

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 517.983

На правах рукописи

**ТАСПАГАНБЕТОВА ЖАНАР АБДУЛОВНА**

**Ограниченность и компактность матричных операторов  
в весовых пространствах последовательностей  
и их приложения**

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора философии (PhD)

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор Ойнаров Р.

Зарубежный консультант  
профессор Массимо Ланца  
де Кристофорис (Италия)

Казахстан  
Астана, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>4</b>
<b>1 ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ</b>	<b>14</b>
1.1 Дискретные неравенства типа Харди в весовых пространствах последовательностей . . . . .	14
1.2 Весовые неравенства типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей . . . . .	24
<b>2 ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ</b>	<b>31</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	31
2.2 Определение классов матриц и их свойства . . . . .	34
2.3 Примеры матриц из классов $\alpha O_n^\pm$ и $O_n^\pm \beta$ . . . . .	46
2.4 Необходимые и достаточные условия ограниченности матричных операторов в весовых пространствах последовательностей, случай $1 < p \leq q < \infty$ . . . . .	51
2.5 Критерий компактности матричных операторов в весовых Лебеговых пространствах . . . . .	61
2.6 Ограниченность и компактность класса матричных операторов, случай $1 < p \leq q < \infty$ . Доказательство основных результатов . . . . .	64
2.7 Критерий ограниченности класса матричных операторов, случай $q < p$ . . . . .	65
<b>3 ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ</b>	<b>76</b>
3.1 Весовые оценки для класса матричных операторов на конусе монотонных последовательностей при $1 < p \leq q < \infty$ . . . . .	76
3.2 Двусторонняя оценка для матричных операторов на конусе монотонных последовательностей при $q < p$ . . . . .	85
<b>4 ПРИЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ</b>	<b>96</b>

4.1 Ограниченность и компактность суперпозиций матричных операторов . . . . .	96
4.2 Трехвесовое неравенство типа Харди . . . . .	118
4.3 Приложения основных результатов к суммируемым матрицам . .	121
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>125</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	<b>126</b>

Таспаганбетова Жанар Абдуловна

**САЛМАҚТЫ ТІЗБЕКТЕР КЕҢІСТІГІНДЕ МАТРИЦАЛЫҚ  
ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ ШЕНЕЛГЕНДІГІ МЕН КОМПАКТЫЛЫҒЫ  
ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ**

**6D060100-«Математика» мамандығы бойынша PhD доктор ғылыми  
дәрежесін алу үшін ұсынылған диссертацияның түйіні**

**Тақырыптың маңыздылығы.** Матрицалар теориясының бір белді есебі болып матрицалық операторлардың бір нормалы кеңістіктен басқа нормалы кеңістікке үзіліссіз әсер ету үшін матрицалар элементтеріне қажетті және жеткілікті шарттарын анықтау болып табылады, Сонымен қатар матрицалық операторлардың нормасын немесе оның дәл жоғарғы мен төменгі бағаоауын табу маңызды. Бірақ кейбір теориялық және қолданбалы маңызы бар кеңістіктерде бұл сұрақ әлі шешілмеген. Сондықтан ғалымдар осындай кеңістіктерде қандай да бір матрицалық операторлар класын қарастырып, осы класта жататын оператордың шенелгендік және компакттылық шарттарын орнатады.

М. Stieglitz, Н. Tietz жұмысында матрицалық операторлардың 11 тізбектер кеңістігінде әсер етуінің нәтижелері, операторлардың нормаларының мәнімен бірге берілген. Сонымен қатар, бұл жұмыста  $p > 1$ ,  $q > 1$  үшін матрицалық операторлардың  $l_p$  кеңістігінен  $l_q$  кеңістігіне әсері және олардың нормасы жалпы жағдайда әлі белгісіз екендігі атап айтылған. Дара мағынасы зор бұл матрицалық операторлар функционалды талдауда маңызды роль атқаратын интегралдық операторлардың дискретті аналогы болып табылады.

Матрицалық операторлар теориясы теория жүзінде ғана емес, сонымен қатар әр түрлі қолданбалы есептерде де маңызды роль атқарады. Диссертациялық жұмыс осы айтылған өзекті мәселеге арналған.

**Зерттеу объектілері.** Дискретті Харди типтегі теңсіздіктер, салмақты тізбектер кеңістігі, матрицалық операторлар, шенелгендік, компакттылық, монотонды тізбектер, қосындыланатын матрицалар, операторлар суперпозициясы, аддитивті теңсіздіктер.

**Жұмыстың мақсаты.** Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты – салмақты тізбектер кеңістігінде матрицалық операторлардың шенелгендігінің, компакттылығының критерийлерін табу және олардың нормаларының бағалауын табу.

**Ғылыми жаңалығы:** Диссертациялық жұмыста матрица элементтері осыған дейін қарастырған шарттарға қарағанда әлсіз шартты қанағаттандыратын үшбұрышты ақырсыз өлшемді матрицалық оператор қарастырылады. Кең матрицалық операторлар класы анықталып, олардың қасиеттері зерттелген. Сонымен қатар, осы класқа жататын матрицаларға мысалдар келтірілген. Белгілі матрицалық оператордың, соның ішінде көпеселі қосындылау операторы, Чезаро, Гельдер операторлары осы

анықталған класта жататындығы дәлелденген. Осы операторлар класы үшін келесі нәтижелер алынған:

- әр түрлі метрика үшін тізбектердің салмақты Лебег кеңістігінде матрицалық оператордың матрицалар элементтері мен салмақты тізбектер терминінде шенелгендігі мен компактылығының қажетті және жеткілікті шарттары;

- әр түрлі метрика үшін теріс емес өспейтін тізбектер конусында салмақты Харди типтес теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары;

- салмақты тізбектер кеңістігінде матрицалық операторлардың суперпозициясының шенелгендігі мен компактылығының қажетті және жеткілікті шарттары;

- салмақты тізбектер кеңістігінде үшсалмақты Харди типтес теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары;

- салмақты тізбектер кеңістігінде және монотонды тізбектер конусында қосындыланатын матрицалар үшін екіжақты бағалау.

**Зерттеудің жалпы әдістемесі.** Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелерін алу барысында әр нүктеде матрицалық операторлардың мәнін бөліктерге бөлу әдісі қолданылады. Сонымен қатар түрлі классикалық және салмақты Харди теңсіздіктері пайдаланылады.

**Теориялық және практикалық маңыздылығы.** Жұмыстың негізі теориялық сипаттамадан тұрады. Алынған нәтижелер функциялар теориясында, Соболев типтес дискретті салмақты кеңістіктердің енгізу теориясында және айырымды операторлар теориясында қолдануға болады.

**Жарияланымдар.** Диссертациялық жұмыстың нәтижелері 20 жұмыста жарияланған. Оның ішінде 2 мақала жоғары рейтингілі журналда, 3 мақала ҚР БҒМ-нің білім және ғылым жүйесін бақылау Комитеті ұсынған баспада, 3 мақала шет елдік баспаларда жарияланған.

**Диссертация құрылымы және көлемі.** 136 беттен тұратын диссертациялық жұмыс кіріспе, төрт бөлім және саны 119 әдебиеттер тізімін қамтиды.

Таспаганбетова Жанар Абдуловна

## ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

аннотация диссертации представленной на соискание ученой степени доктора PhD по специальности 6D060100 - “Математика”

**Актуальность исследования.** Одной из основных задач в теории матриц является нахождение необходимых и достаточных условий на элементы матрицы, при которых матричный оператор действует непрерывно из одного нормированного пространства в другое, при этом очень важно найти значение нормы матричного оператора, в крайнем случае, найти верхние и нижние оценки. Однако в некоторых пространствах, имеющее важное теоретическое и практическое значения, вышеуказанные проблемы являются открытыми. Поэтому исследователи выделяют некоторый класс матричных операторов, и для операторов из этого класса исследуют вопросы ограниченности и компактности.

В работе М. Stieglitz, Н. Tietz приведена сводка результатов действия матричных операторов в  $l_1$  пространствах последовательностей со значениями норм, однако указано, что нахождение критерия действия матричного оператора из  $l_p$  в  $l_q$ ,  $p > 1$ ,  $q > 1$  и значение его нормы в общем случае остается открытым. Эти операторы, имея самостоятельное значение, являются дискретными аналогами интегральных операторов, играющее очень большую роль в функциональном анализе.

Теория матричных операторов не только имеет важное значение, но и различные разносторонние применения. Этой актуальной задаче посвящена предлагаемая диссертационная работа.

**Объект исследования:** дискретные неравенства типа Харди, весовые пространства последовательностей, матричные операторы, ограниченность, компактность, монотонные последовательности, суммируемые матрицы, суперпозиция операторов, аддитивные неравенства.

**Цель работы.** Основной целью диссертационной работы является получение критериев ограниченности, компактности и оценок норм матричных операторов в пространствах последовательностей.

**Научная новизна.** В диссертационной работе рассматривается треугольный бесконечномерный матричный оператор, где элементы матрицы удовлетворяют более слабому условию, чем были рассмотрены ранее. Вводятся расширяющие классы матричных операторов, изучаются их свойства, приводятся примеры. Доказывается, что эти классы операторов включают в себя широко известные классические операторы анализа, такие как оператор многократного суммирования, операторы Чезаро, Гельдера и другие. Для этих классов матричных операторов получены следующие новые результаты:

- в терминах элементов матрицы и весовых последовательностей необходимые и достаточные условия ограниченности, компактности матричных операторов в весовых Лебеговых пространствах последовательностей при различных соотношениях метрики;

- необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Харди на конусе невозрастающих неотрицательных последовательностей при различных соотношениях метрики;

- критерий ограниченности и компактности суперпозиций матричных операторов в весовых пространствах последовательностей;

- необходимые и достаточные условия выполнения трехвесового неравенства типа Харди в весовых пространствах последовательностей;

- двусторонняя оценка для суммируемых матриц в весовых пространствах последовательностей и на конусе монотонных последовательностей.

**Общая методика исследования.** Используется метод разбиения на “пачки” последовательности значений матричного оператора в каждой точке, позволяющий удобно оценить суммы по пачкам, благодаря которому достигаются основные результаты данной диссертационной работы. В ходе оценки используются различные классические неравенства, а также весовые неравенства Харди.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в теории функций, в теории вложения дискретных весовых пространств типа Соболева и в теории разностных операторов.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 20 работах, из них 2 статьи в журналах с импакт фактором, 3 статьи в изданиях,

рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 3 статьи в зарубежных изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения и четырех разделов, заключения и списка использованных источников, включающего 119 наименований. Диссертация состоит из 136 страниц.



Taspaganbetova Zhanar Abdulovna

BOUNDEDNESS AND COMPACTNESS OF MATRIX  
OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF SEQUENCES  
AND THEIR APPLICATIONS

The abstract of dissertation presented for the scientific degree of the  
PhD at specialty of 6D060100- “Mathematics”

**Importance of research.** One of the main problems in the theory of matrices is to find necessary and sufficient conditions for the elements of a matrix so that the corresponding matrix operator maps continuously one normed space of sequences into another normed space of sequences. Thus it is very important to find the norm of a matrix operator, or at least, an upper or lower bound for the norm. However, in several spaces, which are very important both theoretically and in the applications, such problems have not been solved yet in full generality for operators corresponding to arbitrary matrices. Therefore, in such spaces researchers have considered some specific classes of matrix operators and have established criteria of boundedness and compactness for operators of such classes.

For a summary of results on matrix operators acting in 11 spaces of sequences and on their norms, we refer to the paper of M. Stieglitz, H. Tietz. However, as pointed out in their paper general criteria for the action of a matrix operator from  $l_p$  to  $l_q$  with  $p > 1$ ,  $q > 1$  and for the corresponding norms are not known yet. Such operators have their own self interest and they are also a discrete analogue of integral operators, which play a very important role in functional analysis.

Not only the theory of matrix operators has an important significance, but also different and versatile applications. The present Thesis is dedicated to such important problems.

**Object of the investigation.** Discrete Hardy type inequalities, weighted spaces of sequences, matrix operators, boundedness, compactness, monotone sequences, summable matrices, composition of operators, additive inequalities.

**The aim of the PhD thesis.** The purposes of this PhD thesis are to obtain criteria of boundedness and compactness of matrix operators and to estimate their norms in weighted spaces of sequences.

**Scientific novelty.** In this PhD thesis a triangular infinite dimensional matrix operator is considered, where the elements of this matrix satisfy an even weaker condition, than studied before. We introduce a general class of matrices, and introduce their properties, and give examples. We show that such classes of matrices include well-known classical operators such as the operator of multiple summation, Hölder's operator, Cesàro operator and others. For these classes of matrix operators the following new results are obtained:

- Necessary and sufficient conditions of the boundedness and compactness in terms of the elements of a matrices and weighted sequences of the matrix operators in weighted Lebesgue spaces of sequences in different metrics;
- Necessary and sufficient conditions for the validity of Hardy type inequalities on the cone of non-negative and non-increasing sequences in different metrics;
- Criteria on boundedness and compactness of composition of matrix operators in weighted spaces of sequences;
- we obtain necessary and sufficient conditions for the validity of three-weighted Hardy type inequality in weighted spaces of sequences;
- two-sided estimates for summable matrices in weighted spaces of sequences and on the cone of non-negative and non-increasing sequences.

**The general technique of research.** The blocking technique method has been used to obtain the main results of the present PhD thesis, which allows to estimate sums on blocks. Various classical inequalities and weighted Hardy inequality have been used in the present PhD thesis.

**The theoretical and practical importance.** The results of this PhD thesis have theoretical character but several applications can be found both in other areas of mathematics and in applied sciences e.g. in the theory of functions, in the theory of embeddings of discrete weighted spaces such as Sobolev type spaces and in the theory of difference operators.

**Publications.** The main results of the present PhD thesis are published in 20 publications. Two of them are published in the journals with impact factor. Three of them are published in the publications, which are recommended by the Committee of the educational and scientifically system's control of MES RK. Three of them are published in the foreign publication.

**Structure and volume of the dissertation.** The present PhD thesis is consists of an introduction, four sections, a final summary and a bibliography including 119 items. The total volume of the PhD thesis is 136 pages.