгі нәтижелері:

- еркін Лейбниц алгебраларының еркін тудырушылар жиынының ішкі жиынынан туындаған кез-келген оң идеалдары еркін Лейбниц алгебралары болатыны дәлелденді;

- еркін Лейбниц алгебраларының еркін көбейтіндісінің сызықты базисі тұрғызылды;

- бір өлшемді Лейбниц алгебраларының еркін көбейтіндісі үшін және жеткілікті үлкен рангті еркін метабелдік Ли алгебралары үшін кіріс мәселесінің шешілімді емес екендігі дәлелденді;

- екі айнымалылы еркін Лейбниц алгебраларының қолдық автоморфизмдер тобының еркін көбейтінді түрінде бейнеленуі алынды;

- еркін Лейбниц алгебраларының элементар дерлік автоморфизмдерінің құрылымы сипатталды;

- еркін Лейбниц алгебраларының қолдық дерлік автоморфизмдері 2-тұрғылықты қолдық болатыны дәлелденді;

- екі айнымалылы еркін Лейбниц алгебраларының қолдық дерлік автоморфизмдер тобының еркін көбейтінді түрінде бейнеленуі алынды;

- екі айнымалылы еркін Лейбниц алгебраларының қолдық дерлік емес автоморфизмінің мысалы тұрғызылды.

Теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыстың теориялық маңызы бар. Диссертацияның нәтижелері мен әдістерін Лейбниц алгебралары мен еркін Лейбниц алгебраларын бұдан әрі зерттеуге, сонымен қатар еркін алгебралардың ішкі алгебралары мен автоморфизмдерін қолдануға болады.

Зерттеу тақырыбы бойынша жарияланымдар. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері 9 жұмыста жарияланған. Оның ішінде 1 мақала Thomson Reuters компаниясының ғылыми журналдар қорына енген, импакт-факторы бар шетелдік журналда, 3 мақала ҚР БҒМ-ң білім және ғылым жүйесін бақылау Комитеті ұсынған баспада және 5 жұмыс халықаралық конференциялардың материалдарында жарияланған.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспе мен 3 бөлімнен тұрады. Диссертацияның көлемі 59 беттен тұрады. Жұмыстың соңында, жалпы саны 47 қолданылған әдебиеттер тізімі келтірілген.

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100-Математика

Бейсенбаева Кулайша Шертаевна

Подалгебры и автоморфизмы свободных алгебр Лейбница

Актуальность темы. Алгебры Лейбница впервые появились в 1965 году в работе А. Блоха под названием D-алгебр. Позже эти алгебры возникли в работе Ж.-Л. Лодея и Д. Куиллена при изучении свойств циклических гомологий и гомологий Хохшильда алгебр матриц. В настоящее время алгебры Лейбница активно исследуются многими математиками Франции, Германии, России, Италии, Канады, Казахстана, США и т.д.

Класс алгебр Лейбница является близким обобщением алгебр Ли. Поэтому в первую очередь представляется интересным изучить аналоги известных результатов для алгебр Ли. Особый интерес представляет исследование структуры подалгебр свободных алгебр, описание группы автоморфизмов свободных алгебр конечного ранга, проблема вхождения в конечно порожденные подалгебры, свободное произведение, и т.д.

Классической является теорема А.И. Ширшова и Е. Витта о свободности подалгебр свободных алгебр Ли. Аналог этого результата неверна для алгебр Лейбница. Тем не менее, А.А. Михалев и У.У. Умирбаев доказали финитную отделимость подалгебр свободных алгебр Лейбница. Линейный базис свободного произведения двух алгебр Ли также описано А.И. Ширшовым.

Известный английский математик П. Кон доказал, что все автоморфизмы свободной алгебры Ли конечного ранга являются ручными. А.Т. Абдыхалыков, А.А. Михалев, У.У. Умирбаев построили пример дикого автоморфизма свободной алгебры Лейбница от двух порождающих. В настоящее время получен целый ряд первокласных результатов по

исследованию группы автоморфизмов свободных алгебр, такими авторами как ван дер Калк, П. Кон, Л. Макар-Лиманов, А. Михалев, А. Чернякевич, Юнг, И.П. Шестаков, У.У. Умирбаев и т.д.

Ввиду вышесказанного становится актуальным вопрос о строении подалгебр свободных алгебр Лейбница и о порождающих группы автоморфизмов свободных алгебр Лейбница.

Объект исследования – алгебры Лейбница.

Предмет исследования – подалгебры и автоморфизмы свободных алгебр Лейбница.

Цель диссертационного исследования. Данная работа посвящена исследованию автоморфизмов и дифференцирований дупорожденных свободных алгебр Лейбница, исследованию структуры подалгебр свободных алгебр Лейбница.

Методы исследования. В работе используются методы и результаты неассоциативных алгебр, структурной и комбинаторной теории алгебр Ли.

Основные результаты. Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

- доказано, что правые идеалы свободных алгебр Лейбница, порожденные любым подмножеством множества свободных порождающих этой алгебры, являются свободными алгебрами Лейбница;

- построен базис свободного произведения двух алгебр Лейбница;

- доказана неразрешимость проблемы вхождения для свободного произведения произвольной ненулевой алгебры Лейбница и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга;

- получено представление группы ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница от двух порождающих в виде свободного произведения;

- описана структура почти элементарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница;

- доказано, что почти ручные автоморфизмы свободной алгебры Лейбница являются 2-стабильно ручными;

-получено представление группы почти ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница от двух порождающих в виде свободного произведения;

-построен пример не почти ручного автоморфизма свободной алгебры Лейбница от двух порождающих.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Результаты и методы диссертации могут быть использованы для дальнейшего исследования алгебр Лейбница и свободных алгебр, а также при исследовании автоморфизмов свободных алгебр. Кроме того, результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории колец.

Публикации по теме исследования. Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 1 статья в зарубежном журнале, имеющий импакт-фактор по данным базы научных журналов компании Thomson Reuters, 3 статьи – из списка, рекомендованного Комитетам по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 5 работы в материалах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и трех разделов. Общий объем диссертации составляет 59 страниц. Список литературы, приведенный в конце работы, содержит 47 наименований.

Beisenbaeva Kulaisha Shertaevna

**SUBALGEBRAS AND AUTOMORPHISMS OF FREE LEIBNIZ
ALGEBRAS**

The abstract of dissertation is presented for the scientific degree of the PhD of mathematical sciences, 6D060100-« Mathematics»

Actuality of the problem. The Leibniz algebras was introduced for the first time in 1965 in A. Blokh's work under the name of D-algebras. Later these algebras have arisen in work J.-L. Loday and D. Quillen at studying of properties of cyclic and Hochschild homologies of matrixes algebras. Presently Leibniz algebras is actively investigated by many mathematicians of France, Germany, Russia, Italy, Canada, Kazakhstan, and the USA etc.

Leibniz algebra class is a close generalization of Lie. So first of all it is interesting to study the analogues of known results for the Lie. The particular interest is the study of the structure of subalgebras of free algebras, the description of groups of automorphisms of free algebras of finite rank, the membership problem for finite generated subalgebras, and free production, etc.

The theorem's of A.I. Shirshov and E.Witt about the free of subalgebras of free Lie algebras is classic. The analogy of this result is incorrect for Leibniz's algebras. Nevertheless, A.A.Mikhalev and U.U.Umirbaev proved finite separability of subalgebras of Leibniz free algebras. The linear basis of free production of two Lie algebras is also described by A.I.Shirshov.

The English mathematician P.Kohn proved that all automorphisms of Lee free algebra of final rank are tame. A.T.Abdykhalykov, A.A.Mikhalev, U.U.Umirbayev constructed an example of wild automorphism of Leibniz's free algebra from two generating. Now a number of the first-class results of research

of group of automorphisms of free algebras is received by van der Kalk, P.Kohn, L.Makar –Limanov, A.Mikhalev, A.Chernyakevich, H.Jung, I.P. Shestakov, U.U.Umirbaev, etc..

So the question about structure of subalgebras of Leibniz's free algebras and about generating groups of automorphisms of Leibniz's free algebras is current.

The object of research. The Leibniz algebras.

Subjects of research. Subalgebras and automorphisms of free Leibniz algebras.

The aim of the research. This dissertation work is devoted to the investigation of automorphisms of free Leibniz algebras and investigation of the structure of subalgebras of free Leibniz algebras.

Methods of the research. We use the methods and results of group theory and structural and combinatorial theory of Lie algebras.

The main results of the work are:

- it is proved that the right ideals of a free Leibniz algebras generated by a subset of a set of free generators are free subalgebras;
- a linear basis of the free product of two Leibniz algebras is constructed;
- it is proved that the subalgebra membership problem for free products of some nonzero Leibniz algebras and free metabelian Lie algebra of a sufficiently large rank is undecidable;
- a representation of the group of tame automorphisms of two-generated free Leibniz algebras in the form of free product is obtained;

- the structure of almost elementary automorphisms of free Leibniz algebras is described;
- it is proved that almost tame automorphisms of free Leibniz algebras are 2-stably tame;
- a representation of the group of almost tame automorphisms of two-generated free Leibniz algebras in the form of free product is obtained;
- an example of an automorphism of two generated free Leibniz algebras which is not almost tame is constructed.

Theoretical and practical importance. Work has the oretical value. The results and methods of the work can be used for further research of Leibniz's algebras and free algebras, and also to research the automorphisms of free algebras. Therefore, the results can be used when reading special courses according to the theory of rings.

Publications on a research subject. Results of the dissertation are published in 9 works. including 1 article in a foreign magazine, which has a impact factor according to the database of scientific journals of Thomson Reuters; 3 articles – from the list recommended to Committees on control in education and science of Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan, the 5-th work in materials of the international conferences.

Structure and volume of the dissertation. The work consists of an introduction, three chapters, conclusions and a list of sources used. The total volume of the dissertation is 59 pages.