

А.А. Беков

**ДИНАМИКА
ДВОЙНЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ГРАВИТИРУЮЩИХ
СИСТЕМ**

А. А. БЕКОВ

ДИНАМИКА ДВОЙНЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ



Алматы
«ҒЫЛЫМ»
2013

УДК 521.1
ББК 22.62
Б 42

Р е ц е н з е н т

доктор физико-математических наук, профессор *Е. А. ГРЕБЕНИКОВ*

Беков А. А.

Б 42 Динамика двойных нестационарных гравитирующих систем. – Алматы: «Ғылым», 2013. – 170 с.

ISBN 9965-593-46-9

Монография посвящена исследованию динамики двойных нестационарных гравитирующих систем на основе методов анализа задачи Гильдена-Мещерского, ее модификаций, и круга вопросов, связанных с качественными свойствами решений, устойчивостью движения, кольцевой структурой звездных и галактических систем, расширенной проблемой Вайды по определению гравитационного поля звезды с истечением или аккрецией материи с учетом космологического фона де Ситтера.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании других более сложных нестационарных схем задач двух и многих тел небесной механики и имеют важное значение в изучении динамической эволюции нестационарных гравитирующих систем.

Для специалистов в области небесной механики, а также для научных работников, докторантов, магистрантов и студентов старших курсов университетов.

Библиогр. 173 назв. Ил. 24. Табл. 5.

УДК 521.1
ББК 22.62

ISBN 9965-593-46-9

© Беков А. А., 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>ВВЕДЕНИЕ</i>	5
<i>Глава 1. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ И ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО</i>	13
1.1. Введение.....	13
1.2. Автономизация уравнения Бине.....	16
1.3. Законы изменения массы $\mu(\theta)$	19
1.4. Частные решения уравнения Бине.....	22
1.5. Траектории движения и связь между переменной τ и временем t	23
1.6. Орбиты с постоянным эксцентриситетом и переменным параметром.....	27
<i>Глава 2. МЕТОД h-ПАРАМЕТРИЗАЦИИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО</i>	34
2.1. Введение.....	34
2.2. Уравнения движения и основное уравнение.....	36
2.3. Возможности строгих решений.....	37
2.4. Метод решения основного уравнения.....	40
2.5. Прямой метод решения основного уравнения.....	42
2.6. Обратный метод решения основного уравнения.....	44
2.7. Случай степенного закона для $\mu(t)$	46
2.8. Периодический закон изменения массы.....	50
<i>Глава 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО</i>	60
3.1. Введение.....	60
3.2. Уравнения движения и параметризация задачи.....	61
3.3. Линеаризация уравнений движения.....	63
3.4. Случай линейного однородного уравнения.....	64
3.5. Случай $n = 0$. Уравнение Бесселя.....	64
3.6. Случай $n = 1$. Уравнение Эйлера.....	66
3.7. Случай $n = 2$. Уравнение типа уравнения Бесселя.....	68
3.8. Общий случай однородного уравнения.....	70
3.9. Случай линейного неоднородного уравнения.....	72
3.10. Общий случай неоднородного уравнения.....	73
<i>Глава 4. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО</i>	76
<i>Глава 5. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ С ИЗЛУЧЕНИЕМ</i>	80

<i>Глава 6.</i>	ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ И СИСТЕМЫ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ	84
	6.1. Введение.....	84
	6.2. Метод автономизации.....	84
	6.3. Метод полуавтономизации.....	85
	6.4. Промежуточное движение.....	86
	6.5. Частные случаи III формы промежуточного движения.....	88
	6.6. Условия касания.....	89
	6.7. Интегралы движения.....	89
	6.8. Составляющие скорости промежуточного движения.....	90
	6.9. Интегрирование методом Гамильтона-Якоби.....	91
	6.10. Уравнения возмущенного движения.....	97
	6.11. Уравнения Ньютона для оскулирующих элементов.....	99
	6.12. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов.....	100
<i>Глава 7.</i>	СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ	104
<i>Глава 8.</i>	УСТОЙЧИВОСТЬ СПИРАЛЬНЫХ И КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ	115
	8.1. Вводные замечания.....	115
	8.2. Устойчивость одного класса спиральных орбит в нестационарной звездной системе с осевой симметрией.....	116
	8.3. Существование устойчивых спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле.....	120
	8.4. Об устойчивости спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле.....	126
	8.5. Об устойчивости нестационарных круговых орбит в сопротивляющейся среде.....	132
	8.6. Об устойчивости кольцевой структуры галактик.....	138
<i>Глава 9.</i>	РАСШИРЕННАЯ ПРОБЛЕМА ВАЙДЫ С УЧЕТОМ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ФОНА ДЕ СИТТЕРА	144
	9.1. Введение.....	144
	9.2. Гравитационное поле звезды с переменной массой.....	145
	9.3. Гравитационное поле звезды с переменной массой на космологическом фоне де Ситтера.....	148
	9.4. Дополнение: Об особенностях первого интеграла в обобщенной проблеме Вайды.....	154
	Литература.....	160

ВВЕДЕНИЕ

Исследования нестационарных задач небесной механики являются актуальными как в плане фундаментальных исследований при разработке качественных, аналитических и численных методов, так и в отношении практических приложений к ряду насущных задач исследований движения искусственных и естественных небесных тел. Сейчас достигнутые успехи в области моделирования нестационарных схем задач небесной механики и потребности развития науки и техники приводят к необходимости учета диссипативных факторов для создания высокоточных теорий движения космических аппаратов и небесных тел.

История и развитие исследований по небесной механике тел переменной массы описаны в ряде опубликованных отечественных и зарубежных изданий, статей и обзоров, например [1-9]. Исследования нестационарных задач небесной механики стимулировались необходимостью учета фактора переменности массы, в связи с выявлением важной роли корпускулярного излучения в эволюции звезд, а в последующем и изменением ряда других физических характеристик, в развитии гравитирующих систем ближнего и дальнего космоса.

Реальные гравитирующие системы являются по существу нестационарными. Наблюдательные данные свидетельствуют об изменении со временем различных физических параметров гравитирующих тел и ряда других важнейших в динамическом отношении характеристик в процессе эволюции. В связи с этим является актуальным исследование задач небесной механики, учитывающих различные факторы нестационарности и позволяющих выявить динамические особенности эволюции гравитирующих систем, существенную роль в которых играют процессы изменения масс и других физических параметров взаимодействующих тел [9].

В звездной динамике, также [10], исследование вопросов эволюции звездных систем приводит к исследованию нестационарных задач, поскольку все эволюционные процессы по своему существу являются формой нестационарного движения звездных систем. Однако, как отмечено [10], следует признать, что решение и даже формулировка задач нестационарного движения является достаточно сложной [10-14]. Совершенно закономерно рассмотрение стационарных задач подводит вплотную к необходимости в виде следующего шага перейти к рассмотрению нестационарных процессов, которые и послужат основой научной теории эволюции звездных систем.

Методы небесно-механического описания кратных звездных систем и космических объектов с учетом диссипативных факторов эволюции, включающие различные факторы нестационарности гравитирующих систем, являются новыми и могут выявить качественные свойства и особенности гравитационного взаимодействия в таких системах.

Значительная часть наблюдаемых звезд являются двойными. Изучение двойных звезд всегда занимало одно из центральных мест в звездной астрономии нового времени, хотя основное направление работы изменялось: от регистрации факта двойственности к изучению орбитального движения, физических свойств компонент, образования и эволюции тесных двойных систем [15]. Целые классы традиционных и вновь открытых звезд оказались обязанными всеми своими основными особенностями факту их двойственности.

Отмечено [15], что подавляющая часть звезд нашей Галактики входит в состав двойных систем. Около половины их являются тесными двойными. Двойственность значительно обогащает эволюцию компонент, и в первую очередь это относится к тесным двойным звездам, компоненты которых взаимодействуют в ходе эволюции. Кроме этого, как показали работы последних лет [15], целый ряд интересных типов звезд – новые, симбиотические звезды, катаклизмические переменные, звезды Вольфа-Райе, рентгеновские источники – являются тесными двойными звездами. Все это привлекает особое внимание к исследованию двойных звезд, как с наблюдательной, так и с теоретической точки зрения. Исследование динамической эволюции тесной двойной системы – сложная задача и решается она только при использовании целого ряда упрощающих предположений.

Исследование динамики двойных нестационарных гравитирующих систем необходимо для понимания многих явлений в звездных системах, так как двойственность является типичной характеристикой звезд: результаты исследований встречаемости двойных звезд позволяют утверждать, что двойственность – весьма распространенное явление в мире звезд [15], а истечение вещества наблюдается из множества звезд различных спектральных классов [16], причем внеатмосферные наблюдения показали, что истечение вещества в форме звездного ветра присуще всем звездам ранних спектральных классов и усиливается на поздних стадиях эволюции [17].

Результаты ранних работ по корпускулярному излучению, как некоторому закономерному и непрерывному процессу истечения массы, имеющему место для всех звезд, в том числе и для Солнца, и являющемуся фактором звездной эволюции [18-20], получили подтверждение и

дальнейшее развитие в наблюдательных и теоретических данных (см., например, [15-17]). В результате наблюдений выяснилось, что нестационарность небесных тел при истечении либо аккреции массы может быть связана с дополнительными сопутствующими факторами переменности размеров и формы самих тел.

Основой изучения динамики двойных стационарных гравитирующих систем является задача двух тел (материальных точек) постоянной массы – классическая кеплеровская задача двух тел. Описание динамики более сложных кратных систем базируется на хорошо разработанной в небесной механике теории возмущений. Многие результаты по динамике гравитирующих систем получены на основе уже более сложных задач трех и многих тел небесной механики.

Основой изучения двойных нестационарных гравитирующих систем является задача двух тел (материальных точек) переменной массы в постановке Гильдена-Мещерского, Мещерского-Леви-Чивита, объединенной задачи Гильдена-Мещерского и Мещерского-Леви-Чивита.

Задача Гильдена-Мещерского, ставшая уже классической, является базовой при анализе двойных систем переменной массы [21, 22]. До сих пор известны лишь случаи интегрируемости И. В. Мещерского, Б. Е. Гельфгата для отдельных законов изменения массы. Первые случаи строгой интегрируемости этой задачи указал И. В. Мещерский [22] в 1893 и 1902 гг. методом пространственно-временных преобразований для законов изменения массы известных в настоящее время соответственно как первый, второй и объединенный законы Мещерского. Для случая изменения массы звезд по закону Эддингтона-Джинса $\dot{M} = -\alpha M^n$ ($\alpha, n = \text{const}$) первый и второй законы Мещерского соответствуют значениям показателя $n = 2$ и $n = 3$ соответственно.

Б. Е. Гельфгат [23] получил интегрируемые случаи задачи Гильдена-Мещерского при изменении массы двух тел по закону Эддингтона-Джинса при значениях показателя $n = 0$ и $n = 3/2$ методом, использующим квазиинтеграл энергии проблемы двух тел переменной массы. Им найдены [24] строгие решения задачи Мещерского-Леви-Чивита при законе изменения массы Эддингтона-Джинса для значений показателя $n = -2, n = 1, n = 4$. Рассмотрено обобщение задачи двух тел переменной массы, объединяющее схемы задач Гильдена-Мещерского и Мещерского-Леви-Чивита и указаны случаи интегрируемости этой объединенной схемы задачи, связанные с интегрируемостью задачи Гильдена-Мещерского [25]. Здесь же показана тесная связь классических схем задачи двух тел переменной массы – методом пространственно-временных

преобразований задачу Гильдена-Мещерского возможно привести к задаче Мещерского-Леви-Чивита и обратно.

Исследования задач небесной механики тел переменной массы проводятся уже в течение более ста лет, и в ближнем зарубежье основной вклад в развитии этих исследований сделан российскими учеными. Мировой перечень имен ученых, как отечественных, так и ученых ближнего и дальнего зарубежья, а также результаты исследований задач небесной механики тел переменной массы в различных направлениях можно найти в указанных обзорах [1-9] и в работах [26-31]. основополагающие результаты в становлении и развитии задач небесной механики тел переменной массы принадлежат российским ученым, среди них следует отметить ранние работы Г. Н. Дубошина [1, 32-35] по качественному исследованию форм орбит в задаче двух тел переменной массы и его книгу по небесной механике [36], в которой обобщается ньютоновское взаимодействие тел на более общие законы Вебера и обобщенные нестационарные силы взаимодействия небесных тел. Современные исследования в области нестационарных задач небесной механики включают, помимо переменности масс космических тел, и другие факторы нестационарности (переменность светового давления звезд, изменение размеров и формы тел, вариации гармоник геопотенциала, диссипативные явления, связанные с сопутствующим гравитирующим фоном и др.). В рамках ньютоновской механики анализируется и сопоставляется проблема изменения гравитационной постоянной (гипотеза Дирака [37]) и возможность одновременного изменения масс всех тел [38].

В последнее время получено дальнейшее развитие модельных схем нестационарных задач небесной механики. Исследования околоземного космического пространства, повышение точности прогнозирования и определения орбит небесных тел, новые наблюдательные и теоретические данные требуют включения дополнительных эволюционных факторов в рассматриваемые модели. К числу таких факторов относится нестационарность различных физических параметров гравитирующих и излучающих тел.

В масштабах Солнечной системы обсуждаются оценки возможных изменений массы Солнца, гравитационной постоянной и полуосей орбит планет, а также связанного с ними значения астрономической единицы по современным наблюдениям планет и космических аппаратов [39, 40].

Исследования последних десятилетий в области нестационарных задач небесной механики свидетельствуют об актуальности развития этого направления [9, 27, 28, 41-62].

Можно отметить задачи представляющие интерес для проблем небесной механики и необходимые для дальнейших фундаментальных и прикладных исследований. Важным является дальнейшее развитие теории движения искусственных спутников с учетом сжатия Земли, сил сопротивления атмосферы, светового давления и дополнительных диссипативных факторов эволюции орбит. Разработка поступательно-вращательного движения спутника в нецентральной нестационарной поле тяготения. Разработка и исследование спутникового варианта ограниченной нестационарной задачи трех тел. Исследование ограниченной фотогравитационной нестационарной задачи двух и трех тел. Результаты исследования указанных нестационарных задач дают новые качественные свойства движения и имеют важное значение для задач динамики искусственных и естественных небесных тел.

Монография посвящена исследованию динамики двойных нестационарных гравитирующих систем на основе методов анализа задачи Гильдена-Мещерского, ее модификаций, и круга вопросов, связанных с качественными свойствами решений, устойчивостью движения, кольцевой структурой звездных и галактических систем, расширенной проблемой Вайды по определению гравитационного поля звезды с истечением или аккрецией материи с учетом космологического фона де Ситтера.

В первой главе исследуется задача двух тел переменной массы – задача Гильдена-Мещерского. Методом автономизации найдены все возможные законы изменения массы, при выполнении которых уравнение Бине задачи Гильдена-Мещерского приводится к стационарному виду. Для установленных законов изменения массы найдены все возможные траектории движения в задаче Гильдена-Мещерского. Подробно рассмотрен класс орбит с переменным параметром и постоянным эксцентриситетом. Для этого класса орбит приводятся законы изменения массы как в параметрической форме, так и в виде явной зависимости от времени.

Во второй главе методом h -параметризации, состоящим в замене времени в уравнениях движения новой переменной h – квазиинтегралом энергии, получены точные решения задачи Гильдена-Мещерского. Используется прямой метод – задание скорости изменения массы со временем, и обратный метод h -параметризации – задание зависимости между массой и квазиинтегралом энергии системы.

Подробно рассмотрен случай периодического закона изменения массы тел. Для этого случая определена орбита, ее элементы, приводятся качественные особенности движения и дается оценка времени распада и захвата в системе.

В третьей главе приводятся параметрические решения задачи Гильдена-Мещерского, представленные через специальные функции – функции Бесселя, в которых роль параметра, подчиняющегося закону Мартина-Чиара, играет функция угловой характеристики движения – полярного угла траектории. Полученные результаты представляют интерес для исследования эволюции двойных систем, анализа кометного движения и некоторых прикладных проблем астрономии, в которых необходим учет связи переменного гравитационного параметра $\mu(t)$, меняющегося со временем, с угловыми характеристиками движения.

В четвертой главе определены частные решения задачи Гильдена-Мещерского, для которых существует частный интеграл, связывающий простым алгебраическим соотношением относительный радиус-вектор и массу двойной системы.

В пятой главе рассмотрена задача двух гравитирующих и излучающих тел, учитывающая гравитационное притяжение и световое давление взаимодействующих тел, с дополнительным предположением изотропной переменности их масс. Задача объединяет задачу Гильдена-Мещерского, внося в нее новый физический смысл, и фотогравитационную задачу двух тел Радзиевского. Представлена эволюционирующая орбита задачи, в отличие от кеплеровской, с переменными элементами орбиты – параметром и эксцентриситетом, определяемыми параметром $\mu(t)$, интегралом площадей C и квазиинтегралом энергии $h(t)$. Определены адиабатические инварианты задачи, представляющие интерес для медленной эволюции орбит, общий ход эволюции орбит двойных систем с излучением определяется изменением параметра $\mu(t)$ и общей энергии системы.

В шестой главе методом полуавтономизации строится новое промежуточное движение задачи двух тел переменной массы – аperiodическое движение по квазиконическому сечению с переменным параметром. Выведены дифференциальные уравнения для различных систем оскулирующих элементов, как в форме уравнений Ньютона, так и уравнений Лагранжа.

В седьмой главе проведен анализ систем оскулирующих элементов аperiodического движения по квазиконическому сечению с переменным параметром. Исследование проведено путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения в оскулирующих элементах аperiodического движения по квазиконическому сечению с переменным параметром. Показано наличие векового эффекта у аргумента перицентра и практическое постоянство эксцентриситета орбиты.

В восьмой главе выясняются условия существования и устойчивости в смысле А. М. Ляпунова широкого класса спиральных и круговых движений в нестационарных осесимметричных гравитационных полях различных типов.

Рассмотрены спиральные движения материальной точки в нестационарной звездной системе с осевой симметрией. Получены условия устойчивости спиральных движений.

Исследуются спиральные орбиты в осесимметричном гравитационном поле, нестационарность которого характеризуется функцией γ , меняющейся по первому и второму закону И. В. Мещерского. Установлены условия существования и устойчивости широкого класса спиральных орбит.

Рассмотрены круговые движения материальной точки в осесимметричном гравитационном поле при наличии сопротивляющейся среды. Получены условия устойчивости нестационарных круговых движений. Получено обобщение условий устойчивости круговых движений С. Чандрасекара, В. Г. Демина.

Многообразие рассмотренных спиральных и круговых орбит определяется темпом изменения функции времени, характеризующей нестационарность системы, величиной секторной скорости движения материальной точки, набором начальных параметров.

Рассмотрена небесно-механическая модель пекулярных кольцевых галактик типа «объект Мэйолла». Установлены критерии устойчивости кольцевой структуры таких галактик для соотношений масс ядра и кольца, а также для расстояния плоскости кольца от ядра.

В девятой главе рассматривается расширенная проблема Вайдьи с учетом космологического фона де Ситтера. Известное решение Вайдьи уравнений общей теории относительности (ОТО) для излучающей массы обобщается на случай истечения или аккреции материи с произвольной радиальной скоростью для звезды, погруженной в космологический фон де Ситтера. Глава девятая написана на основе результатов, полученных совместно с Э. Г. Мычелкиным.

Полученные в книге результаты могут быть использованы при исследовании других более сложных нестационарных схем задач двух и многих тел небесной механики и имеют важное значение в изучении динамической эволюции нестационарных гравитирующих систем.

Надеюсь, что книга будет способствовать дальнейшему развитию, как в фундаментальном, так и в прикладном направлении, методов исследования нестационарных задач небесной механики, учитывающих диссипативные факторы эволюции гравитирующих систем.

Весь материал книги написан автором самостоятельно. В книге приводятся замечания, которые акцентируют внимание на те или иные свойства, особенности, уточнения рассматриваемых задач и методов, способствующих лучшему представлению результатов исследований и их дальнейшему развитию. Автор будет благодарен за замечания и предложения, которые можно направить по e-mail: bekov@mail.ru.

Автор признателен профессору Е. А. Гребеникову за поддержку при подготовке рукописи.

Г Л А В А 1

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ И ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО

1.1. Введение

Одной из наиболее известных в небесной механике тел переменной массы является задача Гильдена-Мещерского [21, 22]. Она охватывает ряд конкретных проблем в ньютоновском взаимодействии двух тел переменной массы и используется для описания эволюции двойных звезд при вековой потере массы за счет фотонной и корпускулярной активности. Задача Гильдена-Мещерского служит математической моделью для описания различных по физическому содержанию случаев движения тел переменной массы [1, 22, 26, 63].

Уравнение относительного движения в плоскости орбиты имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu(t)\vec{r}/r^3, \quad (\cdot) = d/dt, \quad (1.1)$$

где $\vec{r} = (x, y)$ – радиус-вектор относительного движения одной материальной точки относительно другой в плоскости орбиты, $\mu(t) = G(m_1(t) + m_2(t))$, G – гравитационная постоянная, $m_1(t)$, $m_2(t)$ – массы тел, некоторые непрерывные функции времени t , $r = |\vec{r}|$.

Строгое решение задачи Гильдена-Мещерского (1.1) получено И. В. Мещерским [22] для законов изменения массы

$$\mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1}, \quad \mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1/2}, \quad \mu(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{-1/2}, \quad (1.2)$$

называемых соответственно первым, вторым и объединенным законами Мещерского, и Б. Е. Гельфгатом [23] для следующих законов изменения массы

$$\begin{aligned} \mu(t) &= (\alpha t + \beta), \quad \mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-2}, \\ \mu(t) &= (\alpha_1 t + \beta_1)(\alpha_2 t + \beta_2)^{-2}, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для законов изменения массы (1.2) решение задачи (1.1) получается в элементарных функциях (первый закон Мещерского) или в эллиптических функциях. В случае изменения массы $\mu(t)$ по формулам (1.3) задача (1.1) разрешима в замкнутом виде через бесселевы функции [36].

Наибольшие усилия были приложены к исследованию случая изменения массы по степенному закону Эддингтона-Джинса [64]

$$\dot{\mu} = -\alpha\mu^\nu, \quad 1,4 < \nu < 4,4, \quad \alpha = const, \quad (1.4)$$

открытому при помощи теории внутреннего строения и эволюции звезд. При $\nu = 2$ и $\nu = 3$ имеем соответственно первый и второй законы Мещерского, при $\nu = 0$ и $\nu = 3/2$ получим случаи интегрируемости Б. Е. Гельфгата (1.3) (соответственно первый и второй законы). Для изменения массы по степенному закону (1.4) было показано [65], что решение проблемы при любом ν легко находится, если известно соответствующее решение при $1 \leq \nu_1 \leq 3$, связанное с ν соотношением $\nu_1 = 3 - 2\nu/2 - \nu$.

Методом автономизации [66-68] определены все возможные законы изменения массы, при которых задача (1.1) преобразованием Куммера-Лиувилля приводится к стационарной форме. В [69] вопрос об интегрировании задачи Гильдена-Мещерского сведен к вопросу об интегрировании введенной канонической формы задачи.

В полярных координатах r и θ вектора-функции \vec{r} уравнение (1.1) имеет вид

$$\ddot{r} - \frac{C_0^2}{r^3} + \frac{\mu(t)}{r^2} = 0, \quad (1.5a)$$

$$r^2 \dot{\theta} = C_0, \quad (1.5b)$$

где C_0 – постоянная интеграла площадей. Вводя в уравнение (1.5a) угол θ по формуле (1.5b) в качестве независимой переменной и принимая еще за неизвестную функцию обратное значение радиуса-вектора

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{r}, \quad (1.6)$$

получим нестационарное уравнение Бине

$$\Phi''(\theta) + \Phi(\theta) = \frac{\mu(\theta)}{C_0^2}, \quad (') = d/d\theta, \quad C_0 \neq 0, \quad (1.7)$$

причем связь угла θ и времени t дается из интеграла площадей (1.5b) формулой

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\Phi^2(\theta)} = C_0(t - t_0), \quad (1.8)$$

где θ_0 – значение угла θ в начальный момент времени t_0 .

Решение задачи (1.1) сводится к решению уравнения Бине (1.7), после чего из формулы (1.8) определится связь угла θ и времени t .

Уравнение Бине (1.7) исследовалось в работах Г. Н. Дубошина [1] и В. В. Степанова [70] в направлении качественного анализа, исходя из аналитической структуры $\mu(t)$. В этих работах метод исследования заключался в том, что время исключалось и масса $\mu(t)$ рассматривалась как функция угла $\mu(\theta)$. Г.Н. Дубошиным [1] показано, что существует непрерывная, однозначная, всегда положительная функция $\mu(\theta)$ переменной θ . Проведен [1, 70] качественный анализ траекторий движения в задаче (1.1) при различных предположениях о характере изменения $\mu(t)$ и высказано предположение [1], что в природе возможны также законы изменения массы, отличные от законов Мещерского.

Введем преобразование переменных

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) = v(\theta)\rho(\tau) \ , \ d\tau = u(\theta)d\theta \\ v(\theta) \in C_1^2 \ , \ u(\theta) \in C_1^2 \ , \ u(\theta)v(\theta) \neq 0 \ , \ \forall \theta \in I \ , \end{aligned} \quad (1.9)$$

где I – открытый ограниченный или неограниченный интервал полярного угла θ , C_1^2 - пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций в I , и приведем уравнение (1.7) к стационарному виду

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} \pm b_1 \frac{d\rho}{d\tau} + b_0\rho = \frac{\mu_0}{C_0^2} \ , \ C_0 \neq 0 \ , \quad (1.10)$$

где b_0 , μ_0 – вещественные постоянные, а b_1 может быть как вещественной, так и чисто мнимой постоянной. Здесь и всюду далее $C_0 \neq 0$.

Определим все возможные законы изменения массы $\mu(\theta)$, при которых уравнение (1.7) преобразованием (1.9) приводится к виду (1.10) [71]. Искомые законы являются не только достаточными, но и необходимыми условиями существования соответствующего преобразования (1.9), решение дается на основе метода автономизации дифференциальных уравнений [72].

В результате, с помощью интеграла площадей (1.8), можем определить все возможные законы изменения массы $\mu(t)$ и, соответственно, все возможные траектории в задаче Гильдена-Мещерского (1.1) с приводимым к стационарной форме (1.10) уравнением Бине.

1.2. Автономизация уравнения Бине

Л е м м а 1.1. Для того чтобы уравнение (1.7) преобразованием (1.9) приводилось к виду (1.10), необходимо и достаточно, чтобы ядро $u(\theta)$ и множитель $v(\theta)$ преобразования (1.9) удовлетворяли уравнениям

$$\frac{1}{2} \frac{u''}{u} - \frac{3}{4} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 - \frac{1}{4} \delta u^2 = 1, \quad \delta = b_1^2 - 4b_0 \quad (1.11)$$

$$v'' + v - b_0 v^{-3} = 0, \quad b_1 = 0 \quad (1.12)$$

$$v'' + v - \frac{b_0}{b_1^2} v^{-3} \left(\int_{\theta_0}^{\theta} v^{-2} d\theta \right)^{-2} = 0, \quad b_1 \neq 0, \quad \theta_0 \in I \quad (1.13)$$

Здесь $v(\theta)$, $u(\theta)$ и $\mu(\theta)$ связаны соотношениями

$$v(\theta) = |u|^{-1/2} \exp\left(\pm \frac{b_1}{2} \int u d\theta\right) \quad (1.14)$$

$$v'' + v - b_0 u^2(\theta) v = 0 \quad (1.15)$$

$$\mu(\theta) = \mu_0 v u^2. \quad (1.16)$$

При этом уравнение (1.7) имеет частные решения

$$\Phi(\theta) = v(\theta) \lambda_0, \quad \lambda_0 = \mu_0 / (b_0 C_0^2), \quad b_0 \neq 0 \quad (1.17a)$$

$$\Phi(\theta) = v(\theta) \lambda_1, \quad \lambda_1 = \pm \mu_0 \tau / (b_1 C_0^2) + \beta_0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 \neq 0 \quad (1.17б)$$

$$\Phi(\theta) = v(\theta) \lambda_2, \quad \lambda_2 = \mu_0 \tau^2 / (2C_0^2) + \alpha_0 \tau + \beta_0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0. \quad (1.17в)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Применяя преобразование (1.9) к (1.7) получим

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} + \frac{1}{u} \left(2 \frac{v'}{v} + \frac{u'}{u} \right) \frac{d\rho}{d\tau} + \frac{(v'' + v)}{v u^2} \rho = \frac{\mu}{v u^2 C_0^2}. \quad (1.18)$$

Потребуем приведение (1.7) к виду (1.10), тогда сразу из (1.18) следует (1.15) и (1.16). Приравнявая коэффициенты при $d\rho/d\tau$ в уравнениях (1.18) и (1.10), приходим к линейному уравнению по отношению к функции v

$$v' = \left(-\frac{1}{2} \frac{u'}{u} \pm \frac{b_1}{2} u \right) v, \quad (1.19)$$

интегрируя которое получим (1.14) . Подставляя (1.14) в (1.15) получим (1.11). Выбирая u как зависимую переменную, получим из (1.19) уравнение Бернулли

$$u' + 2\frac{v'}{v}u \mp b_1 u^2 = 0 , \quad (1.20)$$

которое имеет решение

$$\begin{aligned} u &= v^{-2} , \quad b_1 = 0 \\ u &= v^{-2} \left(\eta \mp b_1 \int v^{-2} d\theta \right)^{-1} , \quad b_1 \neq 0 , \end{aligned} \quad (1.21)$$

где η – произвольная постоянная. В силу произвольности η полагаем $\eta = 1$, если $b_1 = 0$ и $\eta = 0$, если $b_1 \neq 0$. Подстановка (1.21) в (1.15) дает соответственно (1.12) и (1.13). Чтобы получить (1.17) отметим, что решения $\rho_i = \lambda_i$ ($i = 0,1,2$), где λ_i определяются соотношениями, выписанными в (1.17), есть частные решения уравнения (1.10). Затем вследствие (1.9) получим частные решения (1.17).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются утверждения леммы 1.1. Тогда преобразование (1.9) приводит (1.7) к виду (1.18). Поскольку выполняются все требования (1.14)-(1.16), то (1.18) совпадает с (1.10).

Отметим, что уравнение (1.11) называется уравнением Куммера-Шварца, уравнение (1.15) – уравнением множителя преобразования (1.9), уравнения (1.12), (1.13) – уравнением типа Ермакова, а преобразование (1.9), где множитель $v(\theta)$ вычисляется по формуле (1.14) – преобразованием Куммера-Лиувилля [73].

Л е м м а 1.2. Общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \frac{1}{A_0^2 \cos^2(\theta - \omega)} \times \\ &\times \begin{cases} \left[\frac{\alpha_1}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_1 \right]^{-1} \left[\frac{\alpha_2}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_2 \right]^{-1} , & \delta = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 > 0 \\ \left[\frac{A}{A_0^4} \operatorname{tg}^2(\theta - \omega) + \frac{B}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + C \right]^{-1} , & \delta = B^2 - 4AC < 0 \\ \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right]^{-2} , & \delta = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Частные случаи этого решения представляются формулами

$$u(\theta) = \frac{1}{A_0^2 \cos^2(\theta - \omega)} \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right]^{-1}, \quad (1.23)$$

$$u(\theta) = \frac{1}{A_0^2 \cos^2(\theta - \omega)}.$$

Доказательство. Согласно методу автономизации [72] уравнение (1.11) имеет решения

$$u(\theta) = y^{-2}(\theta) \begin{cases} \left(\alpha_1 \int \frac{d\theta}{y^2} + \beta_1 \right)^{-1} \left(\alpha_2 \int \frac{d\theta}{y^2} + \beta_2 \right)^{-1}, & \delta > 0 \\ \left[A \left(\int \frac{d\theta}{y^2} \right)^2 + B \left(\int \frac{d\theta}{y^2} \right) + C \right]^{-1}, & \delta < 0, \\ \left(\alpha \int \frac{d\theta}{y^2} + \beta \right)^{-2}, & \delta = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

где $y = y(\theta)$ – какое-нибудь решение уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Подставляя решение $y = A_0 \cos(\theta - \omega)$, где A_0, ω – фиксированные постоянные, в (1.24) получим решения (1.22). Частным решениям (1.24) соответствуют решения (1.23).

Лемма 1.3. а. Общее решение уравнения (1.12) имеет вид

$$v(\theta) = A_0 \cos(\theta - \omega) \times \begin{cases} \left[\frac{\alpha_1}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\alpha_2}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_2 \right]^{\frac{1}{2}}, & -4b_0 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 > 0 \\ \left[\frac{A}{A_0^4} \operatorname{tg}^2(\theta - \omega) + \frac{B}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + C \right]^{\frac{1}{2}}, & -4b_0 = B^2 - 4AC < 0 \\ \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right], & b_0 = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Важными частными решениями являются

$$v(\theta) = A_0 \cos(\theta - \omega) \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v(\theta) = A_0 \cos(\theta - \omega). \quad (1.26)$$

б. Общее решение интегродифференциального уравнения (1.13) описывается соотношениями

$$v = A_0 \cos(\theta - \omega) \left[\frac{\alpha_1}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_1 \right]^{\gamma_{\pm}} \left[\frac{\alpha_2}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_2 \right]^{\gamma_{\mp}},$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}; \quad \delta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0$$

$$v = A_0 \cos(\theta - \omega) \left[\frac{A}{A_0^4} \operatorname{tg}^2(\theta - \omega) + \frac{B}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + C \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp \left(\pm \frac{b_1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{A}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + B}{\sqrt{-\delta}} \right), \quad \delta = B^2 - 4AC < 0$$

$$v = A_0 \cos(\theta - \omega) \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right] \exp \left(\mp \frac{b_1}{2\alpha \left(\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right)} \right), \quad \delta = 0. \quad (1.27)$$

Частные случаи данного решения имеют вид

$$v = A_0 \cos(\theta - \omega) \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right]^{\frac{1}{2} \pm \frac{b_1}{2\alpha}},$$

$$v = A_0 \cos(\theta - \omega) \exp \left(\pm \frac{b_1}{2A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) \right). \quad (1.28)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: а. Поскольку уравнения (1.11) и (1.12) связаны преобразованием $v = u^{-1/2}$, то из леммы 1.2 получим утверждения леммы 1.3а, частные случаи леммы 1.2 дают частные случаи леммы 1.3а.

б. Согласно соотношению (1.14) из леммы 1.2 получим соотношения леммы 1.3б.

1.3. Законы изменения массы $\mu(\theta)$.

Т е о р е м а 1.1. Для того чтобы уравнение (1.7) преобразованием

$$\Phi(\theta) = |u|^{-1/2} \exp \left(\pm \frac{b_1}{2} \int u d\theta \right) \rho, \quad d\tau = u d\theta \quad (1.29)$$

приводилось к виду (1.10) необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(\theta)$ удовлетворяла интегродифференциальному уравнению

$$\mu'' - \frac{4}{3} \frac{\mu'^2}{\mu} - 3\mu - \frac{(2b_1^2 - 9b_0)\mu^{7/3}}{3k_1 + \frac{b_1^2}{3} \left(\int \mu^{2/3} d\theta \right)^2} = 0 \quad \begin{cases} k_1 = 1, & b_1 = 0 \\ k_1 = 0, & b_1 \neq 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

При этом соотношения (1.29) и (1.17) принимают соответственно вид

$$\Phi(\theta) = \mu^{-1/3} \left(C_1 \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right)^2 \rho, \quad d\tau = \mu^{2/3} \left(C_1 \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right)^{-1} d\theta \quad (1.31)$$

$$\Phi(\theta) = \mu^{-1/3} \left(C_1 \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right)^2 \lambda_0, \quad \lambda_0 = \mu_0 / b_0 C_0^2, \quad b_0 \neq 0 \quad (1.32)$$

$$\Phi(\theta) = \mu^{-1/3} \left(\frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right)^2 \lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{3\mu_0}{b_1^2 C_0^2} \ln \left| \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right| + \beta_0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 \neq 0 \quad (1.33)$$

$$\Phi(\theta) = \mu^{-1/3} \lambda_2, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_0}{2C_0^2} \left(\int \mu^{2/3} d\theta \right)^2 + \alpha_0 \left(\int \mu^{2/3} d\theta \right) + \beta_0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0 \quad (1.34)$$

Причем в формулах (1.31)-(1.34) $C_1=0$, если $b_1 \neq 0$ и $C_1=1$, если $b_1 = 0$.

Доказательство. Необходимость. Подставляя (1.14) в (1.16), получим

$$\mu = \mu_0 u^{3/2} \exp \left(\pm \frac{b_1}{2} \int u d\theta \right), \quad \mu_0 = 1. \quad (1.35)$$

Следовательно, имеем уравнение Бернулли по отношению к u

$$u' - \frac{2}{3} \frac{\mu'}{\mu} u \pm \frac{b_1}{3} u^2 = 0, \quad (1.36)$$

решение которого

$$u = \mu^{2/3} \left(C_1 \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right)^{-1}, \quad (1.37)$$

где C_1 – произвольная постоянная интегрирования. Подставив (1.37) в (1.14) получим

$$v = \mu^{-1/3} \left(C_1 \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right)^2. \quad (1.38)$$

Поскольку C_1 – произвольная постоянная, то полагаем $C_1 = 0$, если $b_1 \neq 0$ и $C_1 = 1$, если $b_1 = 0$. Подставив (1.37) в (1.11) или, что то же самое (1.38) в (1.15) с учетом (1.37), получим уравнение (1.30). Подставив (1.37) и (1.38) в (1.9) и (1.17), получим соответственно (1.31) и (1.32)-(1.34).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть масса $\mu(\theta)$ удовлетворяет уравнению (1.30). Подстановкой (1.35) уравнение (1.30) приводим к виду (1.11). Из (1.16) с помощью (1.21) получим

$$\mu = \mu_0 v^{-3} \left(\eta \mp b_1 \int v^{-2} d\theta \right)^2. \quad (1.39)$$

Подставив (1.39) в (1.30), получим уравнение (1.12) ($b_1 = 0$) и уравнение (1.13) ($b_1 \neq 0$). Но (1.11)-(1.13) есть условия преобразования (1.7) к виду (1.10).

По аналогии с [67, 68] уравнение (1.30) будем называть соответственно дифференциальным ($b_1 = 0$) и интегродифференциальным ($b_1 \neq 0$) законами изменения массы $\mu(\theta)$, из которых конечные формулы для $\mu(\theta)$ могут быть получены путем непосредственного интегрирования уравнения (1.30), либо на основе связи, существующей между $\mu(\theta)$, $u(\theta)$ и $v(\theta)$ по формуле (1.16) и леммам 1.2 и 1.3.

Т е о р е м а 1.2. Все возможные законы изменения массы $\mu(\theta)$, при которых уравнение (1.7) преобразованием (1.9) приводится к виду (1.10), даются конечными уравнениями

$$\mu = \frac{\mu_0}{A_0^3 \cos^3(\theta - \omega)} \left[\frac{\alpha_1}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_1 \right]^{\kappa_{\pm}} \left[\frac{\alpha_2}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_2 \right]^{\kappa_{\mp}}, \quad (1.40)$$

$$\kappa_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}, \quad \delta = b_1^2 - 4b_0 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{A_0^3 \cos^3(\theta - \omega)} \left[\frac{A}{A_0^4} \operatorname{tg}^2(\theta - \omega) + \frac{B}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + C \right]^{-3/2} \times$$

$$\times \exp \left(\pm \frac{b_1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{A}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + B}{\sqrt{-\delta}} \right), \quad \delta = B^2 - 4AC < 0, \quad (1.41)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{A_0^3 \cos^3(\theta - \omega)} \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right]^{-3} \exp \left[\mp \frac{b_1}{2\alpha \left(\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right)} \right], \quad \delta = 0 \quad (1.42)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{A_0^3 \cos^3(\theta - \omega)} \left[\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right]^{-\frac{3}{2} \pm \frac{b_1}{2\alpha}}, \quad \delta = \alpha^2 \quad (1.43)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{A_0^3 \cos^3(\theta - \omega)} \exp \left(\pm \frac{b_1}{2A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) \right), \quad \delta = 0. \quad (1.44)$$

Доказательство: При помощи лемм 1.2 и 1.3 согласно соотношению (1.16) получаем формулы (1.40)-(1.44).

1.4. Частные решения уравнения Бине

Рассмотрим частные решения уравнения Бине (1.7)

$$\Phi_i(\theta) = v(\theta)\lambda_i, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (1.45)$$

определяемые формулами (1.17).

Теорема 1.3. Для того, чтобы уравнение (1.7) допускало частные решения вида (1.45) необходимо и достаточно, чтобы масса изменялась согласно законам (1.40)-(1.44), при этом в качестве $v(\theta)$ выбираются соотношения, определяемые леммой 1.3.

Доказательство теоремы следует из леммы 1.3 и теоремы 1.2.

Теорема 1.4. Все частные решения уравнения (1.7) вида (1.45) определяются следующими соотношениями:

$$\Phi_{01} = \mu^{-\frac{1}{3}} \frac{\mu_0}{b_0 C_0^2}, \quad b_0 \neq 0, \quad b_1 = 0, \quad (1.46)$$

$$\Phi_{02} = \mu^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{b_1}{3} \int \mu^{\frac{2}{3}} d\theta \right)^2 \frac{\mu_0}{b_0 C_0^2}, \quad b_0 \neq 0, \quad b_1 \neq 0, \quad (1.47)$$

$$\Phi_1 = \mu^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{b_1}{3} \int \mu^{\frac{2}{3}} d\theta \right)^2 \left[\frac{3\mu_0}{b_1^2 C_0^2} \ln \left| \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{\frac{2}{3}} d\theta \right| + \beta_0 \right], \quad b_0 = 0, \quad b_1 \neq 0, \quad (1.48)$$

$$\Phi_2 = \mu^{-\frac{1}{3}} \left[\frac{\mu_0}{2C_0^2} \left(\int \mu^{\frac{2}{3}} d\theta \right)^2 + \alpha_0 \left(\int \mu^{\frac{2}{3}} d\theta \right) + \beta_0 \right], \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad (1.49)$$

где μ – определяется одним из законов (1.40)-(1.44).

Доказательство. Определим с помощью (1.37) выражения

$$\tau = \int u d\theta = \int \mu^{2/3} d\theta, \quad b_1 = 0, \quad (1.50)$$

$$\tau = \int u d\theta = \pm \frac{3}{b_1} \ln \left| \pm \frac{b_1}{3} \int \mu^{2/3} d\theta \right|, \quad b_1 \neq 0. \quad (1.51)$$

Подставляя значения $v(\theta)$ из (1.38) и найденные выражения (1.50) и (1.51) в формулы (1.45), получим решения (1.46)-(1.49).

З а м е ч а н и е 1. Частные прямолинейные решения задачи Гильдена-Мещерского ($C_0 = 0$) определены в работах [67, 73].

1.5. Траектории движения и связь между переменной τ и временем t

Нестационарное уравнение Бине (1.7) преобразованием (1.9) приводится к стационарному виду (1.10). Это уравнение вынужденных колебаний, общее решение которого известно [74]. Обозначим

$$\mu_0 / b_0 C_0^2 = \lambda_0 = 1 / p_0, \quad b_0 \neq 0, \quad (1.52)$$

тогда общее решение уравнения (1.10) определяется формулами

$$\rho(\tau) = \frac{1}{p_0} \left[1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right) \right], \quad \lambda^2 = \delta > 0, \quad (1.53)$$

$$\rho(\tau) = \frac{1}{p_0} \left[1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right) \right], \quad \lambda^2 = -\delta > 0, \quad (1.54)$$

$$\rho(\tau) = \frac{1}{p_0} \left[1 + \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) (C_2 \tau + C_3) \right], \quad \lambda^2 = \delta = 0. \quad (1.55)$$

Здесь e_0 , ω_0 , C_2 , C_3 – произвольные постоянные. Определим теперь возможные траектории в задаче Гильдена-Мещерского (1.1) на основе решений (1.53)-(1.55).

Т е о р е м а 1.5. Для законов изменения массы $\mu(\theta)$ (1.40)-(1.44) все возможные орбиты в задаче Гильдена-Мещерского имеют вид

$$r = \frac{p_0 \mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right)}{1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right)},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{\frac{\alpha_1}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_1}{\frac{\alpha_2}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta_2} \right| = J_1, \quad \lambda^2 = \delta > 0, \quad b_0 \neq 0$$
(1.56)

$$r = \frac{p_0 \mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right)}{1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right)},$$

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{A}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + B}{\sqrt{-\delta}} = J_2, \quad \lambda^2 = -\delta > 0, \quad b_0 \neq 0$$
(1.57)

$$r = \frac{p_0 \mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right)}{1 + \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) (C_2 \tau + C_3)},$$

$$\tau = -\frac{1}{\alpha \left(\frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right)} = J_3, \quad \lambda^2 = \delta = 0, \quad b_0 \neq 0,$$
(1.58)

$$r = \frac{p_0 \mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right)}{1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2} \tau + \omega_0\right)},$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{\alpha}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + \beta \right| = J_4, \quad \lambda^2 = \delta = \alpha^2, \quad b_0 \neq 0,$$
(1.59)

$$r = \frac{p_0 \mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right)}{1 + \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) (C_2 \tau + C_3)},$$

$$\tau = \frac{1}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) = J_5, \quad \lambda^2 = \delta = 0, \quad b_0 \neq 0.$$
(1.60)

Частные орбиты определяются формулами

$$r = p_0 \mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right), \quad \tau = (J_1 - J_5), \quad b_0 \neq 0, \quad (1.61)$$

$$r = \frac{\mu^{1/3} \exp\left(\mp \frac{2}{3} b_1 \tau\right)}{\mu_0 \tau / b_1 C_0^2 + \beta_0}, \quad \tau = (J_1, J_4), \quad b_0 = 0, \quad b_1 \neq 0, \quad (1.62)$$

$$r = \frac{\mu^{1/3}}{\mu_0 \tau^2 / 2C_0^2 + \alpha_0 \tau + \beta_0}, \quad \tau = (J_3, J_5), \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0. \quad (1.63)$$

Доказательство. С помощью формул (1.50), (1.51) выражение (1.38) для v принимает вид

$$v = \mu^{-1/3} \exp\left(\pm \frac{2}{3} b_1 \tau\right). \quad (1.64)$$

Подставляя значение v из (1.64) и выражения для ρ из (1.53)-(1.55) в формулу (1.6), получим формулы (1.56)-(1.60), соответствующие значения $\tau = \int u d\theta$ определяются значениями $u(\theta)$ из леммы 1.2. Формулы (1.61)-(1.63) соответствуют частным решениям (1.45), где функция v определяется из формулы (1.64).

С л е д с т в и е. Для законов изменения массы $\mu(\theta)$ (1.40)-(1.44) ($b_0 \geq 0, b_1 = 0$) все возможные орбиты в задаче Гильдена-Мещерского имеют вид

$$r = \frac{p_0 \mu^{1/3}}{1 + e_0 \cos\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right)}, \quad \tau = J_2, \quad \lambda^2 = 4b_0 > 0. \quad (1.65)$$

Частными орбитами являются

$$r = p_0 \mu^{1/3}, \quad b_0 \neq 0, \quad b_1 = 0, \quad (1.66)$$

$$r = \frac{\mu^{1/3}}{\mu_0 \tau^2 / 2C_0^2 + \alpha_0 \tau + \beta_0}, \quad \tau = (J_3, J_5), \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0. \quad (1.67)$$

Связь полярного угла θ и времени t определяется интегралом площадей (1.8). С помощью формул (1.9) и (1.14) интеграл площадей принимает вид

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\exp(\mp b_1 \tau) d\tau}{\rho^2(\tau)} = C_0(t-t_0) . \quad (1.68)$$

Определив связь переменной τ со временем t из формулы (1.68), получим затем связь угла θ и времени t из формул преобразования (1.9).

Т е о р е м а 1.6. Для законов $\mu(\theta)$ (1.40)-(1.44) связь между переменной τ и временем t определяется соотношениями

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\exp(\mp b_1 \tau) d\tau}{\left[1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right)\right]^2} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{b_0} p_0^{3/2}} (t-t_0) , \quad \lambda^2 = \delta > 0 , \quad b_0 \neq 0 , \quad (1.69)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\exp(\mp b_1 \tau) d\tau}{\left[1 + e_0 \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0\right)\right]^2} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{b_0} p_0^{3/2}} (t-t_0) , \quad \lambda^2 = -\delta > 0 , \quad b_0 \neq 0 , \quad (1.70)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\exp(\mp b_1 \tau) d\tau}{\left[1 + \exp\left(\mp \frac{b_1}{2} \tau\right) (C_2 \tau + C_3)\right]^2} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{b_0} p_0^{3/2}} (t-t_0) , \quad \lambda^2 = \delta = 0 , \quad b_0 \neq 0 \quad (1.71)$$

и следующими важными частными случаями

$$\tau - \tau_0 = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{b_0} p_0^{3/2}} (t-t_0) , \quad b_0 \neq 0 , \quad b_1 = 0 , \quad (1.72)$$

$$\exp(\mp b_1 \tau) - \exp(\mp b_1 \tau_0) = \mp \frac{b_1}{\sqrt{b_0}} \frac{\sqrt{\mu_0}}{p_0^{3/2}} (t-t_0) , \quad b_0 \neq 0 , \quad b_1 \neq 0 , \quad (1.73)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\exp(\mp b_1 \tau) d\tau}{\lambda_1^2} = C_0(t-t_0) , \quad \lambda_1 = \frac{\mu_0}{b_1 C_0^2} \tau + \beta_0 , \quad b_0 = 0 , \quad b_1 \neq 0 , \quad (1.74)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\lambda_2^2} = C_0(t-t_0) , \quad \lambda_2 = \frac{\mu_0}{2C_0^2} \tau^2 + \alpha_0 \tau + \beta_0 , \quad b_0 = 0 , \quad b_1 = 0 . \quad (1.75)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя значения $\rho(\tau)$ (1.53)-(1.55) в формулу (1.68), получим соотношения (1.69)-(1.71). Частные решения $\rho(\tau) = \lambda_i$ ($i=0, 1, 2$), определяемые формулами (1.17), дают соответственно соотношения (1.72)-(1.75).

С л е д с т в и е. Для законов $\mu(\theta)$ (1.40)-(1.44) ($b_0 \geq 0, b_1 = 0$) связь между переменной τ и временем t определяется соотношением

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\left[1 + e_0 \cos\left(\frac{\lambda}{2}\tau + \omega_0\right)\right]^2} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{b_0} p_0^{3/2}} (t - t_0), \quad \lambda^2 = 4b_0 > 0 \quad (1.76)$$

и частными случаями (1.72) и (1.75).

Для найденных законов $\mu(\theta)$ (1.40)–(1.44) общее решение задачи Гильдена-Мещерского (1.1) определяется формулами теорем 1.5 и 1.6. С помощью формул преобразования (1.9) [значения $\tau(\theta) = (J_1 - J_5)$] и теоремы 1.6 получим связь полярного угла θ и времени t и, следовательно, определим зависимость $\mu(t)$ от времени t .

1.6. Орбиты с постоянным эксцентриситетом и переменным параметром

Рассмотрим подробнее практически важный частный случай орбит с постоянным эксцентриситетом e_0 и переменным параметром $p(\mu)$. В этом случае орбиты описываются формулами (1.65), (1.76) и законом $\mu(\theta)$ (1.41) ($b_1 = 0, b_0 > 0$). Выпишем формулы, определяющие эти орбиты

$$r = \frac{p(\mu)}{1 + e_0 \cos \varphi}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{A}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + B}{\lambda}, \quad (1.77)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + e_0 \cos \varphi)^2} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{p_0^{3/2}} (t - t_0^*), \quad \lambda^2 = 4b_0 > 0, \quad b_1 = 0. \quad (1.78)$$

Здесь обозначено

$$p(\mu) = p_0 \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3}, \quad p_0 = \frac{C_0^2 b_0}{\mu_0}, \quad \varphi = \frac{\lambda}{2} \tau + \omega_0, \quad (1.79)$$

где $p(\mu)$ – переменный параметр, и аналогично кеплеровской задаче введены постоянные элементы орбиты: p_0 – параметр в начальный момент времени t_0 , e_0 – эксцентриситет, ω_0 – угловое расстояние перицентра от узла, t_0^* – момент прохождения через перицентр орбиты.

За исключением переменного параметра $p(\mu)$ формулы (1.77) и (1.78) совпадают с аналогичными выражениями классической задачи

двух тел [75] с той разницей, что роль истинной аномалии в формулах (1.77) и (1.78) играет новая переменная φ . Это обстоятельство позволяет нам провести классификацию орбит (1.77), так же как и в классическом случае.

1. $0 < e_0 < 1$.

Вводя большую полуось a_0 в момент времени t_0 , среднее движение n и среднюю аномалию M формулами

$$p_0 = a_0(1 - e_0^2), \quad n = \sqrt{\mu_0} / a_0^{3/2}, \quad M = n(t - t_0^*) \quad (1.80)$$

и замену

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + e_0}{1 - e_0}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (1.81)$$

интегрируя (1.78), получим связь между эксцентрической аномалией E и временем t :

$$E - e_0 \sin E = M. \quad (1.82)$$

Это аналог уравнения Кеплера. Уравнение орбиты можно теперь записать в виде

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3} a_0 (1 - e_0 \cos E), \quad (1.83)$$

где μ определяется формулой (1.41) ($b_1 = 0, b_0 > 0$). Введем среднюю аномалию эпохи

$$M_0 = n(t_0 - t_0^*), \quad (1.84)$$

тогда окончательно получим

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3} a_0 (1 - e_0 \cos E), \quad (1.85)$$

$$E - e_0 \sin E = M, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + e_0}{1 - e_0}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \sqrt{\mu_0} / a_0^{3/2}.$$

2. $e_0 > 1$.

Заменой

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e_0 + 1}{e_0 - 1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2} \quad (1.86)$$

и имея в виду

$$p_0 = a_0(e_0^2 - 1), \quad M = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a_0^{3/2}} \quad (1.87)$$

интегрируем (1.78) и получим

$$e_0 \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right) = M \quad (1.88)$$

аналог уравнения Кеплера для случая $e_0 > 1$. С учетом (1.86) уравнение орбиты (1.77) принимает вид

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3} a_0 (e_0 \sec F - 1). \quad (1.89)$$

Введем вместо F новую переменную H подстановкой

$$H = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right), \quad (1.90)$$

тогда имеем

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e_0 + 1}{e_0 - 1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}. \quad (1.91)$$

В результате получим следующий аналог уравнения Кеплера:

$$e_0 \operatorname{sh} H - H = M \quad (1.92)$$

и уравнение орбиты для этого случая

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3} a_0 (e_0 \operatorname{ch} H - 1). \quad (1.93)$$

3. $e_0 = 1$.

Уравнение орбиты (1.77) имеет вид

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3} q \sec^2 \frac{\varphi}{2} , \quad q = p_0/2 . \quad (1.94)$$

Интегрирование (1.78) ($e_0 = 1$) дает

$$\sigma^3 + 3\sigma = 3n(t - t_0^*) , \quad (1.95)$$

где

$$\sigma = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} , \quad n = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{2}q^{3/2}} . \quad (1.96)$$

С помощью формул (1.96) уравнение орбиты (1.94) принимает вид

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3} q(1 + \sigma^2) . \quad (1.97)$$

Из формул (1.77) имеем

$$\operatorname{tg}(\theta - \omega) = \frac{\sqrt{b_0} A_0^2}{A} \operatorname{tg} \varphi - \frac{BA_0^2}{2A} . \quad (1.98)$$

С помощью формулы (1.98) и соотношений (1.81), (1.86) и (1.96) в выражении для $\mu(\theta)$ (1.41) перейдем к переменным E , F , H и σ для соответствующих значений эксцентриситета e_0 . Тогда получим параметрическую зависимость массы μ от времени t , где конечные выражения массы μ в зависимости от времени t определяются с помощью указанных выше аналогов уравнения Кеплера. Результаты вычислений представлены в таблице 1.1.

Полученные формулы полностью описывают движение в задаче Гильдена-Мещерского в рассматриваемых случаях, а аналоги уравнения Кеплера позволяют определить в этих случаях зависимость μ от времени. Получим явную зависимость μ от времени t для случая $0 < e_0 < 1$.

Таблица 1.1 – Законы изменения массы и орбиты в задаче Гильдена-Мещерского

Эксцентриситет	Изображающее движение $\rho^{-1}(\tau)$	Закон изменения массы	Орбита и аналоги уравнения Кеплера
$0 < e_0 < 1$	Эллиптическое	$\mu = \mu_0 \left[\frac{b_0(1-e_0^2)\sin^2 E - B\sqrt{b_0(1-e_0^2)}\sin E(\cos E - e_0) + \left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{A_0^4}\right)(\cos E - e_0)^2}{(b_0 A / A_0^2)(1 - e_0 \cos E)^2} \right]^{3/2}$	$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3} a_0(1 - e_0 \cos E)$ $E - e_0 \sin E = M$
$e_0 > 1$	Гиперболическое	$\mu = \mu_0 \left[\frac{b_0(e_0^2 - 1)\sin^2 F - B\sqrt{b_0(e_0^2 - 1)}\sin F(e_0 \cos F - 1) + \left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{A_0^4}\right)(e_0 \cos F - 1)^2}{(b_0 A / A_0^2)(e_0 - \cos F)^2} \right]^{3/2}$	$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3} a_0(e_0 \sec F - 1)$ $e_0 \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ\right) = M$
- // -	- // -	$\mu = \mu_0 \left[\frac{b_0(e_0^2 - 1)\operatorname{sh}^2 H - B\sqrt{b_0(e_0^2 - 1)}\operatorname{sh} H(e_0 - \operatorname{ch} H) + \left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{A_0^4}\right)(e_0 - \operatorname{ch} H)^2}{(b_0 A / A_0^2)(e_0 \operatorname{ch} H - 1)^2} \right]^{3/2}$	$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3} a_0(e_0 \operatorname{ch} H - 1)$ $e_0 \operatorname{sh} H - H = M$
$e_0 = 1$	Параболическое	$\mu = \mu_0 \left[\frac{4b_0\sigma^2 - 2B\sqrt{b_0}\sigma(1 - \sigma^2) + \left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{A_0^4}\right)(1 - \sigma^2)^2}{(b_0 A / A_0^2)(1 + \sigma^2)^2} \right]^{3/2}$	$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3} q(1 + \sigma^2)$ $\sigma^3 + 3\sigma = 3n(t - t_0^*)$
$e_0 = 0$	Круговое	$\mu = \mu_0 \left[\frac{A_0^2}{b_0 A} \left[b_0 \sin^2 M - \frac{B\sqrt{b_0}}{2} \sin 2M + \left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{A_0^4}\right) \cos^2 M \right] \right]^{3/2}$	$r = (\mu / \mu_0)^{1/3} P_0$ $M = n(t - t_0) + M_0$

Выражение $\mu(\theta)$ согласно формуле (1.41) ($b_1 = 0$) имеет вид

$$\mu(\theta) = \frac{\mu_0}{A_0^3 \cos^3(\theta - \omega)} \left[\frac{A}{A_0^4} \operatorname{tg}^2(\theta - \omega) + \frac{B}{A_0^2} \operatorname{tg}(\theta - \omega) + C \right]^{-\frac{3}{2}},$$

$$B^2 - 4AC = -4b_0 < 0 . \quad (1.99)$$

С помощью (1.98) выражение (1.99) принимает вид

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{A_0^2}{A} \left(\sin \varphi - \frac{B}{2\sqrt{b_0}} \cos \varphi \right)^2 + \frac{A}{b_0 A_0^2} \cos^2 \varphi . \quad (1.100)$$

Кеплеровская эллиптическая орбита

$$r = a_0(1 + e_0 \cos E) , \quad \mu = \mu_0 \quad (1.101)$$

соответствует выбору произвольных постоянных

$$A = A_0^2 , \quad B = 0 , \quad b_0 = 1 , \quad (1.102)$$

вследствие чего имеем следующую связь истинной аномалии и переменной τ :

$$\theta - \omega = \tau + \omega_0 \quad (1.103)$$

В общем случае, как и в кеплеровской задаче [75], применяя ряд Лагранжа к аналогу уравнения Кеплера (1.82), получим разложения функции от эксцентрической аномалии E в ряды по целым возрастающим степеням эксцентриситета e_0 , с коэффициентами являющимися тригонометрическими многочленами относительно синусов и косинусов, кратных средней аномалии. Эти ряды, как и в классическом случае, абсолютно сходящиеся при любом значении средней аномалии M , если эксцентриситет орбиты удовлетворяет пределу Лапласа

$$e_0 < \bar{e} = 0,662743... . \quad (1.104)$$

Подставляя разложения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии [75] в формулу (1.100), получим явную зависимость μ от времени t в виде

$$\left(\frac{\mu(t)}{\mu_0}\right)^{2/3} = \left\{ A_1 + A_2 \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke_0) - J_{k+1}(ke_0)] \sin kM - \right. \\ \left. - A_3 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke_0) \cos kM \right\}^2 + \\ + A_4 \left[-e_0 + \frac{2(1-e_0^2)}{e_0} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke_0) \cos kM \right]^2, \quad 0 < e_0 < 1 \quad (1.105)$$

где J_k – функции Бесселя с аргументом, кратным эксцентриситету e_0 , и введены новые постоянные

$$A_1 = \frac{BA_0 e_0}{2\sqrt{b_0 A}}, \quad A_2 = \frac{A_0 \sqrt{1-e_0^2}}{\sqrt{A}}, \quad A_3 = \frac{BA_0(1-e_0^2)}{e_0 \sqrt{b_0 A}}, \quad A_4 = \frac{A}{b_0 A_0^2}. \quad (1.106)$$

Формула (1.105) определяет зависимость μ от времени t при заданных начальных условиях (эксцентриситет e_0 , среднее движение n).

Отметим, что вопрос аналитической структуры функции μ , определяющей характер изменения масс небесных тел при различных данных траекториях движения в задаче Гильдена-Мещерского, рассматривался в работе Г. Н. Дубошина [1]. Из формул (1.85) и (1.105) следует результат, полученный Г. Н. Дубошиным [1] методами качественного анализа траекторий движения в задаче (1.1).

Т е о р е м а 1.7. (Дубошин Г.Н., 1930) Если траектория периодическая, то масса системы также есть периодическая функция времени.

Отметим, что в общем случае решение задачи Гильдена-Мещерского (1.1) рассмотренным методом автономизации уравнения Бине (1.7) определяется результатами теорем 1.2, 1.5 и 1.6. Теорема 1.5 дает возможность описать все возможные в этом случае траектории движения в задаче Гильдена-Мещерского.

Г Л А В А 2

МЕТОД h -ПАРАМЕТРИЗАЦИИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО

2.1. Введение

Задача двух тел переменной массы в постановке Гильдена-Мещерского моделирует изотропное изменение массы гравитирующих тел. Она отличается от известной кеплеровской задачи лишь переменностью масс гравитирующих тел со временем. Учитывая дополнительно возможное фотогравитационное взаимодействие излучающих тел в форме фотогравитационной задачи двух тел В.В. Радзиевского [76], можно (1.1) обобщить и представить $\mu(t)$ в виде

$$\mu(t) = GM^*(t) , M^*(t) = q_1 m_1(t) + q_2 m_2(t) , \quad (2.1)$$

где q_1 и q_2 – коэффициенты редукции фотогравитационного поля для тел с массами $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Уравнения (1.1) и (2.1) характеризуют объединенную задачу Гильдена-Мещерского и Радзиевского [77].

И в общем случае, возможно включить в $\mu(t)$ в (1.1) либо в (2.1) изменение $G(t)$ со временем согласно гипотезе Дирака [37], а также в (2.1) и случаи возможной переменности коэффициентов редукции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ со временем:

$$\mu(t) = G(t)M^*(t) , M^*(t) = q_1(t)m_1(t) + q_2(t)m_2(t) . \quad (2.2)$$

Уравнения (1.1) и (2.2) характеризуют нестационарную фотогравитационную задачу двух тел в форме Гильдена-Мещерского-Радзиевского, описывающую эволюцию двойной системы с учетом факторов как переменности массы системы, так и переменности коэффициентов редукции массы системы, с возможными приемлемыми случаями для параметров q_i, m_i ($i=1,2$) системы. Задача (1.1) в случае соотношений (2.1) или (2.2) в математическом плане эквивалентна базовой задаче Гильдена-Мещерского, но различается для этих случаев в физическом аспекте. Эта сторона проблемы рассматривалась в нестационарной фотогравитационной задаче [78-81], в которой нестационарность обуслов-

лена лишь переменностью коэффициентов редукции фотогравитационного поля.

В дальнейшем будем рассматривать задачу (1.1) предполагая, что $\mu(t)$ может определяться одним из соотношений (2.1), (2.2), обобщающим известное выражение для $\mu(t)$ в исходной задаче Гильдена-Мещерского. В частности, всегда можно рассматривать случай, когда $\mu(t)$ соответствует только переменности массы системы или только переменности коэффициентов редукции фотогравитационного поля.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в выражение гравитационного параметра $\mu(t)$ входит произведение массы $M(t)$ системы на гравитационную постоянную G , а в случае различных указанных выше физических обобщений задачи в выражение $\mu(t)$ могут входить еще и другие физические параметры, тем не менее в работе сохранена терминология “масса $\mu(t)$ ” классической задачи Гильдена-Мещерского, хотя смысл выражения $\mu(t)$ ясен в каждом из указанных случаев.

Попытки строгого решения задачи (1.1) проводились различными методами, которые достаточно хорошо продемонстрированы и характеризуются, например, в работах [2, 23, 36, 65-69, 73, 82, 83].

Отметим, что исследование задачи Гильдена-Мещерского проводилось как в направлении качественного, так и количественного анализа проблемы (см., например, [1-9, 70, 84-86]).

З а м е ч а н и е 2. Анализ проблемы (1.1) позволяет сформулировать следующий вывод [87]: исследование задачи (1.1) путем решения дифференциальных уравнений (1.1) при произвольном выборе закона излучения не имеет эволюционного значения. Такой же вывод сделан в работе [88]. Кроме того, даже незначительное изменение вида дифференциальных уравнений движения (1.1) может привести к существенному изменению поведения двойной системы. Такие выводы свидетельствуют о важности физически различных случаев истечения массы в эволюции двойной системы. Таким образом, задача (1.1) проявляет свойство сильно отличающее ее от классической кеплеровской задачи. Тем не менее остается актуальным поиск строгих решений задачи для новых законов изменения массы со временем в связи с современными наблюдательными данными о переменности масс небесных тел со временем и возможностью с помощью новых строгих решений выявить и расширить спектр качественных свойств проблемы, объясняющих наблюдательные проявления эволюционных особенностей двойных звездных систем.

Исследуем проблему (1.1) [89] с помощью модификации метода [23], использующего квазиинтеграл энергии. Этим методом Б.Е. Гельфгат

[23] получил существенно новые результаты, которые в комбинации с пространственно-временными преобразованиями [65] дают продвижение и дальнейшую перспективу в исследовании задачи [25, 73]. Результаты работы [89] являются развитием метода [23], использующего квазиинтеграл энергии, и дают новые подходы в решении проблемы (1.1).

2.2. Уравнения движения и основное уравнение

Уравнения движения (1.1) в полярных координатах r и θ имеют вид

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0, \quad (2.3a)$$

$$r^2 \dot{\theta} = C, \quad (2.3b)$$

где C – постоянная интеграла площадей, $\mu = GM$.

Следуя Б. Е. Гельфгату [23], выведем уравнение, заменяющее уравнения движения (2.3) и являющееся основой для дальнейших исследований. Для этого умножая (2.3a) на $2\dot{r}dt$ и интегрируя, получаем

$$\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = h, \quad (2.4)$$

где

$$h = -2 \int \frac{\dot{\mu}}{r} dt \quad (2.5)$$

представляет квазиинтеграл энергии задачи (1.1).

Из (2.5) следует

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2}{r} \frac{d\mu}{dt} \quad (2.6)$$

соотношение известное ранее Д. Джинсу [64].

Величина h имеет такой же физический смысл, как и в задаче двух тел постоянной массы, однако при действительном движении меняется с течением времени, поэтому, следуя Д. Армеллини, h называется квазиинтегралом энергии [23].

Примем h за независимую переменную вместо t . Тогда из (2.6) находим

$$r = -2\mu' , \quad (2.7)$$

$$\dot{r} = -2\frac{\mu''}{\mu'}\dot{\mu} , \quad (2.8)$$

где μ' и μ'' – соответствующие производные от μ по h .

Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.4) получим уравнение

$$16(\mu'')^2\dot{\mu}^2 - 4h\mu'^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 , \quad (2.9)$$

связывающее изменение h с изменением массы μ .

Если $\dot{\mu}$ задается в виде $\dot{\mu} = \alpha\mu^n$, то уравнение (2.9) приводится к виду

$$16\alpha^2\mu^{2n}\mu'^2 - 4h\mu'^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 , \quad (2.10)$$

решение которого найдено Б.Е. Гельфгатом [23] для значения показателя $n = 0$ и, с учетом результатов пространственно-временных преобразований [65], соответственно для значения показателя $n = \frac{3}{2}$.

Уравнение (2.9) будем называть основным уравнением и дальнейшие исследования будут относиться именно к этому основному уравнению.

2.3. Возможности строгих решений

Задавая закон изменения массы, и подставляя его в (2.9), будем иметь основное уравнение, эквивалентное уравнениям движения при заданном законе изменения массы. Для случая степенного закона (1.4) это уравнение, имеющее вид (2.10), исследовалось при анализе строгих решений для значений показателя $n = 2; 3; 0; 3/2$ в законе (1.4) и использовании результатов для изучения поведения эксцентриситета двойной системы при различных законах изменения массы [25, 90]. В этих же работах [25, 90] указаны возможности подобных исследований для более общих случаев законов Мещерского и Гельфгата [22, 23], при которых интегрируема задача Гильдена-Мещерского. Таким образом, основное уравнение (2.9) в форме (2.10) позволяет в интегрируемых случаях проводить несколько другим способом исследование свойств фактического движения.

Каковы возможности для строгих решений при законе изменения массы общего вида

$$\dot{\mu}^2 = \Phi(\mu) , \quad (2.11)$$

где $\Phi(\mu)$ – достаточно произвольная функция μ , для основного уравнения (2.9). Подставим (2.11) в (2.9) и получим

$$16\Phi(\mu)(\mu'')^2 - 4h\mu'^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 . \quad (2.12)$$

Выясним, для каких функций $\Phi(\mu)$ в законе (2.11) можно достаточно просто получить решение уравнения (2.12), используя при этом первые интегралы дифференциального уравнения третьего порядка по переменной μ . Такой способ применялся при анализе строгих решений задачи для законов изменения массы Мещерского и Гельфгата [25, 90].

Продифференцируем (2.12) по h и получим

$$8\Phi\mu''' + 4\frac{d\Phi}{d\mu}\mu''\mu' - 2h\mu' + \mu = 0 . \quad (2.13)$$

Разделим (2.13) на достаточно произвольную функцию $\varphi(\mu)$ и проинтегрируем. В результате получим

$$8\frac{\Phi}{\varphi}\mu'' + 4\int\left[2\frac{\Phi}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\mu} - \frac{d\Phi}{d\mu}\right]\frac{\mu''\mu'dh}{\varphi} - 2h\int\frac{d\mu}{\varphi} + \int\left[2\int\frac{d\mu}{\varphi} + \frac{\mu}{\varphi}\right]dh = \alpha_0 , \quad (2.14)$$

где α_0 – постоянная интегрирования. Чтобы (2.14) давало первый интеграл уравнения (2.13), достаточно на функции $\Phi(\mu)$ и $\varphi(\mu)$ наложить условия

$$\begin{aligned} 2\frac{\Phi}{\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\mu} - \frac{1}{\varphi}\frac{d\Phi}{d\mu} &= \alpha_1 , \\ 2\int\frac{d\mu}{\varphi} + \frac{\mu}{\varphi} &= \beta = 0 , \end{aligned} \quad (2.15)$$

где α_1 – постоянная. Случай β – постоянной, не равной нулю, как показывает анализ (2.13) и (2.14), нового результата не дает и приводит к рассмотренному случаю.

Из условий (2.15) следует

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \alpha_3\mu^3 , \\ \Phi(\mu) &= \frac{\alpha_1\alpha_3}{2}\mu^4 + \alpha_2\mu^6 , \end{aligned} \quad (2.16)$$

где α_2, α_3 – произвольные постоянные. Теперь первый интеграл (2.14) вследствие (2.15), (2.16) имеет вид

$$8\left(\frac{\alpha_1}{2}\mu + \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\mu^3\right)\mu'' + 2\alpha_1\mu'^2 + \frac{h}{\alpha_3\mu^2} = \alpha_0 . \quad (2.17)$$

Случай $\beta \neq 0$ в условии (2.15) дает

$$8\frac{\Phi}{\varphi}\mu'' + 2\alpha_1\mu'^2 + h\frac{\mu}{\varphi} = \alpha_0 . \quad (2.18)$$

где Φ и φ определяются из (2.16). Отсюда видно, что (2.18) совпадает с (2.17).

При $\Phi(\mu)$ определяемым из (2.16) закон (2.11) есть объединенный закон Мещерского, из которого следует первый закон ($\alpha_2 = 0$) и второй закон ($\alpha_1 = 0$) Мещерского .

Не теряя общности положим $\alpha_3 = 1$, тогда закон (2.11) Мещерского и уравнение (2.13) принимают вид

$$\dot{\mu} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}\mu^4 + \alpha_2\mu^6} , \quad (2.19)$$

$$8\left(\frac{\alpha_1}{2}\mu^4 + \alpha_2\mu^6\right)\mu''' + 8(\alpha_1\mu^3 + 3\alpha_2\mu^5)\mu''\mu' - 2h\mu' + \mu = 0 . \quad (2.20)$$

В этом случае интегралы (2.12) и (2.17) являются первыми интегралами уравнения (2.20), и они принимают соответственно вид

$$16\left(\frac{\alpha_1}{2}\mu^4 + \alpha_2\mu^6\right)\mu'^2 - 4h\mu' + 4\mu\mu' + C^2 = 0 \quad (2.21)$$

и

$$8\left(\frac{\alpha_1}{2}\mu + \alpha_2\mu^3\right)\mu'' + 2\alpha_1\mu'^2 + \frac{h}{\mu^2} = \alpha_0 . \quad (2.22)$$

Наличие интегралов (2.21) и (2.22) позволяет получить общее решение уравнения (2.20). Результаты такого исследования и анализ строгих решений для интегрируемых случаев законов изменения массы проводились в работах [25, 90]. Отметим, что уравнения (2.20)–(2.22) с точностью до переобозначения постоянных совпадают с полученными в

[25, 90] соответствующими уравнениями, кроме того уравнения (2.20)–(2.22) получены в [25, 90] другим путем.

Мы приходим к следующему выводу: при задании достаточно произвольного закона изменения массы (2.11) попытки решения проблемы с помощью уравнения (2.12) методом поиска первых интегралов в терминах квазиинтеграла энергии h приводят к известному результату (2.19).

Следовательно, поиски решений в этом направлении ограничены: возможности новых решений сопряжены со значительным усложнением вида самих функциональных уравнений проблемы. Это видно из примера анализа [90] строгих решений задачи даже в случае простого степенного закона Эддингтона-Джинса.

Однако, как будет рассмотрено ниже, возможен другой подход к нахождению точных решений задачи и он является достаточно эффективным и позволяет сделать дальнейшие продвижения в решении проблемы Гильдена-Мещерского.

2.4. Метод решения основного уравнения

Обратимся к основному уравнению (2.9). Будем искать его решения следующим образом. В отличие от [23, 25] не будем задавать заранее закон изменения массы $\mu(t)$, а будем находить $\mu(t)$ в процессе решения самого уравнения (2.9), как следствие его решений. При этом достаточно указать найденные решения $\mu(t)$ и $\mu(h)$ поскольку с помощью формул (2.6), (2.8) возвращаясь к исходным уравнениям и переменным, так же как и в [23, 25], достаточно просто получить общее решение задачи. Таким образом, для нахождения точных решений задачи достаточно указать соответствующие решения основного уравнения (2.9).

Пусть

$$\dot{\mu} = f(t) \quad (2.23)$$

с достаточно произвольной функцией $f(t)$. Тогда уравнение (2.9) приобретает вид

$$16(\mu'')^2 f^2 - 4h\mu'^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 . \quad (2.24)$$

Поскольку от переменной t мы перешли к переменной h (2.6), то возникает вопрос: какова возможная функциональная зависимость $f(t)$ от новых переменных.

Исходя из различных предположений можно показать [89], что для любого $\mu(h)$, при $\mu'' \neq 0$, закон изменения массы $\dot{\mu}$ функционально зависит от μ , h и производных μ' , μ'' , и определяется из условия совместности с уравнениями движения самой проблемы (1.1).

Далее, исходя из идей аналитической механики систем с переменными массами [91], массу $\mu(t)$ можно рассматривать как зависящую, в общем случае, кроме времени и от координат и их производных

$$\mu = \mu(\dot{r}, r, t) \quad (2.25)$$

в свете возможного дальнейшего физического обобщения проблемы (1.1) не меняя ее математической формулировки, и далее, учитывая возможную фотогравитационную интерпретацию (2.1), (2.2) проблемы, на $\mu(t)$ и $\dot{\mu}(t)$ можно не накладывать ограничений на функциональную зависимость $\dot{\mu} = f(t)$, так что скорость изменения массы может, в общем случае, зависеть от времени t неявным образом через μ'' , μ' , μ и h ($\mu'' \neq 0$):

$$\dot{\mu} = f(\mu'', \mu', \mu, h) . \quad (2.26)$$

Предлагаемый метод состоит в задании функции $\dot{\mu} = f(\mu'', \mu', \mu, h)$ и определении из уравнения (2.24) решений $r(h)$ и затем $\mu(t)$. И наоборот, задавая возможные зависимости $\mu(h)$ из уравнения (2.24) находим решения $r(t)$ и $\mu(t)$. Решение уравнения (2.24) обратным переходом к исходным переменным дает и решение самой проблемы (1.1). Таким образом, закон $\mu(t)$ будет определяться фактически самими уравнениями движения задачи (1.1).

Рассматриваемый метод основан на замене времени t новой переменной h -квазиинтегралом энергии и везде далее h играет роль параметра, поэтому можно этот метод называть методом с использованием квазиинтеграла энергии в качестве параметра или методом h -параметризации.

Способы решения основного уравнения (2.24) путем задания $\dot{\mu} = f(\mu'', \mu', \mu, h)$ назовем прямым методом, а способы решения уравнения (2.24) путем задания функции $\mu(h)$ или $h(\mu)$ -обратным методом h -параметризации.

2.5. Прямой метод решения основного уравнения

Приведем примеры реализации способа решения уравнения (2.24) путем задания функции $\dot{\mu} = f(\mu'', \mu', \mu, h)$.

Пусть

$$\dot{\mu} = \mu' \dot{h} = \mu' \psi(h, \mu'') . \quad (2.27)$$

Тогда основное уравнение (2.24) принимает вид

$$16\mu''^2 \mu'^2 \psi^2 - 4h\mu'^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 . \quad (2.28)$$

Зададим

$$\psi = \frac{\alpha h^{1/2}}{\mu''} , \quad (2.29)$$

где α – постоянная. Тогда уравнение (2.28) принимает вид

$$4(4\alpha^2 - 1)h\mu'^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 . \quad (2.30)$$

В зависимости от значений α возможны различные случаи.

В случае $\alpha = 1/2$ из (2.30) получим

$$4\mu\mu' + C^2 = 0 \quad (2.31)$$

откуда следует решение

$$\mu = \sqrt{C_1 - \frac{C^2}{2}h} , \quad (2.32)$$

и

$$\dot{h} = \frac{-8h^{1/2} \left(C_1 - \frac{C^2}{2}h \right)^{3/2}}{C^4} , \quad (2.33)$$

где C_1 – постоянная. Зависимость $h(t)$ определяется интегрированием [92] из (2.33), в результате имеем

$$h(t) = \frac{16C_1^3 (t - C_2)^2}{C^2 [C^6 + 8C_1^2 (t - C_2)^2]} , \quad (2.34)$$

где C_2 – постоянная. Подставим (2.34) в (2.32) и получим

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{8C_1}{C^6}t^2 - \frac{16C_1C_2}{C^6}t + \frac{8C_1C_2^2}{C^6} + \frac{1}{C_1}}} . \quad (2.35)$$

Переобозначая постоянные

$$\frac{8C_1}{C^6} = A , \quad -\frac{16C_1C_2}{C^6} = B , \quad \frac{8C_1C_2^2}{C^6} + \frac{1}{C_1} = D , \quad (2.36)$$

причем

$$AD - \frac{B^2}{4} = \frac{A}{C_1} , \quad (2.37)$$

получим

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + D}} \quad (2.38)$$

форму известного случая объединенного закона Мещерского. Формулы (2.32), (2.38) с учетом (2.7), (2.8) позволяют получить общее решение задачи (1.1) в рассмотренном случае.

В общем случае $\alpha \neq 1/2$ основное уравнение приводится к уравнению Абеля первого рода или к уравнению Лагранжа-Даламбера [89]. Решение этих уравнений известно [93] и дальнейшие исследования в этом случае не представляют каких-либо особых затруднений [89].

Рассмотрим другой пример выбора функции $\dot{\mu}$.

Пусть

$$\dot{\mu}^2 = f^2 = \frac{\alpha\mu\mu'}{(\mu^n)^2} , \quad (2.39)$$

где α – постоянная. Тогда основное уравнение (2.9) имеет вид

$$4(4\alpha + 1)\mu\mu' - 4h\mu'^2 + C^2 = 0 . \quad (2.40)$$

В случае $\alpha = -1/4$ получим простое уравнение

$$C^2 = 4h\mu'^2 \quad (2.41)$$

откуда

$$\mu = Ch^{1/2} - \beta , \quad (2.42)$$

где β – новая постоянная.

С помощью (2.39), (2.42) и соотношения

$$\dot{\mu} = \mu' \dot{h} \quad (2.43)$$

получим ($\beta > 0$) [89]:

$$\frac{\sqrt{\frac{\beta}{c} - h^{1/2}}}{h^{1/4}} + \frac{\left(\frac{\beta}{c} - h^{1/2}\right)^{3/2}}{3h^{3/4}} = \gamma - \frac{\beta^2}{\sqrt{2}C^{5/2}} t, \quad (2.44)$$

где γ – постоянная.

Решение (2.42) и (2.44) дает возможность представить массу μ и квазиинтеграл энергии h в функции времени, и возвращаясь с помощью формул (2.39), (2.43), (2.7) и (2.8) к исходным переменным, получаем решение проблемы (1.1) в указанном случае.

Приведенные примеры иллюстрируют прямой метод решения проблемы, состоящий в том, что основное уравнение (2.9) путем задания функции $\dot{\mu} = f(\mu'', \mu', \mu, h)$ различным образом приводится к интегрируемым дифференциальным уравнениям известного типа.

Таким образом, рассмотренный метод h -параметризации можно проиллюстрировать множеством других примеров. Такой подход видимо будет эффективен в тех случаях, когда из каких-либо посылок или дополнительных соображений удастся задать функцию $\dot{\mu}(t)$ в параметрической форме, к примеру через квазиинтеграл энергии либо через другие связанные с ним параметры задачи. Преимуществами прямого метода h -параметризации является его простота и возможность получения строгих решений проблемы для заданной скорости изменения массы $\dot{\mu} = f(\mu'', \mu', \mu, h)$. К числу недостатков указанного метода следует отнести возможную сложность выражений для функций $\mu(t)$ и $h(t)$ в полученных решениях и отсутствие алгоритма нахождения решений с заранее задаваемыми свойствами искомых функций. Эти недостатки в определенной мере можно устранить с помощью обратного метода h -параметризации.

2.6. Обратный метод решения основного уравнения

Рассмотрим обратный метод h -параметризации, который заключается в том, что основное уравнение проблемы (2.9) решается путем задания функциональной связи квазиинтеграла энергии h и массы μ .

Обратимся к исходному уравнению (2.4). Считая $h = h(\mu)$ имеем следующие соотношения

$$h' = -\frac{2}{r}, \quad r = -\frac{2}{h'}, \quad \dot{r} = \frac{2h''}{(h')^2} \dot{\mu}, \quad (2.45)$$

причем штрихи означают дифференцирование по μ . Подставляя (2.45) в (2.4) имеем основное уравнение вида

$$16(h'')^2 \dot{\mu}^2 + C^2(h')^6 + 4\mu(h')^5 - 4h(h')^4 = 0. \quad (2.46)$$

Уравнение (2.46) можно решать различными способами. Рассмотрим решение (2.46) для простого случая степенной зависимости h от μ :

$$h = A\mu^q + B, \quad (2.47)$$

где A , B и q – постоянные. Подстановкой (2.47) в (2.46) получим закон для $\mu(t)$ в дифференциальной форме

$$\dot{\mu}^2 = a\mu^{2q} + b\mu^{3q} + d\mu^{4q-2}, \quad (q \neq 1), \quad (2.48)$$

где a , b и d - постоянные

$$a = \frac{A^2 B q^2}{4(q-1)^2}, \quad b = -\frac{A^3 q^2}{4(q-1)}, \quad d = -\frac{C^2 A^4 q^4}{16(q-1)^2}. \quad (2.49)$$

Законы изменения $\mu(t)$ (2.48), многообразие которых определяется набором постоянных A , B , C и q , являются точными решениями уравнения (2.4) при выполнении соотношений (2.47). Решения задачи в исходных переменных r , θ и времени t получаются с помощью формул (2.45), (2.47) достаточно просто и, как и ранее, не будем их выписывать, ограничиваясь указанием законов $\mu(t)$ (2.48), при выполнении которых мы имеем точные решения проблемы (1.1).

З а м е ч а н и е 3. В зависимости (2.47) и везде далее показатель степени $q \neq 1$. Это означает, что случаи линейной зависимости $h \sim \mu$ и обратно $\mu \sim h$ не рассматриваются. Анализ уравнений движения проблемы (1.1) приводит к следующему выводу: в проблеме Гильдена-Мещерского (1.1) квазиинтеграл энергии h не может быть линейной

функцией массы μ системы. Это свойство присуще задаче (1.1). В противном случае, как это следует из (2.7) и (2.8), а также из (2.45), при $h \sim \mu$ должно быть $r = const$, а из уравнений движения (2.3) видно, что такое возможно только при $\mu = const$. А это свойство кеплеровской задачи, которой не обладает задача Гильдена-Мещерского.

З а м е ч а н и е 4. В законе изменения массы (2.48) коэффициенты содержат постоянные A , B и C – постоянную интеграла площадей. Поэтому, вообще говоря, в закон (2.48) будут входить начальные значения параметров задачи (1.1), однако полагая C – произвольной постоянной, можно рассматривать достаточно произвольными коэффициенты в законе (2.48) изменения массы. Кроме того, в законе (2.48) подбором параметров можно исключить зависимость коэффициентов от начальных условий задачи для некоторых законов изменения массы со временем.

Отметим, что закон (2.48) дает достаточно разнообразный спектр конкретных законов изменения массы со временем. К примеру для значений показателя $q = 2$ и определенных соотношениях коэффициентов a , b и d формула (2.48) дает

$$\dot{\mu} \sim \mu^2, \quad \dot{\mu} \sim \mu^3, \quad \dot{\mu} \sim \sqrt{\alpha\mu^4 + \beta\mu^6} \quad (2.50)$$

известную форму законов Мещерского.

Другие случаи решения основного уравнения в форме (2.9) или (2.46) обратным методом h -параметризации путем задания степенной зависимости h от μ или μ от h подробно рассмотрены в работе [89]. В результате достаточно просто получается дифференциальная форма законов изменения массы со временем, при которых соотношения (2.7) и (2.8) обеспечивают точные решения задачи Гильдена-Мещерского (1.1).

2.7. Случай степенного закона для $\mu(h)$

При исследовании задачи Гильдена-Мещерского (1.1) различными авторами чаще всего рассматривался закон изменения массы в форме закона Эддингтона-Джинса (1.4). Для медленных изменений массы из теории адиабатических инвариантов [94-96] известен инвариант $h \sim \mu^2$. При переходе от времени t к переменной h -квазиинтегралу энергии представляет интерес рассмотреть случай

$$\mu'(h) = \alpha\mu^p, \quad (2.51)$$

где α , p – постоянные, и как и ранее предполагается взаимнообращаемость функций $\mu(h)$ и $h(\mu)$. Штрих означает дифференцирование по h . Зависимость $\mu(h)$ в форме закона Эддингтона-Джинса (2.51) от параметра h дает степенную ($p \neq 1$) и экспоненциальную ($p = 1$) зависимости μ от h . Частным случаем закона (2.51) является адиабатический инвариант $h \sim \mu^2$.

Рассмотрим решения задачи (1.1) при законе $\mu(h)$ (2.51). Из (2.51) получим

$$\mu(h) = [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{1}{1-p}}, \quad p \neq 1 \quad (2.52a)$$

$$\mu(h) = \mu_0 e^{\alpha(h-h_0)}, \quad p = 1 \quad (2.52b)$$

где μ_0 , h_0 – начальные значения μ , h . Причем в формулах (2.51), (2.52) и везде далее $p \neq 0$, то есть, согласно замечанию 3, исключается случай линейной зависимости $\mu(h)$.

Из (2.52) обратно следуют соотношения

$$h = \frac{1}{\alpha(1-p)}(\mu^{1-p} - \mu_0^{1-p}) + h_0, \quad p \neq 1 \quad (2.53a)$$

$$h = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\mu}{\mu_0} + h_0, \quad p = 1 \quad (2.53b)$$

В случае $p \neq 1$ с помощью (2.51) и (2.53a) из основного уравнения

$$16(\mu'')^2 \dot{\mu}^2 - 4h(\mu')^2 + 4\mu\mu' + C^2 = 0 \quad (2.54)$$

получаем дифференциальную форму закона $\dot{\mu}(t)$, соответствующую (2.51) ($p \neq 1$):

$$\dot{\mu}^2 = \frac{1}{(4\alpha^2 p \mu^{2p-1})^2} \left\{ 4\alpha^2 \left[h_0 - \frac{\mu_0^{1-p}}{\alpha(1-p)} \right] \mu^{2p} + 4\alpha \left(\frac{p}{1-p} \right) \mu^{p+1} - C^2 \right\}. \quad (2.55)$$

В частности из (2.55) для $p = -1$ имеем

$$\dot{\mu} = \mp \mu^2 \sqrt{A - B\mu^2}, \quad (2.56)$$

где постоянные A и B имеют вид

$$A = \frac{h_0 - \frac{\mu_0^2}{2\alpha}}{4\alpha^2}, \quad B = \frac{2\alpha + C^2}{16\alpha^4}. \quad (2.57)$$

Закон (2.56) есть дифференциальная форма законов Мещерского. Здесь в постоянные A и B входят начальные условия h_0 , μ_0 , C . Поэтому постоянные A и B можно связывать с начальными условиями задачи или по другому, учитывая произвольность постоянной α , рассматривать как функции произвольной постоянной α .

Закон (2.55) можно представить в виде

$$\dot{\mu}^2 = A_1 \mu^{2(1-p)} + A_2 \mu^{3(1-p)} + A_3 \mu^{2(1-2p)}, \quad (2.58)$$

где

$$A_1 = \frac{\alpha(1-p)h_0 - \mu_0^{1-p}}{4\alpha^3 p^2(1-p)}, \quad A_2 = \frac{1}{4\alpha^3 p(1-p)}, \quad A_3 = -\frac{C^2}{16\alpha^4 p^2}. \quad (2.59)$$

Для случая $p=1$ с помощью (2.51) и (2.53б) из основного уравнения (2.54) получим дифференциальную форму закона $\mu(t)$, соответствующую (2.51):

$$\dot{\mu}^2 = \frac{1}{4\alpha^3} (\ln \mu - \ln \mu_0 + \alpha h_0 - 1) - \frac{C^2}{16\alpha^4 \mu^2}. \quad (2.60)$$

Определим теперь для найденных законов изменения массы (2.55) и (2.60) зависимость квазиинтеграла энергии h от времени t .

Учитывая

$$\dot{\mu} = \alpha \mu^p \dot{h} \quad (2.61)$$

приведем с помощью (2.51) основное уравнение (2.54) к виду

$$16\alpha^6 p^2 \mu^{6p-2} \dot{h}^2 - 4\alpha^2 h \mu^{2p} + 4\alpha \mu^{p+1} + C^2 = 0. \quad (2.62)$$

Подставим в (2.62) $\mu(h)$ определяемым из (2.52а), тогда получим дифференциальную форму закона изменения $h(t)$ со временем:

$$\begin{aligned} \dot{h}^2 = & \frac{1}{4\alpha^4 p^2} h [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{2-4p}{1-p}} - \\ & - \frac{1}{4\alpha^5 p^2} [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{3-5p}{1-p}} - \frac{C^2}{16\alpha^6 p^2} [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{2-6p}{1-p}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Зависимость h от времени t определяется квадратурой

$$\int_{h_0}^h \frac{4\alpha^3 p [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{3p-1}{1-p}} dh}{\sqrt{4\alpha^2 h [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{2p}{1-p}} - 4\alpha [\alpha(1-p)(h-h_0) + \mu_0^{1-p}]^{\frac{p+1}{1-p}} - C^2}} = t - t_0, \quad (2.64)$$

$p \neq 0, 1.$

Для случая $p = 1$ в законе (2.51) основное уравнение с учетом (2.61) приводится к виду

$$16\alpha^6 \mu^4 \dot{h}^2 - 4\alpha^2 h \mu^2 + 4\alpha \mu^2 + C^2 = 0. \quad (2.65)$$

Учитывая формулу $\mu(h)$ (2.52б) для $p=1$, из (2.65) получим

$$\dot{h}^2 = \frac{h e^{-2\alpha(h-h_0)}}{4\alpha^4 \mu_0^2} - \frac{e^{-2\alpha(h-h_0)}}{4\alpha^5 \mu_0^2} - \frac{C^2 e^{-4\alpha(h-h_0)}}{16\alpha^6 \mu_0^4} \quad (2.66)$$

и зависимость h от времени t в этом случае определяется квадратурой

$$\int_{h_0}^h \frac{4\alpha^3 \mu_0^2 e^{2\alpha(h-h_0)} dh}{\sqrt{4\alpha^2 \mu_0^2 h e^{2\alpha(h-h_0)} - 4\alpha \mu_0^2 e^{2\alpha(h-h_0)} - C^2}} = t - t_0. \quad (2.67)$$

Полученные законы изменения массы (2.55) и (2.60) и законы изменения квазиинтеграла энергии $h(t)$, определяемые из (2.64) и (2.67), дают точные решения проблемы (1.1) для этих законов переходом к исходным переменным r , θ и t по формулам (2.7), (2.8) с учетом зависимости $\mu(h)$, согласно формулам (2.52). Особенностью полученных решений является то, что в найденные законы $\mu(t)$ и $h(t)$ в общем случае входят начальные условия - параметры задачи: h_0 , μ_0 , C - начальные значения энергии, массы и величина постоянной площадей. В некоторых случаях можно частично или полностью исключить зависимость $\mu(t)$ от начальных условий задачи. С другой стороны вхождение этих постоянных в закон из-

менения массы $\mu(t)$ наводит на мысль, что определенные законы изменения массы $\mu(t)$ можно регулировать выбором начальных параметров задачи: h_0 , μ_0 , C . Полученные результаты свидетельствуют еще раз о тесной связи закона изменения массы $\mu(t)$ с исходными уравнениями движения (1.1) проблемы Гильдена-Мещерского.

2.8. Периодический закон изменения массы

Рассмотрим интересный частный случай закона (2.51) при значении показателя $p = 1/3$. Из (2.55) получим

$$\dot{\mu}^2 = \frac{9}{16\alpha^4} \mu^{\frac{2}{3}} \left[2\alpha\mu^{\frac{4}{3}} + 4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) \mu^{\frac{2}{3}} - C^2 \right]. \quad (2.68)$$

Заменой переменной

$$x = \mu^{\frac{2}{3}}, \quad (2.69)$$

интегрируя (2.68) получим

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2\alpha x^2 + 4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) x - C^2}} = \frac{(t - t_0)}{2\alpha^2}, \quad (2.70)$$

где $x_0 = \mu_0^{\frac{2}{3}}$ – нижний предел интегрирования.

При условиях

$$\alpha < 0, \quad \left[4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) \right]^2 > -8\alpha C^2, \quad (2.71)$$

интегрирование (2.70) дает

$$\arcsin \frac{4\alpha x + 4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right)}{\left\{ \left[4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) \right]^2 + 8\alpha C^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(t - \beta)}{\sqrt{-2\alpha^3}}, \quad (2.72)$$

где

$$\beta = t_0 + \sqrt{-2\alpha^3} \arcsin \frac{2\alpha \left(2\alpha h_0 - \mu_0^{\frac{2}{3}} \right)}{\left\{ \left[4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) \right]^2 + 8\alpha C^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} . \quad (2.73)$$

Переходя обратно к переменной μ по формуле (2.69) из (2.72) получим

$$\mu^{\frac{2}{3}} = A + B \sin(at + b) , \quad (2.74)$$

где постоянные A , B , a и b определяются из соотношений

$$\begin{aligned} A &= -\alpha \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) , \\ B &= -\frac{\left\{ \left[4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{\frac{2}{3}} \right) \right]^2 + 8\alpha C^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{4\alpha} , \\ a &= \frac{1}{\sqrt{-2\alpha^3}} , \\ b &= -\frac{1}{\sqrt{-2\alpha^3}} \beta , \end{aligned} \quad (2.75)$$

где постоянная β определяется формулой (2.73).

Таким образом, найден периодический закон (2.74) для $\mu(t)$ [97], при выполнении которого задача (1.1) имеет точные решения. Эти решения нетрудно представить в исходных переменных r , θ и t с помощью формул (2.51), (2.52), в которых нужно положить $p = 1/3$, и формул (2.7) и (2.8).

Период решения $\mu(t)$ (2.74) имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{-2\alpha^3} \quad (2.76)$$

и его значение определяется величиной коэффициента α закона изменения $\mu(h)$ (2.51), имеющего в нашем случае вид

$$\mu'(h) = \alpha \mu^{1/3}, \quad \alpha < 0. \quad (2.77)$$

Отметим, что на коэффициенты A и B в законе (2.74) должны накладываться условия, дополнительно к условиям (2.71), обеспечивающие вещественность массы $\mu(t)$:

$$A = -\alpha \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{2/3} \right) > 0, \quad (2.78)$$

$$A > B. \quad (2.79)$$

Первое условие (2.78) дает

$$\alpha < 0, \quad h_0 > \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{2/3}, \quad (2.80)$$

величину нижнего предела начального значения h_0 квазиинтеграла энергии, определяемого величиной α и начальным значением массы μ_0 . Второе условие (2.79) выполняется при $\alpha < 0$, так как из (2.75) следует

$$B = \sqrt{A^2 + \frac{C^2}{2\alpha}} < A, \quad \alpha < 0. \quad (2.81)$$

Таким образом, условия (2.80) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы масса $\mu(t)$, представляемая законом (2.74), была вещественной.

Из (2.77) следует явная зависимость $\mu(h)$:

$$\mu^{2/3}(h) = \frac{2}{3} \alpha (h - h_0) + \mu_0^{2/3}. \quad (2.82)$$

Зависимость $\mu(t)$ (2.74) позволяет теперь просто найти из (2.82) зависимость $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\alpha} A + \frac{3}{2\alpha} B \sin(at + b), \quad (2.83)$$

где A , B , a и b – постоянные, определяемые формулами (2.75). Квазиинтеграл энергии $h(t)$ (2.83) есть периодическая функция с периодом (2.76).

Интересно отметить, что $h(t)$, при условиях (2.80) на параметры задачи, вообще говоря функция знакопеременная : в течение периода $h(t)$ может изменить знак с отрицательной величины на положительную и наоборот. Можно указать условия, при которых квазиинтеграл энергии $h(t)$ будет всегда величиной отрицательной или знакопеременной, то есть определить критерии связанного состояния либо состояния распада системы.

Действительно, условие отрицательности квазиинтеграла энергии

$$h(t) \leq 0 \quad (2.84)$$

при выполнении условий (2.80) приводит к дополнительному условию

$$h_0 \leq -\frac{3C}{4\alpha\sqrt{-\alpha}} + \frac{3\mu_0^{2/3}}{2\alpha}, \quad (2.85)$$

и, кроме того, для выполнения (2.84) необходимо выполнение условия

$$h_0 \leq 0 \quad (2.86)$$

для начального значения h_0 .

В результате получим, с учетом (2.80), условие

$$\frac{3}{2\alpha}\mu_0^{2/3} < h_0 \leq \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{2/3} - \frac{3C}{4\alpha\sqrt{-\alpha}} \leq 0. \quad (2.87)$$

Условие (2.87) есть критерий связанного состояния системы : $h(t) \leq 0$, квазиинтеграл энергии h , определяемый законом (2.83) и начальными параметрами задачи – h_0 , μ_0 , C и α всегда удовлетворяют неравенству (2.84).

Укажем критерий перехода системы в состояние с положительной энергией

$$h(t) > 0. \quad (2.88)$$

Для этого, при условиях (2.80), достаточно выполнения условия

$$h_0 > \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{2/3} - \frac{3C}{4\alpha\sqrt{-\alpha}}. \quad (2.89)$$

В результате условия (2.80) и (2.89) дают

$$\alpha < 0, h_0 > \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{2/3} - \frac{3C}{4\alpha\sqrt{-\alpha}} \quad (2.90)$$

критерий перехода системы в состояние распада: $h(t) > 0$ для закона (2.83) и начальных параметров задачи – h_0 , μ_0 , C и α .

Выше изложенные результаты позволяют сформулировать следующие теоремы:

Т е о р е м а 2.1. Пусть масса системы меняется по закону (2.74) и выполняются начальные условия (2.87), тогда система будет всегда находиться в связанном состоянии с отрицательной энергией $h(t) \leq 0$.

Т е о р е м а 2.2. Пусть масса системы меняется по закону (2.74) и выполняются начальные условия (2.90), тогда система, даже будучи в начальный момент t_0 в состоянии с $h_0 \leq 0$, переходит в состояние с положительной энергией $h(t) > 0$.

Далее, рассмотрим правую часть неравенства (2.87). Из него следует, что для того, чтобы начальное значение $h_0 \leq 0$, должно выполняться неравенство

$$C \leq 2\sqrt{-\alpha} \mu_0^{2/3} \quad (2.91)$$

и, учитывая выражение (2.76) для периода T , получим

$$C \leq \sqrt{2} \left(\frac{\mu_0^2 T}{\pi} \right)^{1/3} \quad (2.92)$$

ограничение для значения C -постоянной интеграла площадей, определяемое величиной начального значения массы μ_0 и периодом T изменения массы.

При отсутствии верхней границы для значения C (2.91) начальное значение h_0 может принимать значение $h_0 > 0$. При этом верхняя граница значений C определяется из (2.90).

Отсюда следует:

Т е о р е м а 2.3. Пусть система, масса которой меняется по закону (2.74), всегда находится в связанном состоянии с отрицательной энергией $h(t) \leq 0$, тогда постоянная интеграла площадей C имеет верхнюю границу (2.91), определяемую начальным значением массы μ_0 системы и периодом T изменения массы.

Т е о р е м а 2.4. Система может находиться в состоянии с положительной энергией $h(t) > 0$, если выполняется одно из следующих условий:

1. Постоянная интеграла площадей C имеет верхнюю границу, определяемую из (2.90) и $h_0 < 0$;

2. Постоянная интеграла площадей C имеет верхний предел (2.91) и $h_0 > 0$;

3. Постоянная интеграла площадей C имеет верхнюю границу, определяемую из (2.90), нижний предел, определяемый правой частью (2.91) и $h_0 > 0$.

Результаты теоремы 2.4 следуют из (2.90) и (2.91).

Таким образом, для двойной системы с законами изменения массы $\mu(t)$ (2.74) и квазиинтеграла энергии $h(t)$ (2.83) можно достаточно просто указать некоторые качественные характеристики движения.

Определим теперь траектории движения системы с переменной массой $\mu(t)$ (2.74). Для этого из (2.7) и (2.77) имеем

$$r = -2\alpha\mu^{1/3}, \quad \alpha < 0. \quad (2.93)$$

Затем используя интеграл площадей

$$d\theta = \frac{Cdt}{r^2}, \quad (2.94)$$

учитывая (2.93) и (2.68), получим

$$\int_{t_0}^t \frac{Cd\mu}{3\mu\sqrt{4\alpha^2\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{2/3}\right)\mu^{2/3} + 2\alpha\mu^{4/3} - C^2}} = \theta - \theta_0. \quad (2.95)$$

При условиях (2.71) интегрирование (2.95) дает [89]:

$$\mu^{2/3} = \frac{C^2}{-2\alpha[A - B\sin 2(\theta - \theta_0)]}, \quad (2.96)$$

где A и B – постоянные, определяемые соотношениями (2.75).

Из (2.82) и (2.96) следует зависимость $h(\theta)$ вида

$$h = h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{2/3} - \frac{3C^2}{4\alpha^2[A - B\sin 2(\theta - \theta_0)]}. \quad (2.97)$$

С помощью (2.93) получим траекторию движения – эллипс с центром в начале координат:

$$r^2 = \frac{-2C^2\alpha}{A - B \sin 2(\theta - \theta_0)} . \quad (2.98)$$

Траекторию (2.98) можно представить в виде

$$r^2 = \frac{\tilde{p}}{1 + e \cos(2\theta - \omega)} , \quad (2.99)$$

где

$$\tilde{p} = \frac{2C^2}{\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{2/3}\right)} , \quad (2.100)$$

$$e = \frac{\sqrt{\left[4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{2/3}\right)\right]^2 + 8\alpha C^2}}{4\alpha^2 \left(h_0 - \frac{3}{2\alpha} \mu_0^{2/3}\right)} , \quad (2.101)$$

$$\omega = 2\theta_0 - \frac{\pi}{2} . \quad (2.102)$$

Выберем отсчет угла θ от линии узлов в направлении от восходящего узла орбиты, тогда угол θ будет играть роль аргумента широты, а угол $v = 2\theta - \omega$ – роль истинной аномалии. Эти угловые характеристики орбиты (2.99) будут являться аналогами соответствующих угловых характеристик кеплеровской задачи.

Траекторию движения (2.99) и постоянные \tilde{p} , e и ω – элементы орбиты (2.99) можно интерпретировать следующим образом: квадрат радиус-вектора $r^2 = R$ системы описывает коническое сечение

$$R = \frac{\tilde{p}}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (2.103)$$

с параметром \tilde{p} , эксцентриситетом e и угловым расстоянием перицентра от узла

$$\bar{\omega} = \omega - \theta , \quad (2.104)$$

то есть траектория (2.99) для r^2 представляет коническое сечение с меняющейся линейно по углу θ линией апсид. Период движения $T_{orb.} = T$, как это видно из (2.99) и (2.96).

Отметим, что угловое расстояние перицентра от узла $\bar{\omega}(\theta)$ - функция угла θ , а прохождение через перицентр ($v = 0$) происходит для фиксированного значения угла

$$\theta(\tau) = \theta_0 - \frac{\pi}{4} , \quad (2.105)$$

где τ – момент прохождения через перицентр орбиты.

Положение плоскости орбиты в пространстве можно определить, как и в кеплеровской задаче, элементами Ω и i – соответственно долготой восходящего узла и наклонностью орбиты. Форма орбиты характеризуется эксцентриситетом e (2.101), размеры орбиты определяются величиной параметра \tilde{p} (2.100), положение линии апсид определяется переменной величиной $\bar{\omega}(\theta)$ и может быть охарактеризовано в силу (2.104) элементом ω – аналогом углового расстояния перицентра от узла.

Шестой динамический элемент τ – момент прохождения через перицентр орбиты можно ввести аналогично кеплеровской задаче. Из интеграла площадей (2.94), учитывая (2.99), получим

$$\int_0^v \frac{\tilde{p} dv}{2(1 + e \cos v)} = C(t - \tau) , \quad (2.106)$$

где $v = 2\theta - \omega$, τ – момент времени, когда $v = 0$, момент прохождения перицентра орбиты. Это уравнение определяет t как функцию v , а разрешая ее относительно v найдем

$$v = v(t - \tau) , \quad (2.107)$$

откуда вычислим v для каждого значения t , и затем зная v определим r по формуле (2.99).

Для случая $e < 1$ из (2.106) получим [92] соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \left[\frac{C\sqrt{1-e^2}}{\tilde{p}} (t - \tau) \right] , \quad (2.108)$$

связывающее v со временем t .

Связь угла θ со временем t и динамического элемента τ с начальными условиями задачи можно получить достаточно просто другим путем из выражений (2.96) и (2.74):

$$A + B \sin(at + b) = \frac{-C^2}{2\alpha[A - B \sin 2(\theta - \theta_0)]}. \quad (2.109)$$

Из условий

$$v = 0, \quad 2(\theta - \theta_0) = -\frac{\pi}{2}, \quad t = \tau \quad (2.110)$$

получим с помощью (2.109)

$$\tau = \frac{1}{a} \arcsin \left[\frac{-C^2}{2\alpha(A+B)B} - \frac{A}{B} \right] + \beta, \quad (2.111)$$

и, учитывая выражения для элементов \tilde{p} , e по формулам (2.100) и (2.101), имеем

$$\tau = t_0 + \sqrt{-2\alpha^3} \left\{ \arcsin \frac{1}{e} \left[\frac{-\tilde{p}^2}{8\alpha^3 C^2 (1+e)} - 1 \right] + \arcsin \frac{1}{e} \left(1 + \frac{\tilde{p} \mu_0^{2/3}}{2C^2 \alpha} \right) \right\}. \quad (2.112)$$

Таким образом, орбита (2.99) характеризуется шестью элементами:

$$\Omega, \quad i, \quad \tilde{p}, \quad e, \quad \omega, \quad \tau, \quad (2.113)$$

являющимися аналогами кеплеровских элементов.

Укажем теперь свойства движений в рассматриваемом случае, связанные с процессами распада и захвата в системе.

Отметим, что из условия (2.89) положительности квазиинтеграла энергии $h(t)$ следует неравенство

$$e > \frac{1}{3} \quad (2.114)$$

для эксцентриситета орбиты (2.99). Следовательно, условие (2.114) есть необходимое условие для того, чтобы произошел распад системы.

В состоянии с положительной энергией $h(t) > 0$ система может находиться:

а) при переходе из состояния с $h(t) < 0$, $h_0 < 0$ в состояние с $h(t) > 0$ в результате распада системы;

б) при переходе из состояния с $h(t) > 0$, $h_0 > 0$ в состояние с $h(t) < 0$ в результате захвата, но захват обязательно сопровождается последующим

переходом снова в состояние с положительной энергией $h(t) > 0$, и следовательно система, в частности, может перейти в состояние распада.

Из законов для $\mu(t)$ (2.74) и для $h(t)$ (2.83) видно, что увеличение массы системы сопровождается уменьшением энергии, и наоборот убыль массы приводит к росту энергии системы. Следовательно, распад системы характеризуется ростом энергии при убыли массы, а захват – убылью энергии при росте массы.

Дадим оценку времени распада и захвата в системе. Это можно сделать различными путями. Проще всего сделать оценку исходя из закона (2.83). Пусть система из начального состояния $h_0 < 0$ переходит в состояние с $h(t) > 0$, тогда время распада системы определяется формулой

$$\Delta t = \frac{1}{a} \left[\arcsin \frac{A - \mu_0^{2/3}}{B} - \arcsin \frac{A}{3B} \right], \quad (2.115)$$

где A , B и a – постоянные, определяемые через начальные условия задачи формулами (2.75) при $h_0 < 0$, причем

$$\frac{3\mu_0^{2/3}}{2\alpha} - \frac{3C}{4\alpha\sqrt{-\alpha}} < h_0 < 0, \quad C < \sqrt{2} \left(\frac{\mu_0^2 T}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (2.116)$$

Пусть система из начального состояния $h_0 > 0$ переходит в состояние с $h(t) < 0$, тогда время захвата определяется формулой (2.115), в которой числовые значения постоянных A , B и a даются формулами (2.75) для начального значения $h_0 > 0$, при выполнении условий

$$h_0 > \frac{3\mu_0^{2/3}}{2\alpha} - \frac{3C}{4\alpha\sqrt{-\alpha}} > 0, \quad C > \sqrt{2} \left(\frac{\mu_0^2 T}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (2.117)$$

Отметим, что задавая начальные условия и параметры задачи – h_0 , μ_0 , α и C с помощью формул (2.115) и (2.75) можно весьма просто оценить времена захвата и распада системы и тем самым определить области параметров, в которых может преобладать процесс захвата или распада системы. Такие оценки интересны в плане прогнозирования качественных особенностей движения в двойной системе с переменной массой (2.74).

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО

3.1. Введение

Задача Гильдена-Мещерского является базовой при исследовании движения тел переменной массы под действием сил ньютоновского притяжения. Другие известные формулировки задачи двух тел переменной массы в форме задачи Мещерского-Леви-Чивита и объединенной задачи Гильдена-Мещерского и Мещерского-Леви-Чивита и дальнейшие обобщения нестационарной задачи двух тел [63, 73] отражают отличие физических процессов изменения массы и характера взаимодействия гравитирующих тел, и в ряде случаев математически эквивалентная форма уравнений движения этих задач может быть получена из уравнений движения задачи Гильдена-Мещерского путем преобразования Мещерского [22] или, в более общем случае, преобразования Куммера-Лиувилля [72]. Это означает, что результаты исследований по задаче Гильдена-Мещерского могут путем пространственно-временных преобразований дать достаточно просто соответствующие результаты по задаче двух тел переменной массы в ее различных формулировках. Исследование обобщенной задачи двух тел переменной массы на основе результатов исследования задачи Гильдена-Мещерского проводилось, например, в работах [25, 65, 73, 98]. Таким образом, для проблем небесной механики тел переменной массы важное значение имеет исследование в первую очередь задачи двух тел переменной массы в формулировке Гильдена-Мещерского.

Исследование задачи Гильдена-Мещерского проводилось в различных направлениях. До сих пор известны ее интегрируемые случаи лишь для определенных законов изменения массы взаимодействующих тел со временем, поэтому возрастает роль параметрических решений задачи [71, 99], где основные закономерности движения можно описать в параметрическом виде, как правило с помощью угловых переменных. Здесь возможны различные методы параметрического описания общих решений задачи Гильдена-Мещерского, основанные на использовании уравнения Бине и его специальных преобразованиях и геометрических свойств вектора Лапласа [1, 70, 71, 99, 100]. Непосредственно к параметрическому описанию приводит, например, нестационарная фотогравитационная задача двух тел в форме Гильдена-Мещерского, где $\mu(t)$ – пере-

менный параметр фотогравитационного поля изменяется так, что скорость его изменения пропорциональна r^{-2} (r – полярный радиус-вектор) и представляется в виде $\mu(\theta)$ – линейной функции угловой переменной – полярного угла θ [101, 102]. В случае закона излучения Мартина-Чиара [87]

$$\dot{\mu} = \alpha\mu^n\dot{\theta} \quad (3.1)$$

имеем более общую параметрическую зависимость $\mu(\theta)$. Закон (3.1) в виде $\dot{\mu} \sim r^{-2}$ может применяться к случаю кометного движения, и возможны модификации (3.1), когда редукция массы принимается зависящей не только от расстояния r , но и от орбитальной скорости v по закону $\dot{\mu} \sim vr^{-2}$ [6, 101]. Таким образом, представление $\mu(\theta)$ может иметь непосредственный интерес в различных приложениях задачи Гильдена-Мещерского.

Закон (3.1) дает степенную зависимость ($n \neq 1$) и экспоненциальную зависимость ($n = 1$) гравитационного фактора μ от угла θ . Можно рассмотреть зависимость $\mu(\theta)$ более общую нежели (3.1). Такой подход может быть перспективным в смысле нахождения и использования готовых параметрических решений задачи Гильдена-Мещерского для изучения движения с помощью угловых переменных при изменении фактора $\mu(\theta)$ по закону (3.1) и его обобщениям. Пример применения нестационарной фотогравитационной задачи двух тел в теории космического полета с солнечным парусом [101, 102], учитывающий переменность гравитационного фактора $\mu(\theta)$ показывает актуальность дальнейшего поиска новых параметрических решений задачи Гильдена-Мещерского. Можно надеяться, что новые параметрические решения задачи Гильдена-Мещерского [103] внесут дополнительные сведения по свойствам движения самой задачи и найдут применение в различных задачах астрономии, в которых необходим учет зависимости массы небесных тел от времени в процессе эволюции.

3.2. Уравнения движения и параметризация задачи

Уравнения движения задачи Гильдена-Мещерского могут быть представлены в полярных координатах r и θ относительного движения, как показано выше, в виде

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{\mu(t)}{r^2} = 0, \quad r^2\dot{\theta} = C. \quad (3.2)$$

Уравнения движения (3.2) могут описывать случай задачи Гильдена-Мещерского применительно к движению в нестационарном фотогравитационном поле с гравитационным параметром $\mu(t)$. Здесь переменность $\mu(t)$ может определяться, как отмечено выше, переменностью коэффициентов редукции взаимодействующих и излучающих тел или переменностью масс тел, либо совместными факторами переменности как коэффициентов редукции, так и масс тел. Частные случаи таких ситуаций рассмотрены, например, в работах [80, 81, 101, 102], а в работе [77] сформулирована задача Гильдена-Мещерского-Радзиевского, объединяющая задачу Гильдена-Мещерского и фотогравитационную задачу двух тел Радзиевского [76], и являющаяся нестационарной фотогравитационной задачей двух тел [89], где рассматривается наиболее общий случай переменного параметра $\mu(t)$.

Далее будем рассматривать задачу Гильдена-Мещерского (3.2) с параметром $\mu(t)$, переменность которого может быть обусловлена различными физическими причинами, подобными указанным выше, и, как и в фотогравитационной задаче, $\mu(t)$ может быть выражена в виде функции угла $\mu(\theta)$. Отметим, что в общем случае, в отличие от классической задачи Гильдена-Мещерского, $\mu(t)$ и, соответственно $\mu(\theta)$, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Учет физических процессов, приводящих к различному выбору $\mu(\theta)$, дает возможность практического применения результатов исследования, проведенных ранее в этом направлении [1, 70, 71] и стимулирует поиск новых параметрических решений.

Рассмотрим представление функции $\mu(t)$ в виде функции $\mu(\theta)$ следующим образом. Введем параметр τ , такой что $\mu = \mu(\tau)$, а τ подчиняется закону Мартина-Чиара (3.1):

$$\dot{\tau} = \alpha \tau^n \dot{\theta}, \quad (3.3)$$

в частности при $\mu \equiv \tau$, приходим к закону (3.1) для $\mu(\theta)$. Выбор (3.3) обусловлен возможностью регулирования переменности $\mu(t)$ параметром τ , определяемым различными физическими процессами, изменяющимися со временем по закону (3.3) Мартина-Чиара. Например, в нестационарной фотогравитационной задаче двух тел роль параметра τ может играть ε – коэффициент отражения паруса под действием космической среды, либо парусность A/m [101, 104].

Итак, рассмотрим задачу Гильдена-Мещерского (3.2) с переменной “массой” $\mu(\tau)$, где параметр τ подчиняется закону (3.3). При каких

законах $\mu(\tau)$ задача (3.2), (3.3) допускает строгие решения? Ниже рассмотрим случаи, когда уравнения движения (3.2) приводятся к линейному виду и допускают достаточно простые решения, определяемые через бесселевы функции [103].

3.3. Линеаризация уравнений движения

В уравнениях движения (3.2) перейдем к новым переменным ρ и τ вместо r и t по формулам преобразования

$$r = \tau^p \rho^{-1}(\tau), \quad d\tau = B\tau^q \rho^2 dt \quad (3.4)$$

где B , p и q – постоянные. Используя интеграл площадей задачи $r^2 \dot{\theta} = C$, из (3.3) и (3.4) получим

$$d\tau = \alpha C \tau^{n-2p} \rho^2 dt, \quad (3.5)$$

откуда следуют соотношения для постоянных B , p и q в преобразовании (3.4):

$$B = \alpha C, \quad 2p + q = n. \quad (3.6)$$

При выполнении соотношений (3.6) преобразование (3.4) обеспечивает переход от времени t к переменной τ , меняющейся согласно закону Мартина-Чиара (3.3).

В результате преобразования (3.4) уравнения движения (3.2) принимают вид:

$$\tau^2 \rho'' + q\tau\rho' + \left[\frac{C^2}{B^2 \tau^{2(2p+q-1)}} - p(p+q-1) \right] \rho - \frac{\mu}{B^2 \tau^{3p+2q-2}} = 0. \quad (3.7)$$

$$\tau^{2p+q} \theta' = \frac{C}{B}, \quad (') = d/d\tau.$$

Второе уравнение системы (3.7) фактически отражает закон (3.3) и определяет связь функции $\tau(\theta)$, поэтому решение задачи сводится к решению первого уравнения системы (3.7), определяющего функцию $\rho(\tau)$.

Первое уравнение системы (3.7) с помощью (3.6) приводится к виду

$$\tau^2 \rho'' + (n-2p)\tau\rho' + \left[\frac{1}{\alpha^2 \tau^{2(n-1)}} - p(n-1-p) \right] \rho - \frac{\mu}{\alpha^2 C^2 \tau^{2(n-1)-p}} = 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, заменой переменных (3.4) уравнения движения задачи (3.2) приводятся к виду (3.7) или к линейному дифференциальному уравнению второго порядка (3.8) для определения $\rho(\tau)$.

3.4. Случай линейного однородного уравнения

Положим

$$\rho = y + y_0 , \quad (3.9)$$

где y_0 – постоянная, тогда, подставив (3.9) в (3.7), при условии

$$\mu = y_0 \left[\frac{C^2}{\tau^p} - B^2 p(p+q-1) \tau^{3p+2q-2} \right] , \quad (3.10)$$

для определения функции y имеем уравнение

$$\tau^2 y'' + q \tau y' + \left[\frac{C^2}{B^2 \tau^{4p+2q-2}} - p(p+q-1) \right] y = 0 . \quad (3.11)$$

С учетом соотношений (3.6) получим

$$\tau^2 y'' + (n-2p) \tau y' + \left[\frac{1}{\alpha^2 \tau^{2(n-1)}} - p(n-1-p) \right] y = 0 , \quad (3.12a)$$

$$\mu = y_0 \left[\frac{C^2}{\tau^p} - \alpha^2 C^2 p(n-1-p) \tau^{2(n-1)-p} \right] , \quad (3.12б)$$

полагая $y_0 = \mu_0 / C^2$, получим закон $\mu(\tau)$ (3.12б) в виде

$$\mu = \mu_0 \left[\tau^{-p} - \alpha^2 p(n-1-p) \tau^{2(n-1)-p} \right] . \quad (3.13)$$

Уравнение (3.11) или в форме (3.12a) есть уравнение родственное уравнению Бесселя и его решения хорошо изучены.

3.5. Случай $n = 0$. Уравнение Бесселя

Пусть выполняются условия

$$2p+q = n = 0 , \quad \alpha = 1 , \quad d\theta / d\tau = 1 . \quad (3.14)$$

В этом случае параметр τ есть линейная функция угла θ . Тогда уравнения (3.11) и (3.13) имеют вид

$$\tau^2 y'' + q\tau y' + \left[\tau^2 + \frac{q(q-2)}{4} \right] y = 0, \quad (3.15a)$$

$$\mu = \mu_0 \left[1 + \frac{q(q-2)}{4} \tau^{-2} \right] \tau^{q/2}. \quad (3.15b)$$

Решение уравнения (3.15a) известно [93]:

$$y = \tau^{\frac{1-q}{2}} Z_\nu(\tau), \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad (3.16)$$

где Z_ν – цилиндрическая функция

$$Z_{1/2}(\tau) = \tau^{-1/2} (C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau). \quad (3.16a)$$

Учитывая формулы (3.4), (3.9) и (3.16), получим решение задачи

$$r = \frac{\tau^{-q/2}}{\frac{\mu_0}{C^2} + \tau^{-q/2} C_3 \cos(\tau + C_4)}, \quad (3.17a)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau^q \left[\frac{\mu_0}{C^2} + \tau^{-q/2} C_3 \cos(\tau + C_4) \right]^2} = C(t - t_0), \quad (3.17b)$$

$$\mu = \mu_0 \tau^{q/2} \left[1 + \frac{q(q-2)}{4} \tau^{-2} \right]. \quad (3.17b)$$

Формулы (3.17) дают параметрическое решение задачи в случае $n = 0$ для закона (3.3) изменения параметра τ . Связь параметра $\tau(\theta)$ со временем t определяется квадратурой (3.17б). Орбита (3.17а) при законе изменения массы μ (3.17в) фактически отображает движение по эволюционирующему эллипсу с переменным параметром и эксцентриситетом.

3.6. Случай $n = 1$. Уравнение Эйлера.

Пусть

$$2p + q = n = 1, \quad (3.18)$$

тогда уравнение (3.11) приводится к виду уравнения Эйлера [93]:

$$\tau^2 y'' + q\tau y' + \left[\frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right] y = 0 \quad (3.19)$$

и закон (3.10) имеет вид

$$\mu = y_0 \alpha^2 C^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right] \tau^{\frac{1-q}{2}}. \quad (3.20)$$

При том же условии (3.18) уравнения (3.12) дают ту же эквивалентную (3.19) и (3.20) форму

$$\tau^2 y'' + (1-2p)\tau y' + \left[\frac{1}{\alpha^2} + p^2 \right] y = 0, \quad (3.21a)$$

$$\mu = \mu_0 [1 + \alpha^2 p^2] \tau^{-p}. \quad (3.21b)$$

Решения уравнения Эйлера (3.19) имеют вид:

$$y = \tau^{\frac{1-q}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{1}{\alpha} \ln \tau \right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\alpha} \ln \tau \right) \right] \quad (3.22)$$

или

$$y = \tau^{\frac{1-q}{2}} C_3 \cos\left(\frac{1}{\alpha} \ln \tau + C_4 \right). \quad (3.22a)$$

Учитывая (3.4), (3.9) и (3.22) получим решение задачи

$$r = \frac{\tau^{\frac{1-q}{2}}}{\frac{\mu_0}{C^2} + \tau^{\frac{1-q}{2}} C_3 \cos\left(\frac{1}{\alpha} \ln \tau + C_4 \right)}, \quad (3.23)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau^q \left[\frac{\mu_0}{C^2} + \tau^{\frac{1-q}{2}} C_3 \cos\left(\frac{1}{\alpha} \ln \tau + C_4\right) \right]^2} = \alpha C(t - t_0). \quad (3.24)$$

Из закона (3.3) для случая $n=1$ следует

$$\tau = \tau_0 \exp[\alpha(\theta - \theta_0)]. \quad (3.25)$$

Используя (3.25) представим решение (3.23), (3.24) в функции угла θ :

$$r = \frac{\tau_0^p \exp[p\alpha(\theta - \theta_0)]}{\frac{\mu_0}{C^2} + \tau_0^p \exp[p\alpha(\theta - \theta_0)] C_3 \cos(\theta - \omega)}, \quad (3.26)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau_0^{1-q} \exp[(1-q)\alpha(\theta - \theta_0)] d\theta}{\left\{ \frac{\mu_0}{C^2} + \tau_0^{\frac{1-q}{2}} \exp\left[\frac{1-q}{2}\alpha(\theta - \theta_0)\right] C_3 \cos(\theta - \omega) \right\}^2} = C(t - t_0), \quad (3.27)$$

где введена новая постоянная

$$\omega = \theta_0 - \frac{1}{\alpha} \ln \tau_0 - C_4. \quad (3.28)$$

Орбиту (3.26) можно представить в другом виде. Из (3.20) имеем

$$\tau^{\frac{1-q}{2}} = \frac{\mu_0 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right]}{\mu}. \quad (3.29)$$

Подставив (3.29) в (3.23) и учитывая (3.25) получаем

$$r = \frac{\mu_0 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right]}{\mu \left\{ \frac{\mu_0}{C^2} + \frac{\mu_0 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right]}{\mu} C_3 \cos(\theta - \omega) \right\}}. \quad (3.30)$$

Обозначим

$$\frac{C^2 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right]}{\mu} = \tilde{p} , \quad \frac{C^2 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 \right]}{\mu} C_3 = e , \quad (3.31)$$

тогда получим

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + e \cos(\theta - \omega)} . \quad (3.32)$$

Орбита (3.32) есть эволюционирующий эллипс с переменными параметром \tilde{p} и эксцентриситетом e , определяемыми формулами (3.31), причем для орбиты (3.32) имеем инварианты

$$\omega = const , \quad e\mu = const , \quad \tilde{p}\mu = const , \quad \frac{e}{\tilde{p}} = const . \quad (3.33)$$

Третий инвариант отражает свойство изотропного излучения, не нарушающего центральность силы, в задаче Гильдена-Мещерского. Первые два инварианта указаны в работе [87], причем второй инвариант выведен Л. Чиара и В.В. Радзиевским и Л.П. Сурковой разными путями [87].

3.7. Случай $n = 2$. Уравнение типа уравнения Бесселя

Пусть выполняются условия

$$q = 0 , \quad p = 1 , \quad n = 2 , \quad (3.34)$$

тогда уравнение (3.11) имеет вид

$$y'' + \frac{1}{\alpha^2 \tau^4} y = 0 . \quad (3.35)$$

Это уравнение родственное уравнению Бесселя [93]. Подстановка

$$y(\tau) = \tau \eta(\xi) , \quad \xi = \frac{1}{\tau} \quad (3.35a)$$

приводит уравнение (3.35) к виду

$$\eta'' + \frac{1}{\alpha^2} \eta = 0 , \quad (3.36)$$

решение которого

$$\eta(\xi) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\alpha}\xi + C_2\right), \quad (3.37)$$

тогда

$$y = \tau C_1 \cos\left(\frac{1}{\alpha\tau} + C_2\right). \quad (3.37a)$$

Решение задачи можно представить в виде

$$r = \frac{\tau}{\frac{\mu_0}{C^2} + \tau C_1 \cos(\theta - \omega)}, \quad (3.38a)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\left[\frac{\mu_0}{C^2} + \tau C_1 \cos\left(\frac{1}{\alpha\tau} + C_2\right)\right]^2} = \alpha C(t - t_0), \quad (3.38б)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{\tau}, \quad (3.38в)$$

где

$$\omega = \theta_0 + \frac{1}{\alpha\tau_0} + C_2. \quad (3.39)$$

Из (3.3) для случая $n = 2$ имеем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} - \alpha(\theta - \theta_0), \quad (3.40)$$

тогда решение (3.38) можно представить следующим образом

$$r = \frac{1}{\frac{\mu_0}{C^2} \left[\frac{1}{\tau_0} - \alpha(\theta - \theta_0) \right] + C_1 \cos(\theta - \omega)}, \quad (3.41a)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left\{ \frac{\mu_0}{C^2} \left[\frac{1}{\tau_0} - \alpha(\theta - \theta_0) \right] + C_1 \cos(\theta - \omega) \right\}^2} = C(t - t_0), \quad (3.41б)$$

$$\mu = \mu_0 \left[\frac{1}{\tau_0} - \alpha(\theta - \theta_0) \right]. \quad (3.41в)$$

Решение (3.41a) можно записать в виде

$$r = \frac{C^2}{\mu \left[1 + \frac{C^2}{\mu} C_1 \cos(\theta - \omega) \right]}, \quad (3.42)$$

где μ определяется формулой (3.41в). Орбита (3.42) есть эллипс

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + e \cos \varphi} \quad (3.43)$$

с переменным параметром и эксцентриситетом:

$$\tilde{p} = \frac{C^2}{\mu}, \quad e = C_1 \frac{C^2}{\mu}. \quad (3.44)$$

Решение (3.43) обладает инвариантами вида (3.33). Отметим, что решение (3.43) есть точное решение. Если в формулах (3.39), (3.40) и (3.44) положить $\alpha < 0$, $\theta_0 = 0$, $\tau_0 = 1$, $-\alpha = \frac{Q}{\mu_0 C}$, Q – постоянная, $Q > 0$, $C_2 = -\frac{1}{\alpha}$, $e_0 = C_1 \frac{C^2}{\mu_0}$, то получаем решение, найденное в работе [102] для линейного закона изменения $\mu(\theta)$ в фотогравитационной задаче двух тел, которое получено другим путем.

3.8. Общий случай однородного уравнения

Уравнение (3.11) в общем случае имеет решение [93]:

$$y = \tau^{\frac{1-q}{2}} Z_v \left(\frac{1}{(1-2p-q)} \cdot \frac{C}{B} \cdot \tau^{1-2p-q} \right), \quad (3.45)$$

где

$$v = \frac{\sqrt{(1-q)^2 + 4p(p+q-1)}}{2(1-2p-q)} = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.45a)$$

Учитывая (3.6) получаем ($n \neq 1$):

$$y = \tau^{\frac{1-q}{2}} Z_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \tau^{1-n} \right), \quad (3.45б)$$

где

$$Z_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\alpha(1-n)} \cdot \tau^{1-n} \right) = \left(\frac{\alpha(1-n)}{\tau^{1-n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[C_1 \cdot \sin \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} \right) + C_2 \cdot \cos \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} \right) \right]. \quad (3.46)$$

Для функции y решение можно представить в виде

$$y = [\alpha(1-n)]^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{n-q}{2}} \cdot C_3 \cdot \cos \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} + C_4 \right). \quad (3.47)$$

Теперь решение задачи определяется формулами

$$r = \frac{\tau^{\frac{n-q}{2}}}{\frac{\mu_0}{C^2} + \sqrt{\alpha(1-n)} \tau^{\frac{n-q}{2}} C_3 \cos \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} + C_4 \right)}, \quad (3.48а)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\tau^{-q} d\tau}{\left[\frac{\mu_0}{C^2} + \sqrt{\alpha(1-n)} \tau^{\frac{n-q}{2}} C_3 \cos \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} + C_4 \right) \right]^2} = \alpha C (t - t_0). \quad (3.48б)$$

Закон (3.3) дает зависимость $\tau(\theta)$ и формулы (3.48) дают параметрическое решение задачи. Зависимость $\mu(\tau)$ определяется формулой (3.13).

В частности, при $q = n$, $p = 0$ решение (3.48) сводится к кеплеровскому случаю. Действительно, из (3.3) и (3.13) в этом случае следует $\mu = \mu_0$, $\tau^{1-n} \sim \theta$, и обозначив

$$\frac{\sqrt{\alpha(1-n)} C^2 C_3}{\mu_0} = e, \quad (3.49)$$

приводим решение (3.48а) к виду

$$r = \frac{C^2}{\mu_0 [1 + e \cos(\theta - \omega)]} \quad (3.50)$$

периодического движения по коническому сечению.

3.9. Случай линейного неоднородного уравнения

Выше мы рассмотрели решение $\rho(\tau)$ задачи, которое сводилось к исследованию линейного уравнения (3.11). Рассмотрим теперь более общий случай неоднородного уравнения для ρ , следующего из (3.7). Решение задачи в этом случае можно представить через функции Бесселя, теория и свойства которых хорошо изучены, например [105-110], поэтому имеем возможность достаточно просто и полно описать движение в задаче Гильдена-Мещерского при законах изменения массы $\mu(\theta)$, как функции параметра $\tau(\theta)$, изменяющегося по закону (3.3) Мартина-Чиара.

Выпишем это уравнение

$$\tau^2 \rho'' + q\tau\rho' + \left[\frac{C^2}{B^2 \tau^{2(2p+q-1)}} - p(p+q-1) \right] \rho - \frac{\mu}{B^2 \tau^{3p+2q-2}} = 0. \quad (3.51)$$

Рассмотрим случай представления уравнения (3.51) в виде неоднородного уравнения Бесселя

$$\tau^2 \rho'' + \tau\rho' + (\tau^2 - \nu^2)\rho = f(\tau). \quad (3.52)$$

Для этого должны выполняться условия

$$q=1, \quad p=-\frac{1}{2}, \quad B=C, \quad \mu=C^2 \tau^{-\frac{3}{2}} f(\tau), \quad (3.53)$$

откуда следует $\alpha=1$, $n=0$ в законе (3.3) и $\nu=\pm p$ в уравнении (3.52). Решения $\rho(\tau)$ из (3.52) с учетом формул (3.4) дают затем решения $r(\tau)$. Для заданного $f(\tau)$ закон $\mu(\tau)$ определяется согласно (3.53), причем как следует из (3.3) для $n=0$ параметр τ в этом случае есть линейная функция угла θ . Решения уравнения (3.52), определяемые функциями Ангера, Вебера и Ломмеля, достаточно подробно описаны в работе [103]. Причем, в случае решений, определяемых функциями Ангера и Вебера, правая часть уравнения (3.52) $f(\tau)$ задается в виде линейной функции параметра τ , а $\mu(\tau)$ является дробно-рациональной функцией этого параметра τ . В случае решений, определяемых функциями Ломмеля, правая часть уравнения (3.52) $f(\tau)$ задается в виде степенной функции параметра τ , а для $\mu(\tau)$ получаем также степенную функцию параметра τ . Полученные решения, как показано в [103], можно представить в виде эволюционирующего эллипса с переменным параметром и эксцентриситетом.

3.10. Общий случай неоднородного уравнения

Рассмотрим исходные уравнения (3.7) и (3.8) для случая достаточно произвольной функции $\mu(\tau)$. Пусть $\varphi(\tau)$ - есть некоторое решение уравнения (3.52) с произвольной функцией $f(\tau)$ $\left(v^2 = \frac{1}{4}\right)$, тогда $\psi = \tau^a \varphi(b\tau^d)$, ($b \neq 0$, $d \neq 0$) есть решение уравнения [93]:

$$\tau^2 \rho'' + (1-2a)\tau\rho' + (b^2 d^2 \tau^{2d} + a^2 - v^2 d^2)\rho = d^2 \tau^a f(b\tau^d). \quad (3.54)$$

Сравнивая (3.54) и исходные уравнения (3.7) и (3.8) получим условия их совпадения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-q}{2}, \\ b &= \frac{C}{B(1-2p-q)}, \\ d &= 1-2p-q, \\ \left(\frac{1-q}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(1-2p-q)^2 &= -p(p+q-1), \\ \mu &= B^2(1-2p-q)^2 \tau^{\frac{3}{2}(1-2p-q)} f\left(\frac{C\tau^{1-2p-q}}{B(1-2p-q)}\right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-n}{2} + p, \\ b &= \frac{1}{\alpha(1-n)}, \\ d &= 1-n, \\ \left(\frac{1-n}{2} + p\right)^2 - \frac{1}{4}(1-n)^2 &= -p(n-1-p), \\ \mu &= \alpha^2 C^2 (1-n)^2 \tau^{\frac{3}{2}(1-n)} f\left(\frac{1}{\alpha(1-n)} \tau^{1-n}\right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Теперь приходим к следующему результату: если $\varphi(\tau)$ есть некоторое решение уравнения (3.52), с произвольной функцией

$f(\tau) \left(\nu^2 = \frac{1}{4} \right)$, то $\tau^{\frac{1-q}{2}} \varphi \left(\frac{C}{B(1-2p-q)} \tau^{1-2p-q} \right)$, ($1-2p-q \neq 0$, $B \neq 0$) есть решение уравнения

$$\tau^2 \rho'' + q\tau\rho' + \left[\frac{C^2}{B^2 \tau^{4p+2q-2}} - p(p+q-1) \right] \rho = \frac{\mu}{B^2 \tau^{3p+2q-2}}, \quad (3.57)$$

в котором

$$\mu(\tau) = B^2 (1-2p-q)^2 \tau^{\frac{3}{2}(1-2p-q)} f \left(\frac{C\tau^{1-2p-q}}{B(1-2p-q)} \right). \quad (3.58)$$

Применительно к уравнению (3.8) имеем следующий результат: если $\varphi(\tau)$ есть некоторое решение уравнения (3.52) с произвольной функцией

$f(\tau) \left(\nu^2 = \frac{1}{4} \right)$, то функция $\tau^{\frac{1-n+p}{2}} \varphi \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} \right)$, ($n \neq 1$, $\alpha \neq 0$) есть решение уравнения

$$\tau^2 \rho'' + (n-2p)\tau\rho' + \left[\frac{1}{\alpha^2 \tau^{2(n-1)}} - p(n-1-p) \right] \rho = \frac{\mu}{\alpha^2 C^2 \tau^{2(n-1)-p}}, \quad (3.59)$$

в котором

$$\mu(\tau) = \alpha^2 C^2 (1-n)^2 \tau^{\frac{3}{2}(1-n)} f \left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)} \right). \quad (3.60)$$

Решение однородного уравнения (3.57) рассматривалось нами ранее. Следовательно, общее решение уравнения (3.57) при законе $\mu(\tau)$ (3.58) имеет вид

$$\rho(\tau) = y(\tau) + \tau^{\frac{1-q}{2}} \varphi \left(\frac{C\tau^{1-2p-q}}{B(1-2p-q)} \right), \quad (3.61)$$

где

$$y(\tau) = \tau^{\frac{1-q}{2}} Z_{\frac{1}{2}} \left(\frac{C\tau^{1-2p-q}}{B(1-2p-q)} \right). \quad (3.62)$$

Аналогично общее решение уравнения (3.59) при законе $\mu(\tau)$ (3.60) имеет вид

$$\rho(\tau) = y(\tau) + \tau^{\frac{1-n}{2}+p} \varphi\left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)}\right), \quad (3.63)$$

где

$$y(\tau) = \tau^{\frac{1-n}{2}+p} Z_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)}\right). \quad (3.64)$$

Теперь, используя формулы преобразования (3.4), представим решения задачи, соответствующие (3.61) и (3.63), в следующем виде

$$r = \frac{1}{\tau^{\frac{1-2p-q}{2}} \left[Z_{\frac{1}{2}}\left(\frac{C\tau^{1-2p-q}}{B(1-2p-q)}\right) + \varphi\left(\frac{C\tau^{1-2p-q}}{B(1-2p-q)}\right) \right]} \quad (3.65)$$

и

$$r = \frac{1}{\tau^{\frac{1-n}{2}} \left[Z_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)}\right) + \varphi\left(\frac{\tau^{1-n}}{\alpha(1-n)}\right) \right]}. \quad (3.66)$$

Таким образом, решения (3.65) и (3.66) и соответственно законы изменения $\mu(\tau)$ (3.58) и (3.60) представляют собой наиболее общую форму параметрического решения задачи, в которой параметр τ подчиняется закону Мартина-Чиара.

Найденные решения, как и в случаях рассмотренных ранее, можно представить в виде эволюционирующего эллипса с переменными параметром и эксцентриситетом.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА-МЕЩЕРСКОГО

С момента постановки задачи Гильдена-Мещерского до настоящего времени прошло более ста лет, однако пока имеются строгие решения, полученные И. В. Мещерским [22] и Б. Е. Гельфгатом [23] лишь для определенных законов изменения массы небесных тел, имеющих вид дробно-рациональных выражений от времени. При отсутствии строгих решений задачи для других законов изменения массы повышается значимость частных решений задачи. С другой стороны, частные решения задачи Гильдена-Мещерского могут играть большую роль в исследовании иных более сложных задач небесной механики тел переменной массы.

Известны частные решения задачи Гильдена-Мещерского вида

$$r\mu = \kappa C^2, \quad \kappa > 0 \quad (4.1)$$

где r – радиус-вектор одной материальной точки относительно другой, $\mu = G(m_1 + m_2)$, G – гравитационная постоянная, $m_1(t)$ и $m_2(t)$ – переменные массы компонент двойной системы, κ – безразмерная постоянная, C – постоянная интеграла площадей. Решения вида (4.1) используются в ограниченной задаче трех тел переменной массы [111] при отыскании аналогов интеграла Якоби и исследовании точек либрации. Частные решения в прямолинейной задаче ($C = 0$) найдены в работах [67, 73].

Выясним физический смысл постоянной κ [52]. Частные решения (4.1) представляют собой некоторое плоское спиральное движение. Рассмотрим сначала математически эквивалентный задаче Гильдена-Мещерского случай одного неподвижного центра с гравитационным параметром μ . Тогда κ есть отношение модуля силы ньютоновского притяжения $|\vec{F}_n|$, действующей на пассивно гравитирующую материальную точку (спутник), к “мгновенной” центробежной силе в плоскости движения в каждый заданный момент времени

$$\kappa = \frac{|\vec{F}_n|}{|\vec{F}_{цб}|} = \frac{\mu}{r^3 \omega^2}, \quad \mu = GM. \quad (4.2)$$

Здесь $\mu = GM$, M – масса неподвижного центра, $\omega = \dot{\phi}$ – угловая скорость движения спутника. Для задачи Гильдена-Мещерского в постановке относительного движения двух тел с массами m_1 и m_2 и гравита-

ционным параметром $\mu = G(m_1 + m_2) = \mu_1 + \mu_2$ теперь величина κ есть сумма отношений модуля ньютоновской силы притяжения к “мгновенной” центробежной силе, действующей на каждый компонент системы, в плоскости движения

$$\kappa = \frac{|\vec{F}_{n_1}|}{|\vec{F}_{цб_1}|} + \frac{|\vec{F}_{n_2}|}{|\vec{F}_{цб_2}|} = \frac{\mu_2}{r^3 \omega^2} + \frac{\mu_1}{r^3 \omega^2} = \frac{\mu}{r^3 \omega^2} . \quad (4.3)$$

Существование частного интеграла (4.1) задачи Гильдена-Мещерского приводит к частным решениям вида [111]:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 R(t) , \quad \omega(t) = \frac{\omega_0}{R^2(t)} , \\ \mu(t) &= \frac{\mu_0}{R(t)} , \quad \mu_0 = G(\mu_{10} + \mu_{20}) , \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$R(t) = \sqrt{\alpha_0 t^2 + 2\beta_0 t + \gamma_0} ,$$

где постоянные величины α_0 , β_0 , γ_0 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_0 \gamma_0 - \beta_0^2 - \omega_0^2 + \frac{\mu_0}{r_0^3} &= 0 , \\ r_0^2 \omega_0 &= C . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.5) и (4.1) имеем следующее соотношение для параметров задачи

$$\alpha_0 \gamma_0 - \beta_0^2 = (1 - \kappa) \omega_0^2 . \quad (4.6)$$

Рассмотрим теперь частные решения задачи Гильдена-Мещерского для случая $C \neq 0$, обобщающие решения вида (4.1) [112]:

$$r\mu = \kappa(t)C^2 , \quad \kappa > 0 \quad (4.7)$$

где $\kappa(t)$ – некоторая функция времени.

Подставим μ из (4.7) в уравнения движения задачи и получим

$$\ddot{r} - \frac{(1 - \kappa)C^2}{r^3} = 0 . \quad (4.8)$$

С помощью метода автономизации [67] уравнение (4.8) преобразованием Куммера-Лиувилля:

$$r = v(t)\rho, \quad d\tau = u(t)dt \quad (4.9)$$

приводится к автономной форме

$$\rho'' + b_1\rho' + b_0\rho + \frac{\kappa_0 C^2}{\rho^3} = 0, \quad (\cdot) = \frac{d}{d\tau}. \quad (4.10)$$

Для этого должны выполняться условия:

$$b_1 = \frac{1}{u} \left(2 \frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{u} \right), \quad b_0 = \frac{\ddot{v}}{vu^2}, \quad \kappa_0 = -\frac{(1-\kappa)}{v^4 u^2}, \quad (4.11)$$

где b_1, b_0, κ_0 – произвольные постоянные.

Уравнение (4.10) допускает частное решение $\rho = \rho_0 = const$, которое определяется соотношением

$$\rho_0^4 = -\frac{\kappa_0 C^2}{b_0}, \quad b_0 \neq 0. \quad (4.12)$$

На произвольную постоянную κ_0 наложим дополнительное условие $-\frac{\kappa_0}{b_0} > 0$, чтобы выполнялось соотношение $\rho_0 > 0$. В общем случае решение уравнения (4.10) представляет самостоятельный интерес, в настоящем случае ограничимся решением (4.12) уравнения (4.10).

Из метода автономизации [67] следуют общие решения для функций u, v , а функция $\kappa(t)$ определяется выражением

$$\kappa(t) = 1 + \kappa_0 v^4 u^2, \quad (4.13)$$

причем из всего диапазона изменений постоянных b_1, b_0, κ_0 рассматриваются такие значения, когда функция $\kappa(t)$ является всегда положительной. Для радиус-вектора r имеем

$$r = v(t)\rho_0 \quad (4.14)$$

и законы изменения массы определяются выражением

$$\mu = \frac{C^2}{\rho_0} \left(\frac{1}{v} + \kappa_0 v^3 u^2 \right). \quad (4.15)$$

Подставляя значения функций u и v в формулу (4.15) получим:

$$\mu(t) = \frac{C^2}{\rho_0} (\alpha_1 t + \beta_1)^{\gamma_{\mp}} (\alpha_2 t + \beta_2)^{\gamma_{\pm}} \left[1 + \kappa_0 (\alpha_1 t + \beta_1)^{\sigma} (\alpha_2 t + \beta_2)^{-\sigma} \right],$$

$$\gamma_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}; \quad \sigma = \pm \frac{2b_1}{\sqrt{\delta}}; \quad \delta = b_1^2 - 4b_0 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 > 0; \quad (4.16)$$

$$\mu(t) = \frac{C^2}{\rho_0} (At^2 + Bt + C_1)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\mp \frac{b_1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2At + B}{\sqrt{-\delta}}\right) \times$$

$$\times \left[1 + \kappa_0 \exp\left(\pm \frac{4b_1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2At + B}{\sqrt{-\delta}}\right) \right], \quad \delta = B^2 - 4AC_1 < 0; \quad (4.17)$$

$$\mu(t) = \frac{C^2}{\rho_0} (\alpha t + \beta)^{-1} \exp\left[\pm \frac{b_1}{2\alpha(\alpha t + \beta)}\right] \left\{ 1 + \kappa_0 \exp\left[\mp \frac{2b_1}{\alpha(\alpha t + \beta)}\right] \right\},$$

$$\delta = 0; \quad (4.18)$$

$$\mu(t) = \frac{C^2}{\rho_0} (\alpha t + \beta)^{\gamma_{0\mp}} \left[1 + \kappa_0 (\alpha t + \beta)^{\pm\sigma_0} \right],$$

$$\gamma_{0\mp} = -\frac{1}{2} \mp \frac{b_1}{2\alpha}, \quad \sigma_0 = \frac{2b_1}{\alpha}, \quad \delta > 0; \quad (4.19)$$

$$\mu(t) = \frac{C^2}{\rho_0} \exp\left(\mp \frac{1}{2} b_1 t\right) \left[1 + \kappa_0 \exp(\pm 2b_1 t) \right], \quad \delta = 0. \quad (4.20)$$

Формулы (4.16)-(4.20) определяют законы изменения массы $\mu(t)$ от времени, при выполнении которых существуют частные решения типа (4.7). Полученные решения достаточно простые и их можно будет использовать для исследований в ограниченной задаче трех тел переменной массы и в других более сложных задачах небесной механики тел переменной массы.

ГЛАВА 5

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Рассмотрим задачу двух гравитирующих и излучающих тел, впервые поставленную и исследованную В. В. Радзиевским [76], с дополнительным предположением изотропной переменности масс взаимодействующих тел [77, 89, 113].

Уравнения относительного движения рассматриваемой задачи имеют вид

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (5.1)$$

где

$$\mu = G(q_1 m_1 + q_2 m_2) \quad (5.2)$$

– переменный фактор, в котором обозначено: G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы тел, q_1 и q_2 – коэффициенты редукции тел m_1 и m_2 . В общем случае массы m_1 и m_2 являются некоторыми заданными функциями времени t . Задача (5.1) объединяет задачу Гильдена-Мещерского ($\mu = \mu(t)$), внося в нее новый физический смысл, и фотогравитационную задачу двух тел Радзиевского ($\mu = const$) [77, 89].

Уравнения движения (5.1) умноженные векторно на \vec{r} и скалярно на скорость $\dot{\vec{r}}$ дают, соответственно, интеграл площадей $\vec{C} = const$:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}, \quad \vec{C} \cdot \vec{r} = \vec{C} \cdot \dot{\vec{r}} \equiv 0 \quad (5.3)$$

и квазиинтеграл энергии h :

$$\dot{\vec{r}}^2 - 2\frac{\mu}{r} \equiv h = h_0 - 2\int \frac{d\mu}{r}. \quad (5.4)$$

Интегрирование по μ производится в пределах от μ_0 до μ , соответствующих изменениям времени от нуля до текущего момента t . В качестве следствия (5.3) и уравнений движения (5.1) легко получить другой квазиинтеграл – вектор Лапласа \vec{f} (такой, что $\vec{f} \cdot \vec{C} \equiv 0$):

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \frac{\mu \vec{r}}{r} \equiv \vec{f} = \vec{f}_0 - \int \frac{\vec{r} d\mu}{r}, \quad (5.5)$$

квадрат которого, как следует из тождеств (5.5) и (5.4), имеет тот же вид, что и в невозмущенной задаче Кеплера, но с переменными μ , f , h :

$$\vec{f}^2 \equiv f^2 = \mu^2 + hC^2. \quad (5.6)$$

Таковы исходные соотношения, необходимые для дальнейшего анализа. Полученные соотношения являются точными и приемлемы для любых $\mu(t)$ [99, 113]. Соотношения подобные (5.3)–(5.5) выведены в работе [114] для случая $\mu(t) = 1 + \sigma\varphi(t)$, где σ – малая величина, $\varphi(t)$ – монотонная дифференцируемая функция от времени t .

Поскольку характерной динамической переменной в данной задаче является параметр $\mu(t)$, можно всюду заменить дифференцирование и интегрирование по времени таковыми по μ , что заметно упрощает вычисления. Тогда, обозначая производные $d/d\mu$ штрихом и дифференцируя равенства (5.4), (5.5) и (5.6), находим, соответственно:

$$h' = -\frac{2}{r}, \quad (5.7)$$

$$\vec{f}' = -\frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.8)$$

$$\vec{f} \cdot \vec{f}' \equiv f \cdot f' = \mu + \frac{1}{2} h' \cdot C^2 = \mu - \frac{C^2}{r}. \quad (5.9)$$

С другой стороны, согласно (5.8),

$$f \cdot f' = \vec{f} \cdot \vec{f}' = -\vec{f} \frac{\vec{r}}{r} = -f \cos \varphi, \quad (5.10)$$

где угол $\varphi = \hat{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ принято называть истинной аномалией. Сопоставляя (5.9) и (5.10) приходим к форме траектории задачи (5.1) [99, 113]:

$$r = \frac{C^2}{\mu \left(1 + \frac{f}{\mu} \cos \varphi \right)}. \quad (5.11)$$

Учитывая (5.6) из (5.11) получим эволюционирующую орбиту

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (5.12)$$

с переменными элементами орбиты

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}, \quad \omega = \theta - \varphi, \quad (5.13)$$

где p – параметр, e – эксцентриситет орбиты, ω – аргумент перицентра, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления, θ – полярный угол. Решения типа (5.11) в случае задачи Гильдена-Мещерского можно встретить в исследованиях различных авторов (см., например [3]). Используя результаты исследований задачи Гильдена-Мещерского можно сразу указать интегрируемые случаи задачи (5.1): это случаи изменения $\mu(t) = G(q_1 m_1 + q_2 m_2)$ согласно законам И. В. Мещерского или Б. Е. Гельфгата [66]. Из результатов исследования фотогравитационной задачи двух тел [76] следует, что траекторией движения (5.12), в зависимости от знаков μ и h , может быть любое оскулирующее коническое сечение.

Определим элементы орбиты (5.12): a – большую полуось, e – эксцентриситет, T – период, в терминах характеристик движения (постоянной площадью C и общей энергии $E = \frac{h}{2}$). Имеем

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2E} G(q_1 m_1 + q_2 m_2), \\ e^2 &= 1 + \frac{2EC^2}{G^2(q_1 m_1 + q_2 m_2)^2}, \\ T &= \frac{2\pi}{C} a^2 \sqrt{1 - e^2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Используя (5.14), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} &= \frac{\delta(q_1 m_1 + q_2 m_2)}{(q_1 m_1 + q_2 m_2)} - \frac{\delta E}{E}, \\ \frac{\delta T}{T} &= \frac{\delta(q_1 m_1 + q_2 m_2)}{(q_1 m_1 + q_2 m_2)} - \frac{3}{2} \frac{\delta E}{E}, \\ \frac{e \delta e}{1 - e^2} &= \frac{\delta(q_1 m_1 + q_2 m_2)}{(q_1 m_1 + q_2 m_2)} - \frac{1}{2} \frac{\delta E}{E}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для изотропной потери массы имеем $\delta E = -\delta\mu/r$. В случае медленного изменения параметра μ , полагая, что в среднем за один оборот $\langle 1/r \rangle = 1/a$, и используя (5.14), получим

$$\delta E/E = 2 \delta\mu/\mu , \quad (5.16)$$

откуда следует адиабатический инвариант [96] вида

$$E \sim G^2(q_1 m_1 + q_2 m_2)^2 . \quad (5.17)$$

Поэтому система (5.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} &= -\frac{\delta(q_1 m_1 + q_2 m_2)}{(q_1 m_1 + q_2 m_2)} , \\ \frac{\delta T}{T} &= -2 \frac{\delta(q_1 m_1 + q_2 m_2)}{(q_1 m_1 + q_2 m_2)} , \\ \frac{e \delta e}{1 - e^2} &= 0 , \end{aligned} \quad (5.18)$$

из которого следуют инварианты Джинса [115]:

$$\mu a = const , \quad \mu^2 T = const , \quad e = const , \quad (5.19)$$

обобщенные на случай $\mu(t)$, определяемый формулой (5.2). Инварианты (5.19) представляют интерес для исследования медленной эволюции орбит; общий ход эволюции орбит двойных систем с излучением определяется уравнениями (5.15).

ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ И СИСТЕМЫ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

6.1. Введение

Задача двух тел постоянной массы, движущихся под действием сил взаимного притяжения, является одной из основных задач небесной механики, на основе которой исследуются более сложные динамические системы, учитывающие различные реальные факторы в движении небесных тел. Успех динамического описания поведения гравитирующей системы во многом определяется удачным выбором исходного, так называемого невозмущенного движения, каковым является в классической небесной механике кеплеровское периодическое движение по коническому сечению. Задача двух тел переменной массы в форме задачи Гильдена-Мещерского является одной из основных нестационарных задач небесной механики, и для проблем небесной механики тел переменной массы и их фотогравитационных обобщений она играет такую же важную роль, как и кеплеровская задача в небесной механике тел с постоянными массами. При исследовании динамики гравитирующих систем с учетом эволюционных факторов (вековая убыль массы, диссипация, аккреция и другие негравитационные эффекты) встает вопрос выбора исходной невозмущенной орбиты, отличной от кеплеровской и учитывающей уже в первом приближении основные эволюционные тенденции динамической системы. Приведем результаты исследований в этом направлении [116, 117].

6.2. Метод автономизации

Рассмотрим задачу Гильдена-Мещерского [21, 22]:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu(t) \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (6.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор движущейся точки, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mu(t) = Gm(t)$, G – гравитационная постоянная, $m(t)$ – суммарная масса тел, $\mu(t)$ – некоторая функция времени.

Пространственно-временным преобразованием

$$\vec{r} = v(t)\vec{\rho} \quad , \quad d\tau = u(t)dt \quad (6.2)$$

задача Гильдена-Мещерского (6.1) приводится к виду

$$\vec{\rho}'' = -\mu_0 \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - b_1 \vec{\rho}' - b_0 \vec{\rho} \quad (6.3)$$

где

$$\mu = \mu_0 v^3 u^2 \quad , \quad b_1 = \frac{1}{u} \left(2 \frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{u} \right) \quad , \quad b_0 = \frac{\ddot{v}}{vu^2} \quad . \quad (6.4)$$

При $b_1 = const$, $b_0 = const$ задача (6.1) приводится к автономной форме. Такой метод исследования, начатый И. В. Мещерским [22], получил дальнейшее развитие в работах [68, 73]. В одной из основополагающих работ по небесной механике тел переменной массы [65] предложен метод исследования задачи (6.1) путем приведения ее к автономному виду (6.3) с малыми слагаемыми при коэффициентах b_1 , b_0 по сравнению с основной ньютоновской силой для случая изменения массы по закону Эддингтона-Джинса $\dot{\mu} = -\alpha\mu^n$. Показано, что в этом случае можно к (6.3) применять аппарат классической теории возмущений и определять оскулирующие элементы изображающей кеплеровской орбиты. Однако этот метод ограничивает законы изменения массы тел, не дает наглядных представлений об орбите как оскулирующем коническом сечении и не определяет непосредственно в исходных переменных дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбиты.

6.3. Метод полуавтономизации

Идея метода состоит в том, чтобы модификацией метода исследования, предложенного в [65], устранить его указанные выше недостатки [116, 117]. Для этого задачу (6.1) приводим к виду (6.3), причем $b_1 \neq const$, $b_0 \neq const$, то есть (6.3) имеет полуавтономную форму: основная сила ньютоновского притяжения стационарна, а добавочные силы с коэффициентами b_1 , b_0 – нестационарны. Теперь метод исследования [65] – применение теории возмущений к (6.3) – возможен для произвольного закона изменения массы $\mu(t)$ (непрерывная вместе с первой и второй производной функция времени), в предположении малости членов с коэффициентами b_1 , b_0 в (6.3). Частный случай такого подхода

рассмотрен в [118]. Второй недостаток метода автономизации [65] устраняется следующей модификацией: автономная часть (6.3) рассматривается сразу в исходных координатах (r, t) в качестве промежуточного движения. Тогда теория возмущений будет строиться сразу в исходных переменных (r, t) .

6.4. Промежуточное движение

Указанный выше метод полуавтономизации [116, 117] дает наиболее общую первую (I) форму уравнений промежуточного движения

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + a_1(t)\dot{\vec{r}} + a_0(t)\vec{r}, \quad (6.5)$$

где

$$\mu = \mu_0 v^3 u^2, \quad a_1 = 2 \frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{u}, \quad a_0 = \frac{\ddot{v}}{v} - \left(2 \frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{u} \right) \frac{\dot{v}}{v}, \quad (6.6)$$

и, соответственно, общую I форму промежуточной орбиты

$$r = v \frac{p}{1 + e \cos \varphi}; \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \int_0^t \frac{u \sqrt{\mu_0}}{p^{3/2}} dt, \quad (6.7)$$

где r, φ – полярные координаты, остальные обозначения принятые. Полагая $a_1 \dot{\vec{r}}$ и $a_0 \vec{r}$ малыми по сравнению с основной силой ньютоновского взаимодействия тел в (6.5), имеем промежуточную орбиту (6.7) и на ее основе можем строить теорию возмущений.

Здесь $v(t)$ и $u(t)$ – соответственно геометрический и динамический параметры промежуточной орбиты. Оставляя, к примеру, свободным геометрический параметр $v(t)$ орбиты, из (6.6) имеем

$$u = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0 v^3}}, \quad (6.8)$$

тогда получим вторую (II) форму уравнений промежуточного движения

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + a_1 \dot{\vec{r}} + a_0 \vec{r}, \quad (6.9)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{v}}{v} \right), \quad a_0 = \frac{\ddot{v}}{v} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{v}}{v} \right) \frac{\dot{v}}{v}. \quad (6.10)$$

Форма (6.5) является двухпараметрической (не считая μ). Вторая (II) форма (6.9) – однопараметрическая. Соответственно II форма промежуточной орбиты имеет вид

$$r = v \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad ; \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \int_0^t \left(\frac{\mu}{v^3 p^3} \right)^{1/2} dt. \quad (6.11)$$

Определим геометрический параметр через сам нестационарный фактор проблемы (6.1) – $\mu(t)$: как и в работе [65] введем безразмерные функции времени:

$$v = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^k, \quad (6.12)$$

тогда из (6.8) имеем

$$u = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{1-3k}{2}} \quad (6.13)$$

и получаем третью (III) форму уравнений промежуточного движения:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}(k+1) \frac{\dot{\mu}}{\mu} \dot{\vec{r}} + k \left[\frac{\ddot{\mu}}{\mu} + \frac{1}{2}(k-3) \frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2} \right] \vec{r}. \quad (6.14)$$

Здесь параметр k определяет множество класса промежуточных движений (6.14). Полагая малыми второй и третий слагаемые в (6.14) по сравнению с первым в правой части, можем строить теорию возмущений на базе промежуточного движения (6.14), определяющего III форму промежуточной орбиты

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^k \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad ; \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \int_0^t \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{1-3k}{2}} \frac{\sqrt{\mu_0}}{p^{3/2}} dt. \quad (6.15)$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в общем случае, уравнения промежуточного движения (6.5), (6.9), (6.14) и, соответственно, промежуточные движения: (6.7) – общая первая (I) форма, (6.11) – вторая (II) форма,

(6.15) – третья (III) форма, предложены для обобщенной нестационарной задачи двух тел, в которой в правых частях уравнений движения, помимо основной силы ньютоновского взаимодействия, дополнительно учитываются силы, пропорциональные радиус-вектору и скорости движения. Найденные промежуточные движения являются основой для исследования задачи двух тел переменной массы в различных формулировках. В каждом случае следует конкретизировать уравнения промежуточного движения (6.5), (6.9), (6.14) и соответствие правых частей уравнений промежуточного движения соответствующей задаче двух тел переменной массы.

В общем случае, уравнения промежуточного движения (6.5), (6.9), (6.14) определяют класс нового промежуточного движения – апериодического движения по квазиконическому сечению с переменным параметром, и, соответственно, промежуточные движения: (6.7) – общая первая (I) форма, (6.11) – вторая (II) форма, (6.15) – третья (III) форма.

6.5. Частные случаи III формы промежуточного движения

Промежуточное движение (6.14) содержит в себе, как частные случаи, известные и предлагавшиеся ранее движения в задаче (6.1):

1) апериодическое движение по коническому сечению [26, 119]:

$$k = 0; \quad \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \dot{\vec{r}}, \quad (6.16)$$

2) апериодическое движение по квазиконическому сечению [120, 121]:

$$k = -1; \quad \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu \left(\frac{1}{\mu} \right) \ddot{\vec{r}}, \quad (6.17)$$

3) периодическое по истинной аномалии движение по квазиконическому сечению:

$$k = \frac{1}{3} \quad ; \quad \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{2}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \dot{\vec{r}} + \frac{1}{3} \left[\frac{\ddot{\mu}}{\mu} - \frac{4}{3} \frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2} \right] \vec{r} \quad . \quad (6.18)$$

Движение (6.17) как промежуточное в изображающих координатах указано в [118]. Движение (6.18) дает промежуточную орбиту

$$r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)} \quad ; \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \int_0^t \frac{\sqrt{\mu_0}}{p^{3/2}} dt \quad . \quad (6.19)$$

Впервые орбита вида (6.19) в задаче (6.1) найдена в работе [71].

Отметим, что различные значения k в (6.14) определяют множество других возможных промежуточных орбит.

6.6. Условия касания

Сравнивая действительное движение (6.1) с движением по оскулирующей орбите на основе промежуточного движения, находим условия касания орбит [117]:

$$\left| \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right| \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{\ddot{\mu}}{\mu} \right| \ll 1 \quad . \quad (6.20)$$

Условия малости добавочных сил в найденных промежуточных движениях имеют вид

$$a_1 T \ll 1 \quad , \quad a_0 T^2 \ll 1 \quad , \quad (6.21)$$

где

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

квазикеплеров период. Применительно к параметру μ имеем

$$\left| \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right| T \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{\ddot{\mu}}{\mu} \right| T^2 \ll 1 \quad . \quad (6.22)$$

Первое из условий (6.22) получено ранее применительно к апериодическому движению по коническому сечению [26].

Для действительного движения, являющегося возмущенным движением (6.1), условия касания орбит находятся просто известным способом [75, 122].

6.7. Интегралы движения

Для движения (6.5) имеем аналоги интеграла площадей, энергии и вектора Лапласа:

$$\frac{1}{v^2 u} [\vec{r} \times \vec{V}] = \vec{C} \quad , \quad (6.23)$$

$$\frac{1}{u^2} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{r}{v} \right) \right]^2 - \frac{2\mu_0 v u^2}{r} \right\} = h \quad , \quad (6.24)$$

$$\frac{1}{u^2} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{v} \right) \right] \times \left[\frac{\vec{r}}{v} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{v} \right) \right] \right\} - \mu_0 \frac{\vec{r}}{r} = \vec{f} \quad , \quad |\vec{f}| = \mu_0 e \quad . \quad (6.25)$$

Здесь обозначения принятые. Для (6.9), (6.14) интегралы движения есть следствие (6.23) – (6.25). Например, для движения (6.14) соответствующие интегралы движения имеют вид:

$$\left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} [\vec{r} \times \vec{V}] = \vec{C} \quad , \quad (6.26)$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{3k-1} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-k} r \right) \right]^2 - \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{2k-1} \frac{2\mu_0}{r} \right\} = h \quad , \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{3k-1} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-k} \vec{r} \right) \right] \times \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-k} \vec{r} \times \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-k} \vec{r} \right) \right] \right\} - \mu_0 \frac{\vec{r}}{r} = \vec{f} \quad . \quad (6.28)$$

6.8. Составляющие скорости промежуточного движения

Для движения (6.5) имеем выражение для вектора-скорости:

$$\vec{V} = \left[\frac{\dot{v}}{v} r + \frac{v u \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{p}} e \sin \varphi \right] \vec{e}_r + \left[\frac{v u \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{p}} (1 + e \cos \varphi) \right] \vec{e}_n \quad . \quad (6.29)$$

Соответственно для движения (6.14):

$$\vec{V} = \left\{ k \frac{\dot{\mu}}{\mu} r + \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1-k} \frac{\mu_0}{p} \right]^{\frac{1}{2}} e \sin \varphi \right\} \vec{e}_r + \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1-k} \frac{\mu_0}{p} \right]^{\frac{1}{2}} (1 + e \cos \varphi) \vec{e}_n \quad , \quad (6.30)$$

где \vec{e}_r , \vec{e}_n – единичные векторы по \vec{r} и по нормали к \vec{r} в плоскости орбиты и по направлению возрастания истинной аномалии.

6.9. Интегрирование методом Гамильтона-Якоби

Промежуточные орбиты (6.7), (6.11), (6.15) получены непосредственным решением соответствующих дифференциальных уравнений промежуточного движения. Найдем эти решения методом Гамильтона-Якоби [117, 123]. Тогда для случая пертурбационной функции будем иметь возможность применить каноническую теорию возмущений.

Общую форму (6.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3} + a_1 \dot{x} + a_0 x \quad , \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3} + a_1 \dot{y} + a_0 y \quad , \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} + a_1 \dot{z} + a_0 z \quad ,\end{aligned}\tag{6.31}$$

где x, y, z – прямоугольные координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, μ, a_1, a_0 – функции времени, определяемые формулами

$$\mu(t) = \mu_0 v^3 u^2, \quad a_1(t) = 2 \frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{u}, \quad a_0(t) = \frac{\ddot{v}}{v} - \left(2 \frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{u} \right) \frac{\dot{v}}{v},\tag{6.32}$$

причем $v(t), u(t)$ – достаточно произвольные, дважды дифференцируемые, функции времени, $\mu_0 = const$.

Введем новые переменные ρ, θ, λ , связанные с прямоугольными координатами формулами

$$\begin{aligned}x &= v\rho \cos\theta \cos\lambda \quad , \\ y &= v\rho \cos\theta \sin\lambda \quad , \\ z &= v\rho \sin\theta \quad ,\end{aligned}\tag{6.33}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\tag{6.34}$$

в координатах ρ, θ, λ примет вид

$$T = \frac{1}{2}v^2(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \cos^2\theta \dot{\lambda}^2) + v\dot{\rho}\dot{\rho} + \frac{1}{2}\dot{v}^2 \rho^2.\tag{6.35}$$

Введем обобщенные импульсы обычным образом

$$\begin{aligned}
 p_\rho &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = v^2 \dot{\rho} + v\dot{v}\rho, \\
 p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = v^2 \rho^2 \dot{\theta}, \\
 p_\lambda &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = v^2 \rho^2 \cos^2 \theta \dot{\lambda},
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

и систему уравнений (6.31) запишем в форме

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, & \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} + a_1 p_\rho, \\
 \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + a_1 p_\theta, \\
 \dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}, & \dot{p}_\lambda &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda} + a_1 p_\lambda,
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

где функция Гамильтона H имеет вид

$$H = \frac{1}{2v^2} \left\{ (p_\rho - v\dot{v}\rho)^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \theta} \right\} - \frac{1}{2} \dot{v}^2 \rho^2 - \frac{\mu}{v\rho} - \frac{1}{2} a_0(t) v^2 \rho^2. \tag{6.38}$$

Перейдем к новым импульсам [123]

$$p_\rho = \psi \tilde{p}_\rho, \quad p_\theta = \psi \tilde{p}_\theta, \quad p_\lambda = \psi \tilde{p}_\lambda, \tag{6.39}$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\psi = \psi(t) = \exp \int a_1(t) dt = v^2 u, \tag{6.40}$$

тогда система (6.37) запишется в канонической форме

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_\rho}, & \dot{\tilde{p}}_\rho &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \rho}, \\
 \dot{\theta} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_\theta}, & \dot{\tilde{p}}_\theta &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta}, \\
 \dot{\lambda} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_\lambda}, & \dot{\tilde{p}}_\lambda &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda},
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

в которой гамильтониан \tilde{H} имеет вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{\psi} H = \frac{\psi}{2v^2} \left\{ \left(\tilde{p}_\rho - \frac{v\dot{\rho}}{\psi} \rho \right)^2 + \frac{\tilde{p}_\theta^2}{\rho^2} + \frac{\tilde{p}_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \theta} \right\} - \frac{1}{\psi} \left[\frac{1}{2} \dot{v}^2 \rho^2 + \frac{\mu}{v\rho} + \frac{1}{2} a_0 v^2 \rho^2 \right]. \quad (6.42)$$

Интегрирование неавтономной системы (6.41) проведем методом Гамильтона-Якоби [117, 123]. Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\psi}{2v^2} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{v\dot{\rho}}{\psi} \rho \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)^2 \right\} - \\ & - \frac{1}{\psi} \left[\frac{1}{2} \dot{v}^2 \rho^2 + \frac{\mu}{v\rho} + \frac{1}{2} a_0 v^2 \rho^2 \right] + \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Полный интеграл V уравнения (6.43) ищем в виде

$$V = W(\rho, \theta, \lambda, t) + \frac{v\dot{\rho}}{2\psi} \rho^2. \quad (6.44)$$

Подставив выражение (6.44) в уравнение (6.43), учитывая формулы (6.32), (6.40) для функций $\mu(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$, $\psi(t)$, получим для функции W уравнение

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{2\mu_0}{\rho} + \frac{2v^2}{\psi} \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (6.45)$$

решение которого имеет вид

$$W = -\alpha_1 \int_{t_0}^t \frac{\psi}{v^2} dt + W_1(\rho) + W_2(\theta) + W_3(\lambda), \quad (6.46)$$

где

$$\begin{aligned} W_1(\rho) &= \int_{\rho_1}^{\rho} \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}} d\rho, \\ W_2(\theta) &= \int_0^{\theta} \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}} d\theta, \\ W_3(\lambda) &= \alpha_3 \lambda, \end{aligned} \quad (6.47)$$

причем ρ_1 – меньший корень трехчлена, стоящего под знаком квадратного корня в выражении $W_1(\rho)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – произвольные постоянные.

С учетом выражения (6.40) для функции $\psi(t)$, решение W (6.46) принимает вид

$$W = -\alpha_1 \int_{t_0}^t u dt + W_1(\rho) + W_2(\theta) + W_3(\lambda) . \quad (6.48)$$

Теперь полный интеграл V (6.44) уравнения (6.43) имеет вид

$$V = -\alpha_1 \int_{t_0}^t u dt + \frac{v\dot{v}}{2\psi} \rho^2 + W_1(\rho) + W_2(\theta) + W_3(\lambda) . \quad (6.49)$$

Общий интеграл канонической системы (6.41) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \\ \frac{\partial V}{\partial \rho} = \tilde{p}_\rho, & \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \tilde{p}_\theta, & \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \tilde{p}_\lambda, \end{aligned} \quad (6.50)$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – новые произвольные постоянные.

Учитывая преобразование (6.39) и соотношение (6.40), запишем общий интеграл системы (6.31) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = F(t) + \beta_1 \quad ; \quad F(t) = \int u dt \quad ; \\ \alpha_2 \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}}} - \alpha_2 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = \beta_2 \quad ; \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \lambda - \alpha_3 \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}}} = \beta_3 \quad ; \\ \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}} = \frac{1}{u} \dot{\rho} \quad ; \\ \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{1}{u} \rho^2 \dot{\theta} \quad ; \\ \alpha_3 = \frac{1}{u} \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\lambda} . \end{aligned} \quad (6.52)$$

Выражения (6.51) и (6.52) содержат шесть необходимых для общего интеграла уравнений промежуточного движения произвольных постоянных

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \quad (6.53)$$

которые являются аналогами канонических элементов Якоби кеплеровской задачи [124], и переходят в них при

$$\mu = const, \quad v = const, \quad u = const.$$

Введем вместо θ новую переменную \tilde{u} , полагая

$$\sin \theta = \sin i \sin \tilde{u} \quad (6.54)$$

и из уравнений (6.51), аналогично кеплеровской задаче [124], получим

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}, \quad p = a(1 - e^2), \quad \varphi = \tilde{u} - \omega, \quad (6.55)$$

причем канонические постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, являющиеся аналогами элементов Якоби кеплеровской задачи, связаны с аналогами кеплеровских элементов орбит (6.7), (6.11), (6.15), введенными в работе [117]:

$$a, e, \omega, \Omega, i, F(\tau) \quad (6.56)$$

формулами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\mu_0}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu_0 p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu_0 p} \cos i, \\ \beta_1 &= -F(\tau), \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Здесь, в указанных выше формулах (6.51), (6.56), (6.57), $F(t)$ есть первообразная функция для $u(t)$, $F(\tau)$ является для уравнений промежуточного движения (6.5), (6.9), (6.14) и соответственно для промежуточных орбит (6.7), (6.11), (6.15) шестой постоянной интегрирования и аналогом шестого, динамического, элемента τ кеплеровской орбиты (τ – момент прохождения через перицентр орбиты).

С учетом (6.33), (6.51), (6.52) общее решение уравнений промежуточного движения (6.31) дается формулами

$$\begin{aligned}x &= v\rho(\cos\tilde{u}\cos\Omega - \sin\tilde{u}\sin\Omega\cos i) \ , \\y &= v\rho(\cos\tilde{u}\sin\Omega + \sin\tilde{u}\cos\Omega\cos i) \ , \\z &= v\rho\sin\tilde{u}\sin i \ ,\end{aligned}\tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)x + v\rho\dot{\tilde{u}}(-\sin\tilde{u}\cos\Omega - \cos\tilde{u}\sin\Omega\cos i) \ , \\ \dot{y} &= \left(\frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)y + v\rho\dot{\tilde{u}}(-\sin\tilde{u}\sin\Omega + \cos\tilde{u}\cos\Omega\cos i) \ , \\ \dot{z} &= \left(\frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)z + v\rho\dot{\tilde{u}}\cos\tilde{u}\sin i \ ,\end{aligned}\tag{6.59}$$

где

$$\begin{aligned}r &= v\rho \ , \\ \rho &= \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \ , \quad \varphi = \tilde{u} - \omega \ ; \\ \dot{\rho} &= u\sqrt{\frac{\mu_0}{p}}e\sin\varphi \ , \quad \dot{\tilde{u}} = u\frac{\sqrt{\mu_0 p}}{\rho^2} \ ; \\ \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} &= \frac{\sqrt{\mu_0}}{p^{3/2}}[F(t) - F(\tau)] \ , \quad F(t) = \int udt \ .\end{aligned}\tag{6.60}$$

Для эллиптических движений ($e < 1$) с помощью преобразования

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

из последнего уравнения (6.60) получим аналог уравнения Кеплера

$$E - e\sin E = M \ ,\tag{6.61}$$

где

$$M(t) = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}}[F(t) - F(\tau)] \ .\tag{6.62}$$

Общий интеграл для систем уравнений (6.9), (6.14), являющихся следствиями общей системы (6.5), описывающих, соответственно, вторую и третью формы движений, получим аналогично проведенному решению для общей первой формы движения (6.31), учитывая в формулах (6.51), (6.52) выражения для функций $u(t)$, соответственно (6.8) и (6.13).

Формулы, аналогичные (6.58) – (6.62), получим для движений (6.9), (6.14), учитывая в них выражения для функций $v(t)$, $u(t)$ (6.8) и (6.12), (6.13), соответственно. К примеру, для II формы движения (6.9) имеем формулы (6.58) – (6.62), в которых

$$u = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0 v^3}} \quad , \quad F(t) = \int u dt = \int \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0 v^3}} dt \quad , \quad (6.63)$$

а для III формы движения (6.14) имеем формулы (6.58) – (6.62), в которых

$$v = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k \quad , \quad u = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{1-3k}{2}} \quad , \quad F(t) = \int u dt = \int \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{1-3k}{2}} dt \quad . \quad (6.64)$$

6.10. Уравнения возмущенного движения

Рассматривая промежуточное движение (6.5), (6.9), (6.14) в качестве исходного невозмущенного движения, запишем уравнения возмущенного движения

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + a_1 \dot{\vec{r}} + a_0 \vec{r} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad , \quad (6.65)$$

где $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ – произвольная возмущающая функция.

Применяя методы теории возмущений [122, 124], следуя А. И. Лурье [125], с помощью формул (6.23)–(6.25), (6.29) получим систему оскулирующих элементов апериодического движения (6.5) по квазиконическому сечению с переменным параметром:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{vu} \frac{2a^2}{\sqrt{\mu_0 p}} [F_r e \sin \varphi + (1 + e \cos \varphi) F_n] \quad ,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{vu} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \left[F_r \sin \varphi + \frac{e + 2 \cos \varphi + e \cos^2 \varphi}{1 + e \cos \varphi} F_n \right] \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{vu} \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \left[-F_r \cos \varphi + \frac{2 + e \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} F_n \sin \varphi - e F_3 \frac{\sin \tilde{u} \cdot \text{ctgi}}{1 + e \cos \varphi} \right], \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{vu} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} F_3 \frac{\cos \tilde{u}}{1 + e \cos \varphi}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{vu} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} F_3 \frac{\sin \tilde{u}}{(1 + e \cos \varphi) \sin i}, \\
\frac{dF(\tau)}{dt} &= \frac{1}{v^3 u} \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \left[(eN \sin \varphi - \cos \varphi) F_r + \frac{pv}{r} N F_n \right] \frac{r^2}{p^2} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}};
\end{aligned} \tag{6.66}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi &= \tilde{u} - \omega, \quad r = v \frac{p}{1 + e \cos \varphi}; \\
N &= 2 \frac{p^2 v^2}{r^2} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^3}; \\
\frac{\sqrt{\mu_0}}{p^{3/2}} [F(t) - F(\tau)] &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \quad F(t) = \int u dt,
\end{aligned} \tag{6.67}$$

F_r, F_n, F_3 – принятые [125] проекции возмущающей силы $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

Уравнения (6.66) являются наиболее общими [117]. Учитывая (6.8), получим из (6.66) результаты, указанные в работе [121]. Для движения (6.14) из (6.66) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2a^2}{\sqrt{\mu_0 p}} [F_r e \sin \varphi + (1 + e \cos \varphi) F_n], \\
\frac{de}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \left[F_r \sin \varphi + \frac{e + 2 \cos \varphi + e \cos^2 \varphi}{1 + e \cos \varphi} F_n \right], \\
\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \frac{1}{e} \left[-F_r \cos \varphi + \frac{2 + e \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} F_n \sin \varphi - e F_3 \frac{\sin \tilde{u} \cdot \text{ctgi}}{1 + e \cos \varphi} \right], \\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} F_3 \frac{\cos \tilde{u}}{1 + e \cos \varphi}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} F_3 \frac{\sin \tilde{u}}{(1 + e \cos \varphi) \sin i}, \\
\frac{dF(\tau)}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-\frac{(3k+1)}{2}} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \frac{p}{e} \left[(eN \sin \varphi - \cos \varphi) F_r + \frac{p}{r} \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^k N F_n \right] \frac{r^2}{p^2} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}},
\end{aligned} \tag{6.68}$$

где обозначения прежние (6.67), причем

$$F(t) = \int \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{1-3k}{2}} dt .$$

Полагая $k = 0$ в уравнениях (6.68) получим результаты работы [26], при $k = -1$ из уравнений (6.68) следуют результаты, указанные в работе [120].

6.11. Уравнения Ньютона для оскулирующих элементов

Уравнения для оскулирующих элементов можно представить в наиболее общей форме уравнений Ньютона, пользуясь известными методами теории возмущений [122, 124] применительно к движению (6.5), (6.9), (6.14). В результате получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} 2r\tilde{T} , \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left\{ \sin \varphi \cdot v \cdot \tilde{S} + \left[\cos \varphi + (\cos \varphi + e) \frac{r}{vp} \right] v\tilde{T} \right\} , \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{r}{p} \cos \tilde{u} \tilde{W} , \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{r}{p} \frac{\sin \tilde{u}}{\sin i} \tilde{W} , \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{\cos \varphi}{e} v\tilde{S} + \frac{\sin \varphi}{e} \left(1 + \frac{r}{vp} \right) v\tilde{T} - \frac{r}{p} \sin \tilde{u} \cdot \text{ctgi} \cdot \tilde{W} \right] , \\ \frac{dF(\tau)}{dt} &= \frac{1}{v^3 u} \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \left[(eN \sin \varphi - \cos \varphi) \tilde{S} + \frac{pv}{r} N\tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2} , \end{aligned} \tag{6.69}$$

где

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} S ; \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} T ; \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} W ;$$

S, T, W – обычно принятые [124] проекции возмущающей силы $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, остальные обозначения те же, что и в (6.67). Уравнения (6.69) являются уравнениями Ньютона для оскулирующих элементов промежуточного движения (6.5).

Для движения (6.14) система оскулирующих элементов (6.69) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{k+1}{2}} 2r\tilde{T} \quad , \\
\frac{de}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{k+1}{2}} \left\{ \sin\varphi \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k \tilde{S} + \left[\cos\varphi + (\cos\varphi + e)\frac{r}{p} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{-k} \right] \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k \tilde{T} \right\} \quad , \\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{r}{p} \cos\tilde{u} \tilde{W} \quad , \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{r \sin\tilde{u}}{p \sin i} \tilde{W} \quad , \\
\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{k+1}{2}} \left\{ -\frac{\cos\varphi}{e} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k \tilde{S} + \frac{\sin\varphi}{e} \left[1 + \frac{r}{p} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{-k} \right] \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin\tilde{u} \cdot \text{ctgi} \cdot \tilde{W} \right\} \quad , \\
\frac{dF(\tau)}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{3k+1}{2}} \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \left[(eN \sin\varphi - \cos\varphi) \tilde{S} + \frac{p}{r} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2} \quad ,
\end{aligned} \tag{6.70}$$

где обозначения прежние, причем $F(t)$ определяется формулой (6.64).

6.12. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов

Пусть в уравнениях возмущенного движения (6.65) возмущение \vec{F} таково, что существует пертурбационная функция $R(x, y, z, t)$, тогда уравнения для оскулирующих элементов движения (6.5), (6.9), (6.14) можно представить в форме уравнений Лагранжа [75]. Пользуясь известными в этом случае методами [75, 122, 124] и результатами (6.58) – (6.62) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad , \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu_0 p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu_0 e} \frac{\partial R}{\partial F(\tau)} \right] \quad , \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{1}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad , \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{\cos i}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu_0 p}} \frac{\partial R}{\partial e} \right] \quad , \\ \frac{dF(\tau)}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{p}{\mu_0 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad .\end{aligned}\tag{6.71}$$

Это уравнения для оскулирующих элементов движения (6.5) в форме уравнений Лагранжа.

Для движения (6.14) соответственно получим:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad , \\ \frac{de}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[-\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu_0 p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu_0 e} \frac{\partial R}{\partial F(\tau)} \right] \quad , \\ \frac{di}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[-\frac{1}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] \quad , \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad , \\ \frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[-\frac{\cos i}{\sqrt{\mu_0 p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu_0 p}} \frac{\partial R}{\partial e} \right] \quad , \\ \frac{dF(\tau)}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{p}{\mu_0 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad ,\end{aligned}\tag{6.72}$$

причем $F(t)$ определяется формулой (6.64).

Для эллиптических оскулирующих элементов ($e < 1$) предпочтительна следующая система Лагранжа для элементов движения (6.5):

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \quad , \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{tg \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \right], \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \right], \\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{tg \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \right], \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{tg \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} \right],
\end{aligned} \tag{6.73}$$

где

$$n = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}}; \quad \pi = \Omega + \omega; \quad \varepsilon = \pi + \bar{M}_0; \quad M = \bar{M}_0 + \int_{t_0}^t n u dt,$$

причем \bar{M}_0 – средняя аномалия в эпоху.

Для движения (6.14) вместо (6.73) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{de}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right], \\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[-\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{tg \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \right], \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{d\pi}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{tg \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \right], \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{tg \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} \right].
\end{aligned} \tag{6.74}$$

В некоторых случаях предпочтительно включить в систему элементов M – среднюю аномалию. Тогда имеем следующие уравнения для элементов:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} , \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] , \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{ctgi}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{coseci}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right] , \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{coseci}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \right] , \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{ctgi}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \right] , \\
\frac{dM}{dt} &= nu - \frac{1}{v^2 u} \left[\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \right] .
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Применительно к движению (6.14) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} , \\
\frac{de}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] , \\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{ctgi}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{coseci}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right] , \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{coseci}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \right] , \\
\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{ctgi}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \right] , \\
\frac{dM}{dt} &= n \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\frac{1-3k}{2}} - \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \right] .
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Таким образом, найденное промежуточное движение (6.5), (6.9), (6.14) – аperiодическое движение по квазиконическому сечению с переменным параметром является наиболее общим [116, 117] , а полученные уравнения Ньютона и Лагранжа для оскулирующих элементов этого промежуточного движения содержат в себе, как частные случаи, известные результаты, полученные ранее, и дают основу для дальнейшего анализа проблемы (6.1).

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим уравнения возмущенного движения (6.65) применительно к промежуточному движению в форме (6.14). Сопоставляя уравнения (6.65) с исходными уравнениями (6.1) задачи Гильдена-Мещерского находим, что изотропное изменение массы в рассматриваемой задаче эквивалентно влиянию возмущающего фактора следующей структуры:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}(k+1)\frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{\vec{r}} - k\left[\frac{\ddot{\mu}}{\mu} + \frac{1}{2}(k-3)\frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2}\right]\vec{r} \quad , \quad (7.1)$$

то есть задача Гильдена-Мещерского может трактоваться как задача об апериодическом движении по квазиконическому сечению с переменным параметром (6.14) при наличии возмущающей силы вида (7.1). Различные значения k влияют на геометрический и динамический параметры промежуточного движения, как это видно из (6.15). Действительно, из (6.15) следует выражение для параметра p^* орбиты

$$\frac{C^2}{\mu} = p^* = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k p \quad , \quad p = a(1-e^2) \quad , \quad (7.2)$$

или для большой полуоси a^* :

$$a^* = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^k a \quad , \quad (7.3)$$

а выражение для динамического элемента $F(\tau)$ определяется формулой (6.64). При $k=0$ имеем совпадение геометрических элементов апериодического и кеплеровского движений, в этом случае промежуточное движение играет важную роль в космогоническом отношении [26], при $k \neq 0$ динамические системы, описываемые уравнением вида (6.65) для промежуточного движения (6.14), актуальны уже с точки зрения количественного прослеживания движения, а не только в космогоническом отношении. Поэтому, для $k \neq 0$, промежуточное движение (6.14) для различных значений k может играть важную роль, например, в задачах

управления, в динамике космического полета и других нестационарных задачах механики, в которых требуется отслеживание движения исследуемого тела по орбите на определенном заданном интервале времени.

Рассмотрим эволюцию систем элементов a , e , ω в задаче Гильдена-Мещерского для двух случаев параметра орбит $k=0$ и $k=-1$. Для того, чтобы обеспечить полноту системы уравнений для оскулирующих элементов a , e , и ω , присоединим к выражениям \dot{a} , \dot{e} и $\dot{\omega}$, определяемым к примеру из (6.68), соотношение для истинной аномалии $\varphi = \tilde{u} - \omega$, учитывая интеграл площадей задачи Гильдена-Мещерского:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{2k} \frac{C(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} - \frac{d\omega}{dt}. \quad (7.4)$$

Теперь для $k=0$ из (6.68) и (7.1), с учетом (7.4), имеем систему для оскулирующих элементов a_1 , e_1 , ω_1 :

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -a_1 \frac{1+2e_1\cos\varphi+e_1^2}{1-e_1^2} \frac{\dot{\mu}}{\mu}, \\ \frac{de_1}{dt} &= -(e_1+\cos\varphi) \frac{\dot{\mu}}{\mu}, \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= -\frac{\sin\varphi}{e_1} \frac{\dot{\mu}}{\mu}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{C(1+e_1\cos\varphi)^2}{a_1^2(1-e_1^2)^2} + \frac{\sin\varphi}{e_1} \frac{\dot{\mu}}{\mu}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Соответственно, для $k=-1$ из (6.68), (7.1) и (7.4) получим систему для оскулирующих элементов a_2 , e_2 , ω_2 :

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 2a_2^2 \sqrt{\frac{a_2(1-e_2^2)}{\mu_0}} \frac{e_2\sin\varphi}{(1+e_2\cos\varphi)} \left(\frac{\ddot{\mu}}{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2}\right), \\ \frac{de_2}{dt} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 \frac{[a_2(1-e_2^2)]^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\sin\varphi}{(1+e_2\cos\varphi)} \left(\frac{\ddot{\mu}}{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2}\right), \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 \frac{[a_2(1-e_2^2)]^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{1}{e_2} \frac{\cos\varphi}{(1+e_2\cos\varphi)} \left(\frac{\ddot{\mu}}{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2}\right), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \frac{C(1+e_2\cos\varphi)^2}{a_2^2(1-e_2^2)^2} - \frac{d\omega_2}{dt}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Сравним системы для элементов (7.5) и (7.6) [126]. Для этого проведем численное интегрирование указанных систем в предположении изменения массы $\mu(t)$ по закону Эддингтона-Джинса

$$\dot{\mu} = \alpha\mu^n \quad , \quad 0,4 \leq n \leq 4,4 \quad , \quad (7.7)$$

где α – малая отрицательная постоянная, а интервал для n наиболее характерный для истечения массы звезд в форме корпускулярного или фотонного излучения. В этом случае система (7.5) принимает вид ($k = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\mu} &= -a_1 \frac{1 + 2e_1 \cos\varphi + e_1^2}{(1 - e_1^2)} \frac{1}{\mu} \quad , \\ \frac{de_1}{d\mu} &= -(e_1 + \cos\varphi) \frac{1}{\mu} \quad , \\ \frac{d\omega_1}{d\mu} &= -\frac{\sin\varphi}{e_1} \frac{1}{\mu} \quad , \\ \frac{d\varphi}{d\mu} &= \frac{C(1 + e_1 \cos\varphi)^2}{a_1^2(1 - e_1^2)^2} \frac{1}{\alpha\mu^n} + \frac{\sin\varphi}{e_1} \frac{1}{\mu} \quad , \end{aligned} \quad (7.8)$$

где вместо t принята новая независимая переменная $\mu(t)$. Соответственно, для системы (7.6) получим ($k = -1$):

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{d\mu} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 2a_2^2 \sqrt{\frac{a_2(1 - e_2^2)}{\mu_0}} \frac{e_2 \sin\varphi}{(1 + e_2 \cos\varphi)} \alpha(n - 2)\mu^{n-2} \quad , \\ \frac{de_2}{d\mu} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 \frac{[a_2(1 - e_2^2)]^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\sin\varphi}{(1 + e_2 \cos\varphi)} \alpha(n - 2)\mu^{n-2} \quad , \\ \frac{d\omega_2}{d\mu} &= -\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 \frac{[a_2(1 - e_2^2)]^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{1}{e_2} \frac{\cos\varphi}{(1 + e_2 \cos\varphi)} \alpha(n - 2)\mu^{n-2} \quad , \\ \frac{d\varphi}{d\mu} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \frac{C(1 + e_2 \cos\varphi)^2}{a_2^2(1 - e_2^2)^2} \frac{1}{\alpha\mu^n} - \frac{d\omega_2}{d\mu} \quad . \end{aligned} \quad (7.9)$$

Системы (7.8) и (7.9) решаем численно методом Рунге-Кутты. Рассмотрим начальные условия для эксцентриситета $0 < e < 1$, т.е. первоначальное движение выбираем эллиптическим. В случае, когда начальное значение эксцентриситета равно нулю, рассматриваем уже не системы (7.8) и (7.9), а исходные уравнения движения задачи Гильдена-

Мещерского в прямоугольных координатах x, y, z и численное интегрирование применяем непосредственно к этим уравнениям, как это рассматривалось, например, в работе [119]. Для сравнения эволюции элементов систем (7.8) и (7.9) выбираем одинаковые начальные значения $a_0 = 1, e_0 = 0,2, \omega_0 = 0, \varphi_0 = 0$. Начальное значение массы μ выбираем $\mu_0 = 1$. Закон изменения массы (7.7) рассматриваем для случаев $n = 1, n = 2, n = 3$. Для случая $k = -1$ системы (7.9) дополнительно рассмотрены начальные значения эксцентриситета $e_0 = 0,5$ и $e_0 = 0,9$.

Результаты численного интегрирования приводятся на рисунках 7.1–7.24. Показано поведение элементов a, e, ω в зависимости от $\mu(t)$ для различных законов изменения массы $\mu(t)$. Рисунки 7.1–7.24 дают возможность сравнить поведение элементов орбит для различных рассмотренных значений k исходного промежуточного движения.

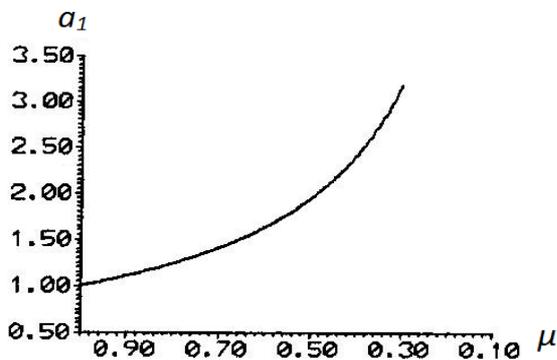


Рисунок 7.1 – Зависимость большой полуоси от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu$, $e_0 = 0,2, \omega_0 = 0$

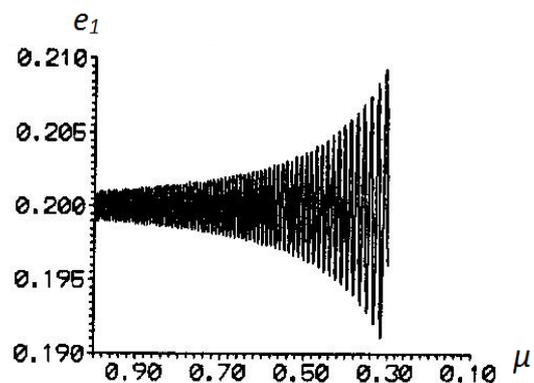


Рисунок 7.2 – Зависимость эксцентриситета от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu$

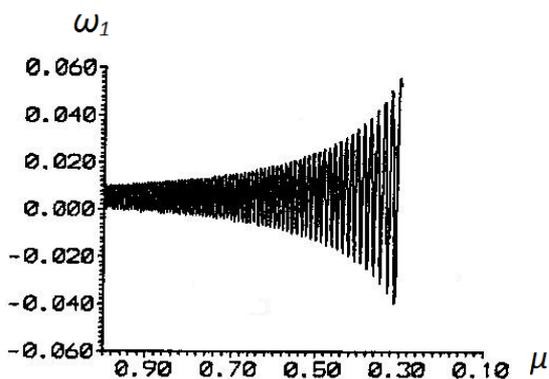


Рисунок 7.3 – Зависимость аргумента перигенна от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu$

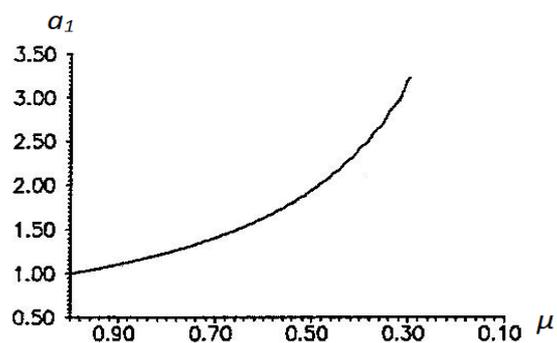


Рисунок 7.4 – Зависимость большой полуоси от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^2$, $e_0 = 0,2, \omega_0 = 0$

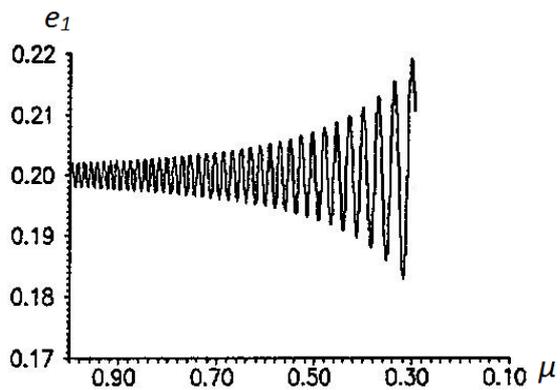


Рисунок 7.5 – Зависимость эксцентриситета от массы;
 $\dot{\mu} = -0,001\mu^2$

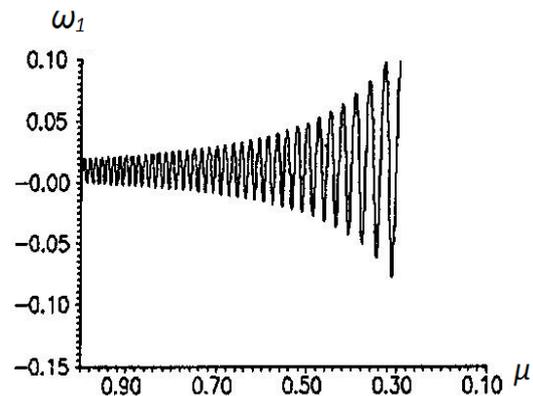


Рисунок 7.6 – Зависимость аргумента перигенна от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^2$

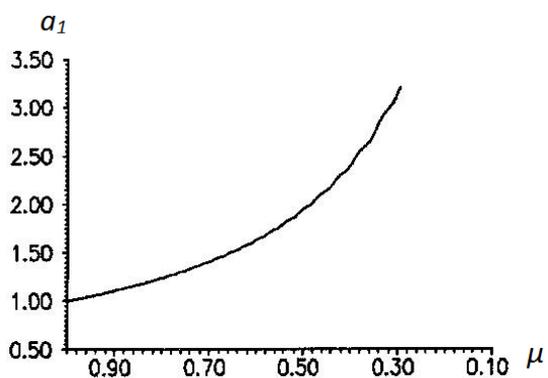


Рисунок 7.7 – Зависимость большой полуоси от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$,
 $e_0 = 0,2, \omega_0 = 0$

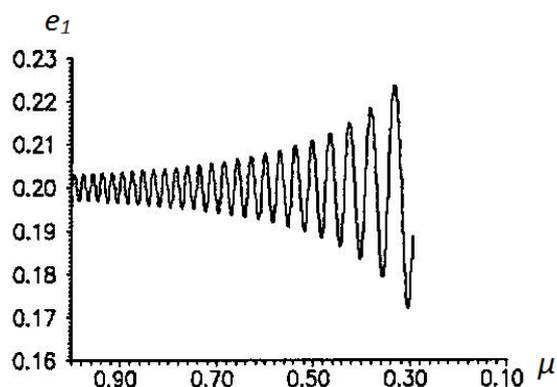


Рисунок 7.8 – Зависимость эксцентриситета от массы;
 $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

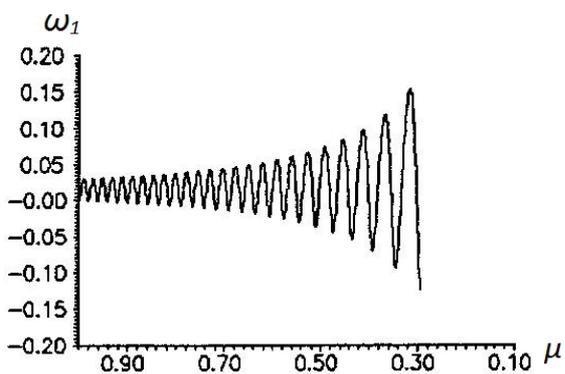


Рисунок 7.9 – Зависимость аргумента перигенна от массы;
 $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

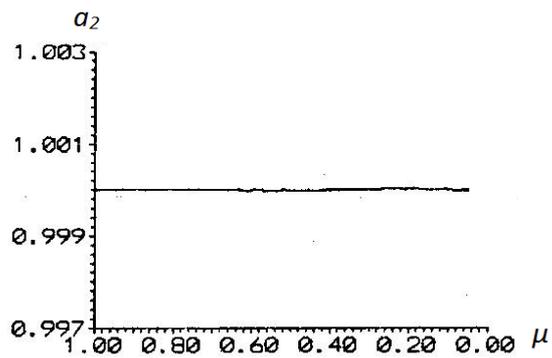


Рисунок 7.10 – Зависимость элемента a_2 от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu$,
 $e_0 = 0,2, \omega_0 = 0$

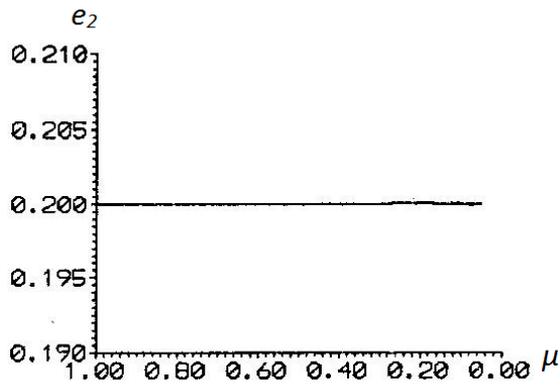


Рисунок 7.11 – Зависимость эксцентриситета от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu$

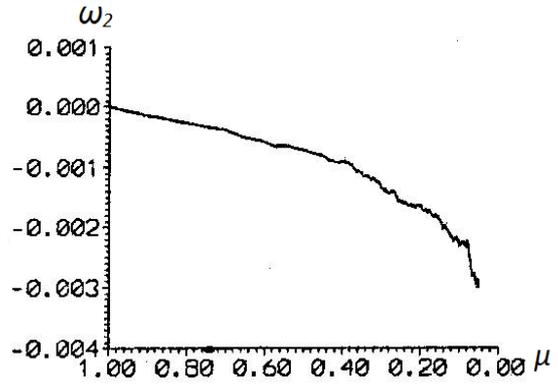


Рисунок 7.12 – Зависимость аргумента перицентра от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu$

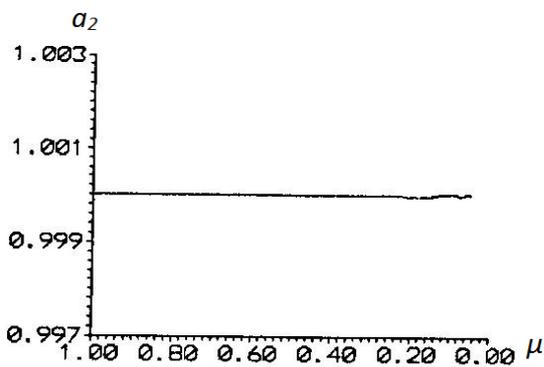


Рисунок 7.13 – Зависимость элемента a_2 от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^2$, $e_0 = 0,2$, $\omega_0 = 0$

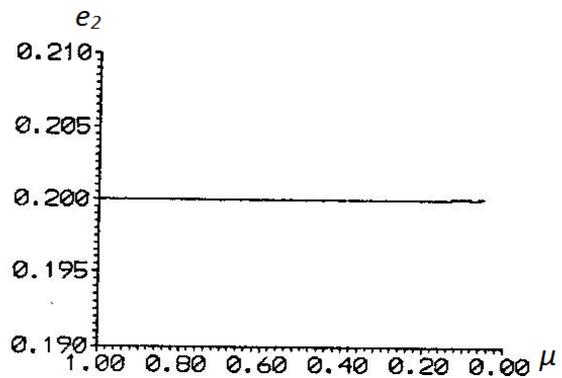


Рисунок 7.14 – Зависимость эксцентриситета от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^2$

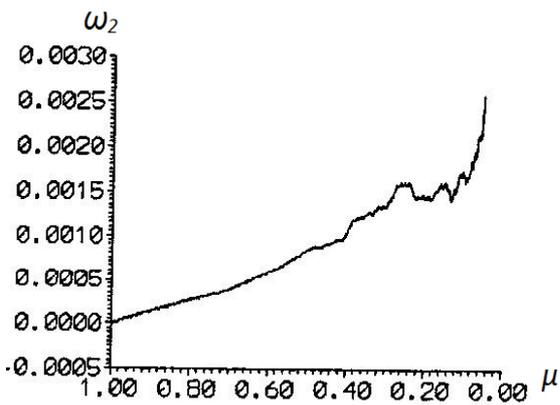


Рисунок 7.15 – Зависимость аргумента перицентра от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^2$

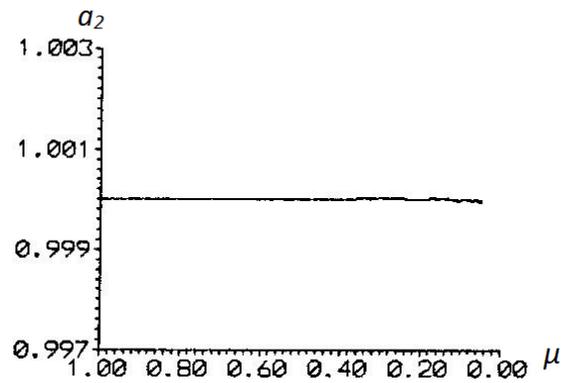


Рисунок 7.16 – Зависимость элемента a_2 от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$, $e_0 = 0,2$, $\omega_0 = 0$

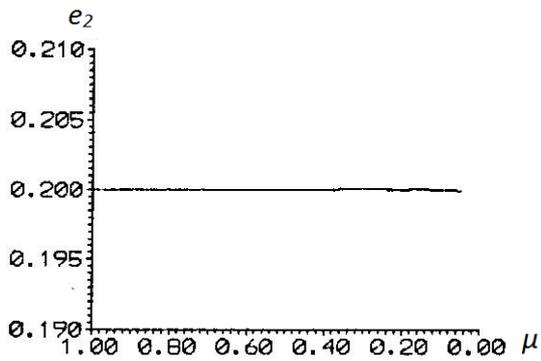


Рисунок 7.17 – Зависимость эксцентриситета от массы;
 $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

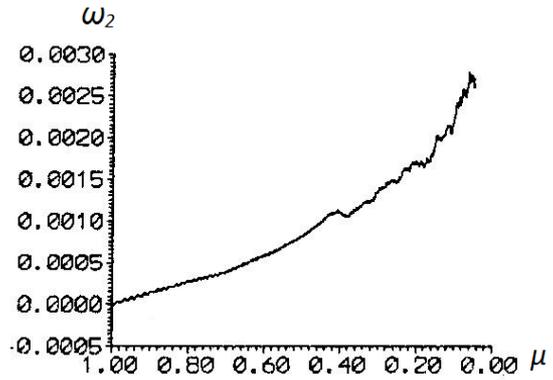


Рисунок 7.18 – Зависимость аргумента перицентра от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

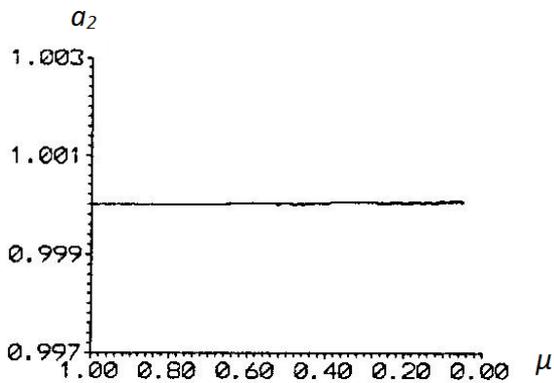


Рисунок 7.19 – Зависимость элемента a_2 от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$, $e_0 = 0,5$, $\omega_0 = 0$

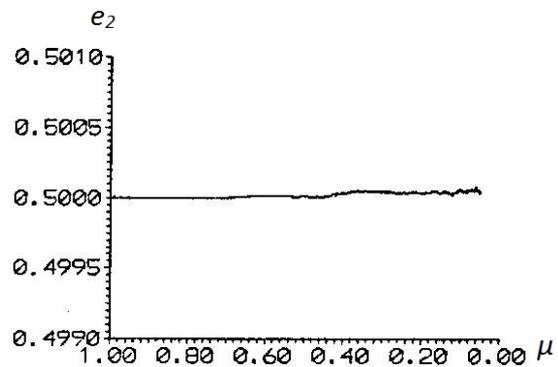


Рисунок 7.20 – Зависимость эксцентриситета от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

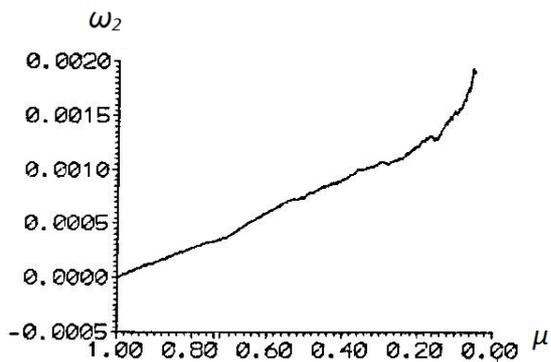


Рисунок 7.21 – Зависимость аргумента перицентра от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

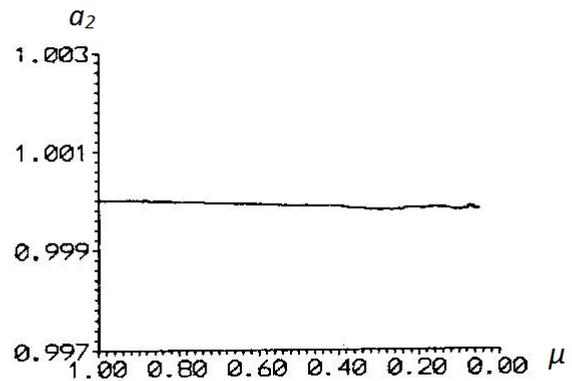


Рисунок 7.22 – Зависимость элемента a_2 от массы; $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$, $e_0 = 0,9$, $\omega_0 = 0$

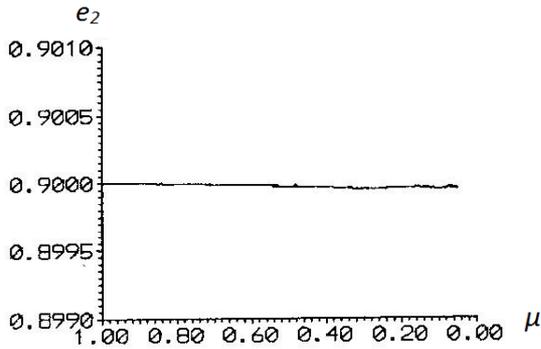


Рисунок 7.23 – Зависимость эксцентриситета от массы;
 $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

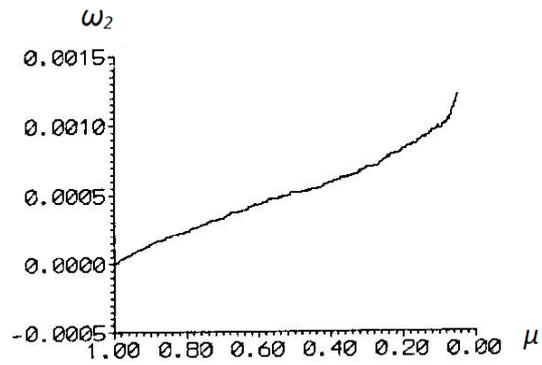


Рисунок 7.24 – Зависимость аргумента перицентра от массы;
 $\dot{\mu} = -0,001\mu^3$

Для случая $k = 0$ аperiодического движения по коническому сечению виден рост большой полуоси и отсутствие вековых вариаций эксцентриситета и аргумента перицентра. Для случая $k = -1$ аperiодического движения по квазиконическому сечению с переменным параметром элемент a_2 остается практически постоянным, поскольку в (7.2) выбором элемента a_2 в этом случае сразу отделяется эффект влияния изменения массы, элемент e_2 также остается практически постоянным, а элемент ω_2 во всех случаях дает монотонные изменения, в случае экспоненциальной убыли массы ($n = 1$) ω_2 убывает, в случае изменения массы по закону Эддингтона-Джинса (7.7), при значениях показателя $n = 2$, $n = 3$, ω_2 растет. Полученный результат качественно отличается от поведения аналогичного элемента для системы (7.8) ($k = 0$), где ω_1 испытывает колебания с увеличивающейся амплитудой, и подтверждает результат, найденный А. Депри и др. [127], по обнаружению эффекта вращения линии апсид в задаче Гильдена-Мещерского, отмечается малость величины эффекта, что также видно из приведенных нами рисунков. Из результатов численного интегрирования видно, что указанные элементы для аperiодического движения с переменным параметром ($k = -1$) лучше описывают фактическое движение, чем в случае ($k = 0$), поскольку испытывают значительно меньшие отклонения в процессе эволюции, вплоть до убыли массы почти до нуля. Приведены таблицы 7.1–7.4, в которых даются численные значения максимумов и минимумов эксцентриситета и других соответствующих параметров орбит для различных рассмотренных случаев.

Таблица 7.1 - Максимумы и минимумы эксцентриситета и соответствующие значения параметров системы (7.8) с $k = 0$ и с начальными условиями $a_0 = 1$, $e_0 = 0.2$, $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$; $\dot{m} = -0.001 m^3$

Масса	Большая полуось	Эксцентриситет	Линия апсид	Истинная аномалия
1. 00000	1. 00000	. 20000	. 00000	. 00000
. 90490	1. 09940	. 19664	. 01019	29. 90646
. 85390	1. 16586	. 20391	. 01579	45. 79227
. 79690	1. 24182	. 19560	. 01847	60. 91084
. 76190	1. 30144	. 20485	. 01748	70. 97256
. 69790	1. 41005	. 19427	. 01716	86. 12825
. 65890	1. 49750	. 20644	. 01566	96. 01678
. 61390	1. 59414	. 19268	. 01333	105. 09970
. 53791	1. 82246	. 20952	. 01529	121. 12310
. 44491	2. 16748	. 18641	. 02003	136. 40670
. 38291	2. 53634	. 21826	. 02681	146. 35500
. 30491	3. 10098	. 17209	. 02115	155. 27900
. 20891	4. 62500	. 25828	. 06115	165. 18870
. 16091	5. 62991	. 10928	-. 00203	167. 87940
. 10000	10. 17483	. 40823	. 33515	171. 49720

Таблица 7.2 - Максимумы и минимумы эксцентриситета и соответствующие значения параметров системы (7.9) с $k = -1$ и с начальными условиями $a_0 = 1$, $e_0 = 0.2$, $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$; $\dot{m} = -0.001 m^3$

Масса	Большая полуось	Эксцентриситет	Линия апсид	Истинная аномалия
1. 0000000	1. 000000	. 2000000	. 00000000	. 00000
. 5059063	. 999999	. 2000026	. 00080107	382. 74830
. 4569070	1. 000002	. 2000090	. 00096079	511. 74820
. 4219074	. 999998	. 1999996	. 00108822	634. 12430
. 3499084	1. 000021	. 2000532	. 00116045	1063. 79500
. 3219087	1. 000015	. 2000395	. 00123282	1306. 49800
. 3119088	1. 000021	. 2000523	. 00126778	1409. 14900
. 2619095	1. 000017	. 2000429	. 00148472	2113. 42900
. 2579095	1. 000021	. 2000520	. 00147479	2198. 30200
. 1199094	. 999998	. 1999964	. 00212865	11548. 69000
. 1169094	1. 000000	. 2000015	. 00215239	12157. 43000
. 1059093	. 999990	. 1999785	. 00215577	15097. 59000
. 0550000	. 999970	. 1999276	. 00265516	58230. 30000

Таблица 7.3 - Максимумы и минимумы эксцентриситета и соответствующие значения параметров системы (7.9) с $k = -1$ и с начальными условиями $a_0 = 1, e_0 = 0.5, \omega_0 = 0, \varphi_0 = 0; \dot{m} = -0.001 m^3$

Масса	Большая полуось	Эксцентриситет	Линия апсид	Истинная аномалия
1.0000000	1.000000	.5000000	.00000000	.00000
.7969026	1.000001	.5000013	.00027243	76.27394
.6899040	1.000003	.5000032	.00041428	130.70170
.5619056	1.000026	.5000224	.00068017	273.31710
.5179062	1.000015	.5000125	.00073442	402.65510
.4549070	1.000013	.5000115	.00084147	602.55060
.3459084	1.000064	.5000558	.00100019	1467.80700
.2529096	1.000035	.5000306	.00108973	3649.02500
.2159096	1.000054	.5000467	.00117846	5303.58200
.1729095	1.000060	.5000519	.00129204	8747.02600
.1229094	1.000026	.5000222	.00144146	18175.48000
.1029093	1.000081	.5000700	.00154505	25401.33000
.0879093	1.000037	.5000324	.00156977	37343.24000
.0819092	1.000071	.5000619	.00161034	42751.59000
.0550000	1.000073	.5000635	.00195567	86632.99000

Таблица 7.4 - Максимумы и минимумы эксцентриситета и соответствующие значения параметров системы (7.9) с $k = -1$ и с начальными условиями $a_0 = 1, e_0 = 0.9, \omega_0 = 0, \varphi_0 = 0; \dot{m} = -0.001 m^3$

Масса	Большая полуось	Эксцентриситет	Линия апсид	Истинная аномалия
1.0000000	1.0000000	.9000000	.000000000	.00000
.9809848	.9999999	.8999999	.000027932	7.76048
.9267204	.9999955	.8999988	.000104793	30.02029
.9090540	.9999970	.8999993	.000128956	36.02209
.8898221	.9999931	.8999985	.000151285	59.26981
.8838221	.9999990	.8999999	.000160698	59.67323
.8751506	.9999907	.8999979	.000172345	62.89320
.5709304	.9998977	.8999761	.000464162	1984.54300
.2169344	.9998429	.8999627	.000802206	47854.68000
.1879344	.9998133	.8999556	.000847965	71270.40000
.1569343	.9998588	.8999668	.000890249	*****
.1109342	.9997869	.8999494	.000965193	*****
.0729341	.9998655	.8999684	.001060205	*****
.0550000	.9998509	.8999649	.001159997	*****

Полученные данные позволяют провести сравнительный анализ эволюции рассматриваемых систем элементов.

Аналогично можно провести сравнительный анализ систем оскулирующих элементов промежуточного движения (6.14) для других значений k и подбирать для различных случаев изменения массы систему элементов, наилучшим образом описывающую фактическое движение в нестационарных двойных системах.

УСТОЙЧИВОСТЬ СПИРАЛЬНЫХ И КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

8.1. Вводные замечания

В стационарных гравитирующих системах с осевой симметрией имеется определенный класс круговых орбит, играющих особую роль в динамике таких систем [10]. Существование и устойчивость круговых орбит при рассмотрении движения материальной точки в осесимметричных гравитационных полях исследованы в работах Г. Н. Дубошина [128], С. Чандрасекара [11], Н. Г. Четаева [129], В. Г. Демина [130], В. Г. Дегтярева [131] и др. В этих работах устанавливается устойчивость круговых движений в стационарных осесимметричных гравитационных полях. Приложение критериев устойчивости круговых орбит к задаче двух неподвижных центров дано в работах В. Г. Дегтярева и Л. С. Евдокимовой [132], Н. П. Питьева [133, 134].

Реальные крупномасштабные гравитирующие системы по существу являются нестационарными системами [10, 26, 135, 136]. Существование и устойчивость спиральных и круговых орбит при рассмотрении движения материальной точки в нестационарных осесимметричных гравитационных полях исследованы в работах [137-141]. В этих работах устанавливается устойчивость широкого класса спиральных и круговых движений для полей тяготения различной структуры. Многообразие рассмотренных спиральных и круговых орбит определяется темпом изменения функции времени, характеризующей нестационарность системы, величиной секторной скорости движения материальной точки, набором начальных параметров. Получено [139] обобщение условий устойчивости круговых движений С. Чандрасекара [11], В. Г. Демина [130]. Приложение критериев устойчивости круговых орбит к устойчивости кольцевой структуры пекулярных галактик дано в работе [142].

В наиболее важном случае осесимметричных гравитирующих систем можно выделить несколько типов силовых полей таких систем. Согласно С. Чандрасекару [11], наиболее общая форма гравитационного потенциала $U(r, z, t)$ нестационарной системы (галактика) дается выражением

$$U(r, z, t) = \frac{\ddot{\varphi}}{2\varphi}(r^2 + z^2) + \frac{1}{\varphi^2} \tilde{U}\left(\frac{r}{\varphi}, \frac{z}{\varphi}\right), \quad (8.1)$$

где r, z – цилиндрические координаты; φ – функция времени; \tilde{U} – здесь и во всех последующих случаях достаточно произвольная функция своих аргументов.

Силовая функция нестационарной гравитирующей системы может принадлежать, кроме того, к одному из следующих типов:

$$U(r, z, t) = \gamma^2 \tilde{U}(r\gamma, z\gamma); \quad (8.2)$$

$$U(r, z, t) = \gamma \tilde{U}(r, z), \quad (8.3)$$

где γ – некоторая функция времени.

Примером силовой функции типа (8.2) является силовая функция ограниченной прямолинейной задачи трех тел переменной массы [143]. Примером силовой функции типа (8.3) служит силовая функция задачи двух неподвижных центров с переменной массой либо с переменной гравитационной постоянной [143, 144].

Будем в дальнейшем рассматривать гравитирующие системы с осевой симметрией, силовые функции которых относятся к одному из указанных типов (8.1) – (8.3). Исследование устойчивости движений в таких силовых полях рассматриваем на основе анализа устойчивости неавтономных динамических систем, приводимых к автономному виду [145]. Ниже выясним условия существования и устойчивости в смысле А. М. Ляпунова [146] широкого класса спиральных и круговых движений в нестационарных осесимметричных гравитационных полях указанных типов.

8.2. Устойчивость одного класса спиральных орбит в нестационарной звездной системе с осевой симметрией

Рассмотрим движение материальной точки (звезды) в регулярном силовом поле нестационарной звездной системы с осевой симметрией [138]. Пусть силовая функция $U(r, z, t)$ этой звездной системы имеет вид [11]:

$$U(r, z, t) = \frac{\ddot{\varphi}}{2\varphi}(r^2 + z^2) + \frac{1}{\varphi^2} \tilde{U}\left(\frac{r}{\varphi}, \frac{z}{\varphi}\right), \quad (8.4)$$

где r, z – цилиндрические координаты; φ – непрерывная, монотонная, ограниченная функция времени, \tilde{U} – произвольная функция своих аргументов.

Систему цилиндрических координат r, λ, z выбираем так, чтобы ось z совпала с осью симметрии системы. Тогда дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{r^3}; \\ \dot{\Omega} = 0; \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (8.5)$$

где $\Omega = r^2 \dot{\lambda}$ – удвоенная секторная скорость.

Уравнения движения (8.5) допускают частное решение [138]:

$$r = r_0 \varphi, \quad \dot{r} = r_0 \dot{\varphi}, \quad \Omega = \Omega_0, \quad z = z_0 \varphi, \quad \dot{z} = z_0 \dot{\varphi}, \quad (8.6)$$

где r_0, z_0 – постоянные, которому соответствует некоторое спиральное движение. При этом условия существования спиральных орбит (8.6) имеют вид

$$n(t) = \sqrt{\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0}; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = z_0 \ddot{\varphi}, \quad (8.7)$$

где $n(t)$ – угловая скорость движения, а индекс 0 показывает, что взято значение функции в точке $r = r_0 \varphi, z = z_0 \varphi$.

Исследуем устойчивость в смысле Ляпунова [146] спирального движения (8.6) относительно величин $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$. Проведем замену переменных

$$r = \rho \varphi; \quad \lambda = \lambda; \quad z = \zeta \varphi; \quad d\tau = \frac{1}{\varphi^2} dt. \quad (8.8)$$

В результате система (8.5) запишется в виде

$$\begin{cases} \rho'' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho} + \frac{\sigma^2}{\rho^3}; \\ \sigma' = 0; \\ \zeta'' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta}, \end{cases} \quad (8.9)$$

где $\sigma = \rho^2 \lambda' = \Omega$. Уравнения движения (8.9) описывают движение рассматриваемой материальной точки (звезды) в изображающем пространстве-времени $(\rho, \lambda, \zeta, \tau)$ в стационарном силовом поле $\tilde{U}(\rho, \zeta)$. Соответственно частное решение (8.6) системы (8.5) переходит в частное решение

$$\rho = \rho_0 = r_0; \quad \rho' = 0; \quad \sigma = \sigma_0 = \Omega_0; \quad \zeta = \zeta_0 = z_0; \quad \zeta' = 0 \quad (8.10)$$

системы (8.9), соответствующее некоторому круговому движению.

Новая переменная τ определяется преобразованием

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varphi^2}, \quad (8.11)$$

из которого вытекает, что τ монотонно меняется со временем t , причем τ увеличивается с ростом t . Следовательно, в задаче об устойчивости движения новая переменная τ может играть роль времени t . В конечном итоге в силу преобразований (8.8) исследование устойчивости движения (8.6) системы (8.5) сводится к исследованию устойчивости кругового движения (8.10) системы (8.9).

Необходимые и достаточные условия устойчивости кругового движения (8.10) по отношению к величинам ρ , ρ' , σ , ζ , ζ' имеют вид [129, 130]:

$$\begin{cases} \left[\tilde{U}''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} \tilde{U}'_{\rho} + \tilde{U}''_{\zeta\zeta} \right]_0 < 0; \\ \left[\tilde{U}''_{\zeta\zeta} \left(\tilde{U}''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} \tilde{U}'_{\rho} \right) - \tilde{U}''_{\rho\zeta} \right]_0 > 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

а условия выполнения кругового движения будут следующими:

$$\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho} \right)_0 + \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^3} = 0; \quad \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta} \right)_0 = 0, \quad (8.13)$$

причем индекс 0 в формулах (8.12), (8.13) показывает, что взято значение функции в точке ρ_0, ζ_0 .

Исследование устойчивости круговых движений (8.10) проводится аналогично исследованию, выполненному В.Г. Деминым [130]. Отметим, что достаточность условий (8.12) устанавливается с помощью функции V Ляпунова

$$V = 2V_2 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_1^2 + \lambda_3, \quad (8.14)$$

где V_1, V_2 – интегралы уравнений возмущенного движения:

$$\begin{aligned} V_1 &= x_3 = const; \\ V_2 &= \frac{1}{2} \left[x_2^2 + x_5^2 + \frac{(\sigma + x_3)^2}{(\rho + x_1)^2} \right] - \tilde{U}(\rho_0 + x_1, \zeta_0 + x_4) = h, \end{aligned} \quad (8.15)$$

причем x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – вводимые обычным способом возмущения:

$$x_1 = \rho - \rho_0; \quad x_2 = \rho'; \quad x_3 = \sigma - \sigma_0; \quad x_4 = \zeta - \zeta_0; \quad x_5 = \zeta', \quad (8.16)$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – постоянные:

$$\lambda_1 = -\frac{2\sigma_0}{\rho_0^2}; \quad \lambda_3 = -\frac{\sigma_0^2}{\rho_0^2} + 2\tilde{U}_0(\rho_0, \zeta_0), \quad (8.17)$$

выбираются так, чтобы функция V удовлетворяла условиям Ляпунова [146] и была знакоопределенной. Указанная функция V отличается от функции V Ляпунова, приводимой в работе В.Г. Демина [130], аддитивной постоянной λ_3 .

При выполнении условий устойчивости (8.12) круговых орбит (8.10) исходное спиральное движение (8.6) будет устойчиво по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$. Условия устойчивости спиральных орбит (8.6) имеют вид [138]:

$$\begin{aligned} &\left[\left(U_{rr}'' + \frac{3}{r} U_r' + U_{zz}'' \right)_0 < 5 \frac{\ddot{\phi}}{\phi}; \right. \\ &\left. \left[\left(U_{zz}'' - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) \left(U_{rr}'' + \frac{3}{r} U_r' - 4 \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) - U_{rz}''^2 \right]_0 > 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

где индекс 0 показывает, что взято значение функции в точке $r = r_0\varphi$, $z = z_0\varphi$. Условия (8.18) можно представить в виде

$$\left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r \right)_0 < 4 \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi};$$

$$\left[\left(U''_{zz} - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \right) \left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r - 4 \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \right) - U''_{rz} \right]_0 > 0. \quad (8.19)$$

Рассмотренное движение (8.6) представляет собой широкий класс спиральных орбит, многообразие которого определяется функцией φ , величиной секторной скорости $\Omega/2$ и набором параметров r_0, z_0 . Плоские спиральные орбиты ($z_0 = 0$) являются частным случаем спиральных орбит (8.6). При достаточно медленном изменении функции φ ($\dot{\varphi} \approx 0$) рассматриваемые спиральные орбиты (8.6) будут близки к соответствующим стационарным круговым орбитам.

8.3. Существование устойчивых спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле

Рассмотрим движение материальной точки в нестационарном осесимметричном гравитационном поле. Выберем систему координат так, чтобы ось z совпала с осью симметрии гравитационного поля. Пусть силовая функция задачи в цилиндрических координатах имеет вид [140]:

$$U(r, z, t) = \gamma^2 \tilde{U}(r\gamma, z\gamma), \quad (8.20)$$

где

$$\gamma(t) = \frac{1}{\alpha t + \beta}, \quad (\alpha, \beta - const) \quad (8.21)$$

– непрерывная, положительная, ограниченная вместе с первой производной функция времени на рассматриваемом интервале времени.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки таковы:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{r^3}; \\ \dot{\Omega} = 0; \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (8.22)$$

где $\Omega = r^2 \dot{\lambda}$ – удвоенная секторная скорость.

Уравнения движения (8.22) допускают частное решение

$$r = r_0(\alpha t + \beta); \quad \dot{r} = \alpha r_0; \quad \Omega = \Omega_0; \quad z = z_0(\alpha t + \beta); \quad \dot{z} = \alpha z_0, \quad (8.23)$$

которому соответствует некоторое спиральное движение. При этом должны выполняться условия существования спиральных орбит в виде

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 + \frac{\Omega_0^2}{r_0^3 (\alpha t + \beta)^3} = 0; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = 0, \quad (8.24)$$

где индекс 0 означает, что взято значение функции в точке

$$r = r_0(\alpha t + \beta); \quad z = z_0(\alpha t + \beta).$$

Исследуем частное решение (8.23) системы (8.22), следуя [140], на устойчивость в смысле Ляпунова [146] относительно величин $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$. Введем возмущения

$$\begin{aligned} r &= r_0(\alpha t + \beta) + x_1; & \dot{r} &= \alpha r_0 + x_2; & \Omega &= \Omega_0 + x_3; \\ z &= z_0(\alpha t + \beta) + x_4; & \dot{z} &= \alpha z_0 + x_5, \end{aligned} \quad (8.25)$$

тогда уравнения возмущенного движения запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{(\Omega_0 + x_3)^2}{[r_0(\alpha t + \beta) + x_1]^3}; \\ \dot{x}_3 = 0; \\ \dot{x}_4 = x_5; \\ \dot{x}_5 = \frac{\partial U}{\partial x_4}, \end{cases} \quad (8.26)$$

где

$$U = U[r_0(\alpha t + \beta) + x_1, z_0(\alpha t + \beta) + x_4, t]. \quad (8.27)$$

Система (8.26) обладает интегралом

$$V_1 = x_3 = const. \quad (8.28)$$

Проведем линейную подстановку

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1(\alpha t + \beta); & x_2 &= \alpha \bar{x}_1 + \frac{\bar{x}_2}{\alpha t + \beta}; & x_3 &= \bar{x}_3; \\ x_4 &= \bar{x}_4(\alpha t + \beta); & x_5 &= \alpha \bar{x}_4 + \frac{\bar{x}_5}{\alpha t + \beta} \end{aligned} \quad (8.29)$$

и замену переменной

$$d\tau = \frac{1}{(\alpha t + \beta)^2} dt. \quad (8.30)$$

Для функции (8.27) имеем

$$U[r_0(\alpha t + \beta) + x_1, z_0(\alpha t + \beta) + x_4, t] = \frac{1}{(\alpha t + \beta)^2} \tilde{U}(r_0 + \bar{x}_1, z_0 + \bar{x}_4), \quad (8.31)$$

тогда, как нетрудно убедиться, система (8.26) обладает интегралом энергии

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(x_2 - \frac{\alpha x_1}{\alpha t + \beta} \right)^2 + \left(x_5 - \frac{\alpha x_4}{\alpha t + \beta} \right)^2 + \frac{(\Omega_0 + x_3)^2}{[r_0(\alpha t + \beta) + x_1]^2} \right\} - \\ &- U[r_0(\alpha t + \beta) + x_1, z_0(\alpha t + \beta) + x_4, t] = \frac{h}{(\alpha t + \beta)^2}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Для исследования устойчивости частного решения (8.23) по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$ составим функцию Ляпунова в виде связки интегралов (8.28) и (8.32), пользуясь способом построения функции Ляпунова по Н. Г. Четаеву [129].

Для функции времени $\gamma(t)$ (8.21) в случае $\alpha > 0, \beta > 0$ рассматривается интервал времени (t_0, ∞) , в случае $\alpha > 0, \beta < 0$ рассматривается интервал времени (t_0, ∞) , где $t_0 > \frac{|\beta|}{\alpha}$, в случае $\alpha < 0, \beta > 0$ рассматривается конечный интервал времени (t_0, T) , где $T < \frac{\beta}{|\alpha|}$, на которых функция $\gamma(t)$ остается положительной, ограниченной функцией времени.

Таким образом, для положительной, ограниченной функции $\gamma(t)$, в зависимости от значений параметров α и β , рассматривается интервал времени (t_0, ∞) (случай $\alpha > 0$), либо конечный интервал времени (t_0, T) (случай $\alpha < 0$). Соответственно рассматривается устойчивость спиральных движений (8.23) в силовом поле (8.20) в смысле Ляпунова на интервале времени (t_0, ∞) или устойчивость на конечном интервале времени (t_0, T) по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$.

Рассмотрим случай убывающей положительной, ограниченной на заданном интервале времени функции γ ($\alpha > 0$).

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = 2\lambda_0 V_2(t) + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_1^2 + \lambda_3, \quad (8.33)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{(\alpha t + \beta)^2}; \quad \lambda_2 = \frac{\bar{\lambda}_2}{(\alpha t + \beta)^2};$$

$$\lambda_3 = 2\lambda_0 U_0[r_0(\alpha t + \beta), z_0(\alpha t + \beta), t] - \lambda_0 \frac{\Omega_0^2}{r_0^2(\alpha t + \beta)^2}; \quad (8.34)$$

$\lambda_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ – постоянные числа. Производная функции V в силу уравнений возмущенного движения (8.26) будет знакопостоянной отрицательной:

$$\dot{V} = -\frac{2\alpha}{(\alpha t + \beta)^3} \left[2\lambda_0 h + \bar{\lambda}_1 V_1 + \bar{\lambda}_2 V_1^2 + 2\lambda_0 \tilde{U}_0 - \lambda_0 \frac{\Omega_0^2}{r_0^2} \right] \quad (8.35)$$

при подборе λ_0 и выполнении условия

$$U_0 - \frac{\Omega_0^2}{2r_0^2(\alpha t + \beta)^2} \geq U - \frac{(\Omega_0 + x_3)^2}{2[r_0(\alpha t + \beta) + x_1]^2} \quad (8.36)$$

максимальности измененной силовой функции $U - \frac{\Omega^2}{2r^2}$ на точках невозмущенной траектории $r_0(\alpha t + \beta)$, $z_0(\alpha t + \beta)$. Следовательно, согласно первой теореме Ляпунова [146] второй методы, невозмущенное движение (8.23) устойчиво, если функция V знакоопределенная положительная, т.е. для этого должна существовать не зависящая от t определенно-положительная функция W , такая, что разность $V - W$ представляет собой функцию положительную. В качестве функции W , аналогично В. Г. Демину [130], рассмотрим функцию Ляпунова, составленную для стационарного осесимметричного силового поля $\tilde{U}(r, z)$, соответствующего силовой функции $\tilde{U}(r\gamma, z\gamma)$ при фиксированном значении функции γ равном единице на рассматриваемом интервале времени (t_0, ∞) , тогда

$$W = 2h + \bar{\lambda}_1 x_3 + \bar{\lambda}_2 x_3^2 + \bar{\lambda}_3, \quad (8.37)$$

где

$$\bar{\lambda}_3 = 2\tilde{U}_0(r_0, z_0) - \frac{\Omega_0^2}{r_0^2}. \quad (8.38)$$

Функция W определенно-положительная, если выполняются условия [130]:

$$\begin{cases} \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right)_0 < 0; \\ - \left(\bar{\lambda}_2 + \frac{1}{r_0^2} \right) \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right)_0 + \frac{4}{r_0^3} (\tilde{U}_r')_0 > 0; \\ \left[\left(\bar{\lambda}_2 + \frac{1}{r_0^2} \right) \left[(\tilde{U}_{zz}'')_0 \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right)_0 - (\tilde{U}_{rz}'')_0^2 \right] - \frac{4}{r_0^3} (\tilde{U}_r')_0 (\tilde{U}_{rz}'')_0 \right] > 0, \end{cases} \quad (8.39)$$

где индекс 0 означает, что взято значение соответствующих выражений от функции $\tilde{U}(r, z)$ в точке r_0, z_0 . Условия (8.39) выполняются при выборе $\bar{\lambda}_2$ и соблюдении условий

$$\begin{cases} \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right)_0 < 0; \\ \left[(\tilde{U}_{zz}'')_0 \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right)_0 - (\tilde{U}_{rz}'')_0^2 \right]_0 > 0. \end{cases} \quad (8.40)$$

Следовательно, при выполнении условий (8.40) и условия

$$\tilde{U}_0(r_0, z_0) - \frac{\Omega_0^2}{2r_0^2} \geq \tilde{U}(r_0 + \bar{x}_1, z_0 + \bar{x}_4) - \frac{(\Omega_0 + \bar{x}_3)^2}{2(r_0 + \bar{x}_1)^2} \quad (8.41)$$

максимальности функции $\tilde{U}(r, z) - \frac{\Omega^2}{2r^2}$ в точках $r = r_0, z = z_0$, функция V будет знакоопределенной положительной. Значит, на всем рассматриваемом интервале времени (t_0, ∞) спиральное движение (8.23) устойчиво по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$.

Соответственно, переходя к нестационарной функции $\tilde{U}(r\gamma, z\gamma)$, такой же структуры, что и $\tilde{U}(r, z)$, условия (8.40) принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right)_0 < 0; \\ & \left[\left(\tilde{U}_{zz}'' \right) \left(\tilde{U}_{rr}'' + \frac{3}{r} \tilde{U}_r' \right) - (\tilde{U}_{rz}'')^2 \right]_0 > 0, \end{aligned} \right. \quad (8.42)$$

где индекс 0 означает, что взято значение соответствующих выражений от функции $\tilde{U}(r\gamma, z\gamma)$ в точке $r_0(\alpha t + \beta), z_0(\alpha t + \beta)$.

Теперь, учитывая (8.20), переходя к нестационарной функции $U(r, z, t)$, из условий (8.42) получим условия устойчивости спиральных движений (8.23) в виде

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(U_{rr}'' + \frac{3}{r} U_r' \right)_0 < 0; \\ & \left[\left(U_{zz}'' \right) \left(U_{rr}'' + \frac{3}{r} U_r' \right) - (U_{rz}'')^2 \right]_0 > 0, \end{aligned} \right. \quad (8.43)$$

где индекс 0 означает, что взято значение соответствующих выражений от функции $U(r, z, t)$ в точке $r_0(\alpha t + \beta), z_0(\alpha t + \beta)$.

Отметим, что из условий (8.36) и (8.41) следуют условия существования спиральных орбит в форме (8.24).

Рассмотрим случай возрастающей положительной, ограниченной на заданном интервале времени функции γ ($\alpha < 0$).

Функцию Ляпунова представим в виде

$$V = -2\lambda_0 V_2(t) - \lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_1^2 - \lambda_3. \quad (8.44)$$

Производная функции V в силу уравнений возмущенного движения будет знакопостоянной отрицательной при выполнении условий (8.36). Функцию W составим для стационарного осесимметричного силового поля $\tilde{U}(r, z)$, соответствующего силовой функции $\tilde{U}(r\gamma, z\gamma)$ при фиксированном значении функции γ равном единице на рассматриваемом интервале времени (t_0, T) , тогда функция

$$W = 2h + \bar{\lambda}_1 x_3 + \bar{\lambda}_2 x_3^2 + \bar{\lambda}_3 \quad (8.45)$$

будет определенно-положительной при выполнении условий вида (8.40). Разность $-V - W$ будет положительной функцией, если $t < T$ и выполняются условия вида (8.41). Следовательно, в интервале (t_0, T) функция V – знакоопределенная положительная и спиральные движения (8.23) устойчивы по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$. Соответственно условия устойчивости спиральных движений (8.23) имеют вид (8.43).

Частное решение (8.23) представляет собой широкий класс спиральных орбит, многообразие которых определяется самой функцией γ , темпом ее изменения и набором значений r_0, z_0, Ω_0 . Частным случаем указанных орбит являются плоские спиральные орбиты ($z_0 = 0$). В случае очень медленного изменения функции γ со временем ($\alpha \approx 0$) рассматриваемые спиральные орбиты будут близки к круговым:

$$r = \beta r_0; \quad \dot{r} = 0; \quad \Omega = \Omega_0; \quad z = \beta z_0; \quad \dot{z} = 0. \quad (8.46)$$

Таким образом, в нестационарном осесимметричном гравитационном поле вида (8.20) существуют устойчивые спиральные орбиты (8.23). При прекращении нестационарности силового поля спиральные орбиты переходят в соответствующие устойчивые круговые орбиты.

8.4. Об устойчивости спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле

Рассмотрим движение материальной точки в нестационарном осесимметричном гравитационном поле. Пусть силовая функция задачи имеет вид [137, 141]:

$$U(r, z, t) = f^2 \tilde{U}(rf, zf), \quad (8.47)$$

где $f(t)$ – функция времени, меняющаяся по закону Эддингтона-Джинса

$$\dot{f}(t) = -\alpha f^n(t), \quad (n = 2; 3, \quad \alpha - const), \quad (8.48)$$

и является заданной положительной, ограниченной функцией на рассматриваемом интервале времени. В случае $n = 2$ закон (8.48) соответствует первому закону Мещерского, в случае $n = 3$ закон (8.48) соответствует второму закону Мещерского [22].

В отличие от (8.20) [140] силовая функция (8.47) имеет несколько иную зависимость от времени в случае $n = 3$, и исследование проведем способом пространственно-временных преобразований.

Уравнения движения материальной точки в нестационарном гравитационном поле (8.47) в цилиндрических координатах r, λ, z запишутся в виде

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{r^3}, \\ \dot{\Omega} = 0, \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (8.49)$$

где $\Omega = r^2 \dot{\lambda}$ – есть удвоенная секторная скорость.

Система (8.49) допускает частное решение

$$r = r_0/f(t), \quad \dot{r} = \alpha f^{n-2} r_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad z = z_0/f(t), \quad \dot{z} = \alpha f^{n-2} z_0, \quad (8.50)$$

которому соответствует некоторое спиральное движение. Условия существования спирального движения (8.50) будут следующими

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 + \left(\frac{\Omega_0^2}{r_0^3} + \delta_n^3 \alpha^2 r_0 \right) f^3 = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 + \delta_n^3 \alpha^2 z_0 f^3 = 0, \quad (8.51)$$

где индекс 0 означает, что взято значение функции в точке $r = r_0/f, z = z_0/f$, и введено обозначение $\delta_n^3 = (n-2)f^{2(n-3)}$, причем

$$\delta_n^3 = \begin{cases} 1, & n = 3; \\ 0, & n = 2. \end{cases} \quad (8.52)$$

Исследуем устойчивость частного решения (8.50) относительно величин $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$ [137, 141]. Предварительно проведем замену переменных

$$r = \rho/f, \quad \lambda = \lambda, \quad z = \zeta/f, \quad d\tau = f^2 dt, \quad (8.53)$$

тогда уравнения движения (8.49) запишутся в виде

$$\begin{cases} \rho'' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho} + \frac{\sigma^2}{\rho^3} + \delta_n^3 \alpha^2 \rho, \\ \sigma' = 0, \\ \zeta'' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta} + \delta_n^3 \alpha^2 \zeta, \end{cases} \quad (8.54)$$

где $\sigma = \rho^2 \lambda' = \Omega$.

Соответственно частное решение (8.50) системы (8.49) переходит в частное решение

$$\rho = \rho_0 = r_0, \quad \rho' = 0, \quad \sigma = \sigma_0 = \Omega_0, \quad \zeta = \zeta_0 = z_0, \quad \zeta' = 0, \quad (8.55)$$

системы (8.54), которому соответствует некоторое круговое движение. Таким образом, при помощи соотношений (8.53) исходные уравнения (8.49) переходят в стационарные уравнения (8.54) в изображающем пространстве-времени $(\rho, \lambda, \zeta, \tau)$, а частное решение (8.50) переходит в круговое движение в изображающем пространстве-времени. Поскольку функция f положительная, ограниченная и причем при заданном законе преобразования

$$\frac{d\tau}{dt} = f^2(t), \quad (8.56)$$

на рассматриваемом промежутке изменения t , вместе с ростом t соответственно растет и τ , то исследование на устойчивость решения (8.50) системы (8.49) сводится к исследованию на устойчивость кругового движения (8.55) системы (8.54).

В случае круговых движений (8.55) необходимые и достаточные условия их устойчивости по отношению к величинам $\rho, \rho', \sigma, \zeta, \zeta'$ имеют вид

$$\begin{cases} \left(\tilde{U}_{\rho\rho}'' + \frac{3}{\rho} \tilde{U}'_{\rho} + \tilde{U}_{\zeta\zeta}'' \right)_0 < -5 \delta_n^3 \alpha^2, \\ \left[\left(\tilde{U}_{\zeta\zeta}'' + \delta_n^3 \alpha^2 \right) \left(\tilde{U}_{\rho\rho}'' + \frac{3}{\rho} \tilde{U}'_{\rho} + 4 \delta_n^3 \alpha^2 \right) - \tilde{U}_{\rho\zeta}''^2 \right]_0 > 0, \end{cases} \quad (8.57)$$

а условия выполнения кругового движения будут следующими

$$\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho}\right)_0 + \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^3} + \delta_n^3 \alpha^2 \rho_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta}\right)_0 + \delta_n^3 \alpha^2 \zeta_0 = 0, \quad (8.58)$$

причем индекс 0 в формулах (8.57) и (8.58) означает, что взято значение функции в точке ρ_0, ζ_0 .

Исследование устойчивости круговых движений (8.55) проводится аналогично исследованию В.Г. Демина [130]. Отметим, что достаточность условий (8.57) устанавливается с помощью функции V Ляпунова

$$V = 2V_2 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_1^2 + \lambda_3, \quad (8.59)$$

где V_1, V_2 – интегралы уравнений возмущенного движения, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – постоянные

$$\lambda_1 = -\frac{2\sigma_0}{\rho_0^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{\sigma_0^2}{\rho_0^2} + 2\tilde{U}_0 + \delta_n^3 \alpha^2 (\rho_0^2 + \zeta_0^2), \quad (8.60)$$

выбираются так, чтобы функция V удовлетворяла условиям Ляпунова [146] и была знакоопределенной. Указанная функция V отличается от функции V Ляпунова, приводимой в работе В.Г. Демина [130], аддитивной постоянной λ_3 .

Для закона (8.48) изменения функции $f(t)$ в виде (первый закон Меццерского)

$$\dot{f} = -\alpha f^2, \quad f(t) = \frac{1}{\alpha t + \beta}, \quad (\alpha, \beta - const), \quad (8.61)$$

в случае $\alpha > 0, \beta > 0$ рассматривается интервал времени (t_0, ∞) , в случае $\alpha > 0, \beta < 0$ рассматривается интервал времени (t_0, ∞) , где $t_0 > \frac{|\beta|}{\alpha}$, в случае $\alpha < 0, \beta > 0$ рассматривается конечный интервал времени (t_0, T) , где $T < \frac{\beta}{|\alpha|}$, на которых функция f остается положительной, ограниченной функцией времени.

Для закона (8.48) изменения функции $f(t)$ в виде (второй закон Меццерского)

$$\dot{f} = -\alpha f^3, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t + \beta}}, \quad (\alpha, \beta - \text{const}), \quad (8.62)$$

в случае $\alpha > 0, \beta > 0$ рассматривается интервал времени (t_0, ∞) , в случае $\alpha > 0, \beta < 0$ рассматривается интервал времени (t_0, ∞) , где $t_0 > \frac{|\beta|}{2\alpha}$, в случае $\alpha < 0, \beta > 0$ рассматривается конечный интервал времени (t_0, T) , где $T < \frac{\beta}{2|\alpha|}$, на которых функция f остается положительной, ограниченной функцией времени.

Таким образом, для положительной, ограниченной функции $f(t)$, в зависимости от значений параметров α и β , рассматривается интервал времени (t_0, ∞) либо конечный интервал времени (t_0, T) . Соответственно рассматривается устойчивость спиральных движений (8.50) в силовом поле (8.47) в смысле Ляпунова на интервале времени (t_0, ∞) или устойчивость на конечном интервале времени (t_0, T) по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$.

В силу преобразований (8.53) и ограниченности функции $f(t)$ на рассматриваемом интервале времени t , при устойчивости кругового движения (8.55), будет устойчиво и исходное спиральное движение (8.50) по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$ на рассматриваемом интервале времени t нестационарности силового поля (8.47). Иначе говоря, если при устойчивости круговых движений (8.55) для всякого $\tau \geq \tau_0$, и для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ для возмущений кругового движения выполняются неравенства

$$|x_i(\tau)| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (8.63)$$

то, в силу преобразований (8.53), для всякого $t \geq t_0$ на рассматриваемом интервале времени для возмущений исходного спирального движения выполняются неравенства

$$|y_i(t)| < E, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (8.64)$$

где $E = E(\varepsilon)$ – для интервала времени (t_0, ∞) , и $E = E(\varepsilon, T)$ – для конечного интервала времени (t_0, T) , причем, при сколь угодно малом числе ε и ограниченности функции $f(t)$ на рассматриваемом интервале времени, может быть число $E > 0$ подобрано также сколь угодно малым.

Таким образом, спиральное движение (8.50) материальной точки в нестационарном силовом поле (8.47) будет устойчивым в смысле Ляпунова на интервале времени (t_0, ∞) или устойчивым на конечном интервале времени (t_0, T) по отношению к величинам $r, \dot{r}, \Omega, z, \dot{z}$.

Условия устойчивости спиральных орбит запишутся в виде

$$\begin{aligned} \left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r + U''_{zz} \right)_0 &< -5 \delta_n^3 \alpha^2 f^4, \\ \left[\left(U''_{zz} + \delta_n^3 \alpha^2 f^4 \right) \left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r + 4 \delta_n^3 \alpha^2 f^4 \right) - U''_{rz}{}^2 \right]_0 &> 0. \end{aligned} \quad (8.65)$$

где индекс 0 означает, что взято значение функции в точке $r = r_0/f, z = z_0/f$.

В случае закона (8.61) изменения функции $f(t)$ (первый закон Мещерского) условия (8.65) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r + U''_{zz} \right)_0 &< 0, \\ \left[\left(U''_{zz} \right) \left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r \right) - U''_{rz}{}^2 \right]_0 &> 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

В случае закона (8.62) изменения функции $f(t)$ (второй закон Мещерского) условия устойчивости (8.65) будут следующими

$$\begin{aligned} \left(U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r + U''_{zz} \right)_0 &< -\frac{5\alpha^2}{(2\alpha t + \beta)^2}, \\ \left\{ \left[U''_{zz} + \frac{\alpha^2}{(2\alpha t + \beta)^2} \right] \left[U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r + \frac{4\alpha^2}{(2\alpha t + \beta)^2} \right] - U''_{rz}{}^2 \right\}_0 &> 0. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Частным случаем указанных спиральных орбит (8.50) будут плоские спиральные орбиты

$$r = r_0/f, \quad \dot{r} = \alpha f^{n-2} r_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad z = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad (8.68)$$

получающиеся при выполнении условий существования спиральных орбит (8.51) лишь в точках $r = r_0/f, z = 0$.

Спиральные орбиты (8.50) представляют собой широкий класс орбит спирального типа. Многообразие этих спиральных орбит определяется

законом изменения функции $f(t)$ (убывание f при $\alpha > 0$, возрастание f при $\alpha < 0$), темпом изменения функции $f(t)$ на рассматриваемом интервале времени, величиной секторной скорости $\Omega/2$ и набором начальных значений r_0, z_0 . Спиральные плоские орбиты (8.68) будут, очевидно, подклассом общих спиральных орбит вида (8.50).

8.5. Об устойчивости нестационарных круговых орбит в сопротивляющейся среде

Рассмотрим движение материальной точки в осесимметричном гравитационном поле при наличии сопротивляющейся среды [139]. Пусть силовая функция в цилиндрических координатах ρ, λ, z с осью z , совпадающей с осью симметрии, имеет вид

$$U(\rho, z, t) = f(t)\tilde{U}(\rho, z), \quad (8.69)$$

где \tilde{U} – голоморфная функция ρ, z в некоторой области их изменения; f – функция времени вида

$$f(t) = \frac{1}{\alpha t + \beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad (8.70)$$

есть положительная, монотонно убывающая функция времени на интервале времени $(0, \infty)$. Пусть движение материальной точки в поле тяготения (8.69) происходит при наличии силы трения, пропорциональной первой степени скорости движения материальной точки:

$$\vec{F}_{mp} = v(t)\dot{\vec{r}} \quad \left(v = \frac{\dot{f}}{2f} \right), \quad (8.71)$$

где \vec{r} – радиус-вектор материальной точки.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки запишутся в виде

$$\begin{cases} \ddot{\rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\Omega^2}{\rho^3} + v\dot{\rho}; \\ \dot{\Omega} = v\Omega; \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} + v\dot{z}, \end{cases} \quad (8.72)$$

где $\Omega = \rho^2 \dot{\lambda}$ – удвоенная секторная скорость.

Уравнения движения (8.72) допускают частное решение

$$\rho = \rho_0; \quad \dot{\rho} = 0; \quad \Omega = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\alpha t + \beta}}; \quad z = z_0; \quad \dot{z} = 0, \quad (8.73)$$

соответствующее некоторому круговому движению с непрерывно убывающей секторной скоростью. При этом должны выполняться условия существования кругового движения

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_0 + \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^3(\alpha t + \beta)} = 0; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = 0, \quad (8.74)$$

где индекс 0 означает, что взято значение функции в точке ρ_0, z_0 .

Исследуем устойчивость кругового движения (8.73) в смысле Ляпунова [146] относительно величин $\rho, \dot{\rho}, \Omega, z, \dot{z}$. Проведем замену переменной t согласно формуле

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{f(t)}. \quad (8.75)$$

В результате система (8.72) запишется в виде

$$\begin{cases} \rho'' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho} + \frac{\sigma^2}{\rho^3}; \\ \sigma' = 0; \\ z'' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z}, \end{cases} \quad (8.76)$$

где $\sigma = \rho^2 \lambda'$. Соответственно частное решение (8.73) переходит в следующее частное решение:

$$\rho = \rho_0; \quad \rho' = 0; \quad \sigma = \sigma_0; \quad z = z_0; \quad z' = 0, \quad (8.77)$$

системы уравнений (8.76). Решению (8.77) соответствует некоторое стационарное круговое движение, причем условия существования кругового движения (8.77) имеют вид

$$\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho} \right)_0 + \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^3} = 0; \quad \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right)_0 = 0. \quad (8.78)$$

Отметим, что в силу преобразования (8.75) связь переменных τ и t будет следующей:

$$\tau = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha t + \beta} - \frac{2\sqrt{\beta}}{\alpha}, \quad (8.79)$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы моменту $t = 0$ соответствовало значение $\tau = 0$. Из формулы (8.79) видно, что изменению времени t в интервале $(0, \infty)$ соответствует изменение τ в интервале $(0, \infty)$, причем τ увеличивается с ростом t . Отсюда исследование устойчивости частного решения (8.73) системы (8.72) сводится к исследованию устойчивости стационарных круговых движений (8.77).

Введем обычным способом возмущения

$$\rho = \rho_0 + x_1; \quad \rho' = x_2; \quad \sigma = \sigma_0 + x_3; \quad z = z_0 + x_4; \quad z' = x_5 \quad (8.80)$$

и запишем уравнения возмущенного движения в виде

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_1} + \frac{(\sigma_0 + x_3)^2}{(\rho_0 + x_1)^3}; \\ x_3' = 0; \\ x_4' = x_5; \\ x_5' = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_4}. \end{cases} \quad (8.81)$$

Уравнения (8.81) обладают интегралами

$$V_1 = x_3 = \text{const}; \quad (8.82)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left[x_2^2 + x_5^2 + \frac{(\sigma_0 + x_3)^2}{(\rho_0 + x_1)^2} \right] - \tilde{U}(\rho_0 + x_1, z_0 + x_4) = h. \quad (8.83)$$

Аналогично В. Г. Демину [130] функцию Ляпунова представим в виде связки интегралов (8.82), (8.83):

$$V = 2V_2 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_1^2 + \lambda_3, \quad (8.84)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – постоянные, которые выбираются так, чтобы функция V удовлетворяла условиям Ляпунова [146] и была знакоопределенной. Производная от функции V в силу уравнений возмущенного движения (8.81) будет тождественно равна нулю, поэтому согласно первой теореме прямого метода Ляпунова [146] рассматриваемое круговое движение будет устойчивым по отношению к величинам $\rho, \rho', \sigma, z, z'$ при знакоопределенности V функции.

Разложим функцию V в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Выбрав постоянные

$$\lambda_1 = -\frac{2\sigma_0}{\rho_0^2}; \quad \lambda_3 = -\frac{\sigma_0^2}{\rho_0^2} + 2\tilde{U}_0(\rho_0, z_0), \quad (8.85)$$

уничтожим в разложении свободный и линейный члены. Тогда разложение имеет вид

$$\begin{aligned} V = & -\left(\tilde{U}_{\rho\rho}'' + \frac{3}{\rho}\tilde{U}'_{\rho}\right)_0 x_1^2 + x_2^2 + \left(\lambda_2 + \frac{1}{\rho_0^2}\right)x_3^2 - \\ & -\left(\tilde{U}_{zz}''\right)_0 x_4^2 + x_5^2 - \frac{4}{\rho_0} \sqrt{-\left(\frac{1}{\rho}\tilde{U}'_{\rho}\right)_0} x_1 x_3 - 2\left(\tilde{U}_{\rho z}''\right)_0 x_1 x_4 + \dots \end{aligned} \quad (8.86)$$

Функция V будет знакоопределенной, по крайней мере при достаточно малых возмущениях x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , если квадратичная форма, с которой начинается разложение (8.86), будет знакоопределенной. Квадратичная форма в разложении (8.86) будет знакоопределенной положительной при выполнении неравенств

$$\begin{cases} \left(\tilde{U}_{\rho\rho}'' + \frac{3}{\rho}\tilde{U}'_{\rho}\right)_0 < 0; \\ -\left(\lambda_2 + \frac{1}{\rho_0^2}\right)\left(\tilde{U}_{\rho\rho}'' + \frac{3}{\rho}\tilde{U}'_{\rho}\right)_0 + \frac{4}{\rho_0^3}\left(\tilde{U}'_{\rho}\right)_0 > 0; \\ \left(\lambda_2 + \frac{1}{\rho_0^2}\right)\left[\tilde{U}_{zz}''\left(\tilde{U}_{\rho\rho}'' + \frac{3}{\rho}\tilde{U}'_{\rho}\right) - \tilde{U}_{\rho z}''^2\right]_0 - \frac{4}{\rho_0^3}\left(\tilde{U}'_{\rho} \cdot \tilde{U}_{zz}''\right)_0 > 0. \end{cases} \quad (8.87)$$

При выполнении условий

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\tilde{U}''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} \tilde{U}'_{\rho} \right)_0 &< 0; \\ \left[\left(\tilde{U}''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} \tilde{U}'_{\rho} \right) \tilde{U}''_{zz} - \tilde{U}''_{\rho z}{}^2 \right]_0 &> 0 \end{aligned} \right. \quad (8.88)$$

можно подобрать такое λ_2 , что неравенства (8.87) будут выполняться [130]. Значит, условия (8.88) являются условиями устойчивости круговых движений (8.77). Соответственно круговое движение (8.73) устойчиво по отношению к величинам $\rho, \dot{\rho}, \Omega, z, \dot{z}$ при выполнении условий

$$\left\{ \begin{aligned} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 &< 0; \\ \left[\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right) U''_{zz} - U''_{\rho z}{}^2 \right]_0 &> 0. \end{aligned} \right. \quad (8.89)$$

Если силовое поле обладает симметрией относительно плоскости $z = z_0$, т.е. $(U''_{\rho z})_0 = 0$, то условия устойчивости (8.89) упрощаются и имеют вид

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 < 0; \quad (U''_{zz})_0 < 0. \quad (8.90)$$

Эти условия устойчивости можно привести к более компактному виду. В самом деле, если рассматриваемое движение происходит внутри гравитирующей среды непрерывной плотности, то уравнение Пуассона для силовой функции имеет следующий вид:

$$U''_{\rho\rho} + U''_{zz} + \frac{1}{\rho} U'_{\rho} = -4\pi G\mu(P), \quad (8.91)$$

где G – гравитационная постоянная; $\mu(P)$ – плотность во внутренней точке P среды. Пользуясь уравнением (8.91), представим условия устойчивости (8.90) в виде

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 < 0; \quad \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 > -4\pi G\mu + \left(\frac{2}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 \quad (8.92)$$

и после простых преобразований получим условие устойчивости

$$\left[2\rho^2 U'_\rho - 4\pi G\rho^3 \mu\right]_0 < \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^3 U'_\rho)\right]_0 < 0, \quad (8.93)$$

которое является обобщением условий устойчивости стационарных круговых движений, приводимых в работах С. Чанрасекара [11], В. Г. Демина [130].

Аналогично рассмотренному выше исследованию можно показать устойчивость частных решений

$$\rho = \rho_0; \quad \dot{\rho} = 0; \quad \Omega = \sigma_0 f^{1/2}; \quad z = z_0; \quad \dot{z} = 0 \quad (8.94)$$

системы уравнений (8.72) при силовой функции вида (8.69), в которой функция f меняется по закону Эддингтона-Джинса:

$$\dot{f} = \alpha_1 f^n, \quad (\alpha_1 < 0, \quad n > 3/2) \quad (8.95)$$

и функции v вида

$$v = \frac{\alpha_1}{2} f^{n-1}, \quad (8.96)$$

поскольку при выборе функции f в виде

$$f = [(1-n)(\alpha_1 t + \beta_1)]^{\frac{1}{1-n}}, \quad (\alpha_1 < 0, \quad \beta_1 < 0, \quad n > 3/2) \quad (8.97)$$

существует следующая связь переменных τ и t :

$$\tau = \frac{2}{\alpha_1(3-2n)} [(1-n)(\alpha_1 t + \beta_1)]^{\frac{3-2n}{2-2n}} + \tau_0, \quad (8.98)$$

из которой видно, что τ увеличивается с ростом t на всем интервале времени $(0, \infty)$.

Многообразие круговых орбит (8.73) и (8.94) определяется набором значений ρ_0, z_0 , величиной секторной скорости $\Omega/2$ и функцией f . Отметим, что круговые орбиты (8.73) при больших значениях времени t близки к соответствующим стационарным круговым орбитам с малой секторной скоростью в слабом силовом поле.

8.6. Об устойчивости кольцевой структуры галактик

Кольцевые галактики давно привлекают внимание астрономов, однако исследование динамики таких галактик представляет определенные трудности. Известно большое количество типов кольцевых галактик [147-153] и представляется важным для понимания природы самих галактик изучение вопросов устойчивости и других динамических процессов кольцевых галактик. Модели нестационарных гравитирующих систем дают возможность объяснения в рамках концепции активности ядер галактик [135, 136] наблюдаемые особенности структуры и динамики таких галактических систем.

Из наблюдений пекулярных галактик типа «объект Мэйолла» известно наличие ядра значительной массы, тонкой кольцевой структуры, состоящей из звезд, газа, пыли. Кроме того, известен взаимодействующий характер ядра и кольца в этих объектах [148, 154-156].

Выявление возможной роли диссипации массы в структурных особенностях этих пекулярных галактик рассмотрено в работах [157-159]. Рассмотрена модель пекулярных кольцевых галактик типа «объект Мэйолла» и установлены критерии устойчивости кольцевой структуры таких галактик для соотношения масс ядра и кольца, а также для расстояния плоскости кольца от ядра галактики [142].

Рассмотрим, следуя [142], небесно-механическую модель пекулярных галактик с кольцевой структурой типа «объект Мэйолла». Выясним условия существования и устойчивости кольцевой структуры таких галактик. Исследование проведем на основе следующей небесно-механической модели: система кольцевого объекта состоит из ядра, являющегося телом вращения, и тонкого круглого кольца. Оси симметрии ядра и кольца совпадают, а плоскость симметрии кольца находится на определенном расстоянии от ядра. Кольцо состоит из материальных точек, участвующих в дифференциальном вращении, причем вследствие тонкости кольца они будут двигаться почти в плоскости симметрии кольца. При движении внутри кольца материальная точка испытывает сопротивление, пропорциональное скорости движения и плотности среды кольца. Ядро и кольцо являются телами с переменными массами.

Таким образом, материальная точка кольца движется внутри него под действием сил: 1) притяжения ядра, определяется его внешним потенциалом U_0 ; 2) притяжения кольца, определяется его внутренним потенциалом U_k ; 3) сопротивления среды кольца.

Будем считать кольцевую структуру стабильной, если устойчиво круговое движение материальных точек внутри кольца. Тогда проблема

стабильности кольцевой структуры сводится к исследованию устойчивости кругового движения материальной точки кольца. В рассматриваемой схеме, как и в работе Г. Н. Дубошина [160], допускаем, что исследуемая пассивно гравитирующая материальная точка внутри кольца испытывает притяжение от всех материальных точек кольца такое же, какое оказывало бы сплошное материальное кольцо на внутреннюю точку. При этом рассматриваем движения исследуемой материальной точки, не очень близкие к краям кольца.

Пусть потенциал ядра соответствует потенциалу обобщенной задачи Баррара [73, 142, 161]. В цилиндрических координатах ρ, ψ, z с началом в середине расстояния $2c$ между центрами M_1 и M_2 с массами соответственно m_1 и m_2 , с осью z , направленной вдоль линии центров, потенциал ядра имеет вид

$$U_0 = \frac{GM}{r} + \frac{Gm_c z}{r^3}, \quad (c \ll r) \quad (8.99)$$

где G – гравитационная постоянная, и

$$M = m_1 + m_2, \quad m = m_1 - m_2, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (8.100)$$

Обозначив через d толщину кольца, а через a_1 и a_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы кольца, запишем условие тонкости кольца в виде

$$\frac{d}{a_1} \ll 1. \quad (8.101)$$

Для однородного круглого кольца с плоскостью симметрии $z = b$ имеем [162] следующее выражение потенциала:

$$\begin{aligned} U_\kappa = & \frac{2Gm_\kappa}{\pi(a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_2)^2} E(k_2) - \sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_1)^2} E(k_1) - \right. \\ & - \frac{r'^2 - a_2^2}{\sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_2)^2}} K(k_2) + \frac{r'^2 - a_1^2}{\sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_1)^2}} K(k_1) + \\ & + \frac{(r'-a_2)(r'-\rho)}{\sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_2)^2}} \Pi(k_2, -n) - \frac{(r'-a_1)(r'-\rho)}{\sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_1)^2}} \Pi(k_1, -n) + \\ & \left. + \frac{(r'+a_2)(r'+\rho)}{\sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_2)^2}} \Pi(k_2, n') - \frac{(r'+a_1)(r'+\rho)}{\sqrt{(z-b)^2 + (\rho+a_1)^2}} \Pi(k_1, n') \right\}, \quad (8.102) \end{aligned}$$

где m_κ – масса кольца, $r'^2 = \rho^2 + (z-b)^2$, а $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(k, n)$ – полные эллиптические интегралы соответственно первого, второго и третьего рода с модулями k и параметрами n , причем

$$k_1^2 = \frac{4\rho a_1}{(z-b)^2 + (\rho + a_1)^2}; \quad k_2^2 = \frac{4\rho a_2}{(z-b)^2 + (\rho + a_2)^2},$$

$$n = \frac{2\rho}{r' + \rho}; \quad n' = \frac{2\rho}{r' - \rho}. \quad (8.103)$$

Относительно масс неподвижных центров m_1 и m_2 , кольца m_κ полагаем, что их зависимость от времени задается формулами

$$m_1 = m_{10}f(t), \quad m_2 = m_{20}f(t), \quad m_\kappa = m_0f(t), \quad (8.104)$$

где функция $f(t)$ меняется по закону Эддингтона-Джинса

$$\dot{f} = \alpha_1 f^n, \quad \left(\alpha_1 < 0, \quad n > \frac{3}{2} \right). \quad (8.105)$$

При движении внутри кольца материальная точка испытывает сопротивление. Интенсивность силы сопротивления зададим в виде

$$\vec{F}_{mp} = \frac{\alpha_1}{2} f^{n-1} \dot{r}. \quad (8.106)$$

Для силовых функций ядра и кольца вследствие формул (8.104) имеем

$$U_0(\rho, z, t) = f(t)\tilde{U}_0(\rho, z),$$

$$U_\kappa(\rho, z, t) = f(t)\tilde{U}_\kappa[\rho, (z-b)^2]. \quad (8.107)$$

Для силовой функции задачи имеем

$$U(\rho, z, t) = U_0 + U_\kappa = f(t)\tilde{U}(\rho, z). \quad (8.108)$$

Устойчивость круговых орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле вида (8.108) при наличии сопротивляющейся среды рассмотрена в работе [139], из результатов которой в рассматриваемой задаче существуют устойчивые по отношению к величинам ρ , $\dot{\rho}$, Ω , z , \dot{z} круговые движения

$$\rho = \rho_0 = a, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \Omega = \sigma_0 f^{1/2}, \quad z = z_0 = b, \quad \dot{z} = 0 \quad (8.109)$$

материальной точки внутри кольца.

Необходимые и достаточные условия устойчивости этих круговых движений имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 &< 0, \\ \left[\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right) U''_{zz} - U''_{\rho z} \right]_0 &> 0. \end{aligned} \quad (8.110)$$

Рассмотрим условия (8.110). На их основе можно получить достаточно простые критерии устойчивости кольцевой структуры [142].

Рассмотрим первое из условий (8.110). Производя с учетом формул (8.99), (8.102), (8.108) необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_{\rho} \right)_0 &= -GM \frac{a^2 + 4b^2}{r_a^5} - 3Gmcb \frac{4b^2 - a^2}{r_a^7} + \\ &+ \frac{2Gm_{\kappa}}{\pi a^2 (a_2^2 - a_1^2)} \Phi_1(a) < 0, \end{aligned} \quad (8.111)$$

где $r_a = \sqrt{a^2 + b^2}$ и обозначено

$$\begin{aligned} \Phi_1(a) = \left\{ \frac{3a^2 - 2a_2^2}{a - a_2} E(k_2) - \frac{3a^2 + 2a_2^2}{a + a_2} K(k_2) - \right. \\ \left. - \frac{3a^2 - 2a_1^2}{a - a_1} E(k_1) + \frac{3a^2 + 2a_1^2}{a + a_1} K(k_1) \right\}, \end{aligned} \quad (8.112)$$

причем модули эллиптических интегралов в выражении $\Phi_1(a)$ имеют вид

$$k_1^2 = \frac{4a a_1}{(a + a_1)^2}, \quad k_2^2 = \frac{4a a_2}{(a + a_2)^2}. \quad (8.113)$$

Из выражения (8.111) нетрудно получить критерий устойчивости для соотношения масс кольца и ядра:

$$\frac{m_{\kappa}}{M} < \frac{\pi a^2 (a_2^2 - a_1^2) (4b^2 + a^2)}{2\Phi_1(a) r_a^5} \left[1 + \frac{3mcb}{M} \cdot \frac{(4b^2 - a^2)}{r_a^2 (4b^2 + a^2)} \right]. \quad (8.114)$$

Поскольку $c \ll r$, то, пренебрегая вторым членом в квадратных скобках, получим

$$\frac{m_\kappa}{M} < \frac{\pi a^2 (a_2^2 - a_1^2) (4b^2 + a^2)}{2 \Phi_1(a) r_a^5}. \quad (8.115)$$

Для тонкого кольца при $a_1 \sim a_2$ с учетом конечного значения $\Phi_1(a)$, поскольку $k_1 < 1$, $k_2 < 1$, получим

$$\frac{m_\kappa}{M} \ll 1. \quad (8.116)$$

Условие (8.116) означает, что в данном случае кольцевая структура устойчива, когда ее масса значительно меньше массы ядра.

Рассмотрим теперь второе из условий (8.110). Чтобы оно выполнялось, необходимо

$$(U''_{zz})_0 < 0. \quad (8.117)$$

После необходимых вычислений, учитывая формулы (8.99), (8.102), (8.108), условие (8.117) запишется в виде

$$\begin{aligned} (U''_{zz})_0 = & -GM \frac{a^2 - 2b^2}{r_a^5} + 3Gmcb \frac{2b^2 - 3a^2}{r_a^7} - 4\pi G\mu_a - \\ & - \frac{2Gm_\kappa}{\pi(a_2^2 - a_1^2)} \Phi_2(a) < 0, \end{aligned} \quad (8.118)$$

где μ_a — плотность кольца в точке $\rho = a$, $z = b$, и обозначено

$$\Phi_2(a) = \left\{ \frac{E(k_2)}{a - a_2} - \frac{K(k_2)}{a + a_2} - \frac{E(k_1)}{a - a_1} + \frac{K(k_1)}{a + a_1} \right\}, \quad (8.119)$$

причем в выражении $\Phi_2(a)$ модули эллиптических интегралов имеют вид (8.113). Из условия (8.118) можно получить критерий для расстояния кольца от ядра, который запишется в виде

$$b^2 < \frac{a^2}{2} + \frac{r_a^5}{M} \left[2\pi\mu_a + \frac{m_\kappa}{\pi(a_2^2 - a_1^2)} \Phi_2(a) - \frac{3mcb}{2r_a^7} (2b^2 - 3a^2) \right]. \quad (8.120)$$

Как и в первом случае, пренебрегая третьим членом в квадратных скобках вследствие $c \ll r$, имеем

$$b^2 < \frac{a^2}{2} + \frac{r_a^5}{M} \left[2\pi \mu_a + \frac{m_\kappa}{\pi(a_2^2 - a_1^2)} \Phi_2(a) \right]. \quad (8.121)$$

Для однородного кольца

$$\mu = \frac{m_\kappa}{\pi(a_2^2 - a_1^2)d}, \quad (8.122)$$

следовательно, в этом случае условие (8.121) примет вид

$$b^2 < \frac{a^2}{2} + \frac{m_\kappa}{M} \cdot \frac{r_a^5}{\pi(a_2^2 - a_1^2)} \left[\frac{2\pi}{d} + \Phi_2(a) \right]. \quad (8.123)$$

Если соотношение масс кольца и ядра таково, что

$$\frac{m_\kappa}{M} \cong \frac{\pi(a_2^2 - a_1^2)d a^2}{r_a^5}, \quad (8.124)$$

то выражение (8.123) запишется

$$b^2 < a^2 \left[\frac{4\pi + 1}{2} + d \Phi_2(a) \right]. \quad (8.125)$$

При малых значениях $d \Phi_2(a)$ получим простой вид критерия устойчивости для расстояния кольца от ядра в виде

$$b^2 < \frac{4\pi + 1}{2} a^2. \quad (8.126)$$

Условие (8.126) означает, что в случае тонкого кольца ($a_1 \sim a_2$) устойчивая кольцевая структура находится от ядра на расстоянии порядка размеров самого кольца.

Отметим, что критерии вида (8.115), (8.123) получим и в случае, когда потенциал ядра представляется потенциалом другого предельного варианта задачи двух неподвижных центров переменной массы ($r \ll c$) [73, 163].

Полученные критерии устойчивости кольцевой структуры представляются вполне естественными в рамках предлагаемой небесно-механической модели.

РАСШИРЕННАЯ ПРОБЛЕМА ВАЙДЫ С УЧЕТОМ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ФОНА ДЕ СИТТЕРА

9.1. Введение

Современные наблюдательные данные астрономии свидетельствуют о нестационарности реальных звездных систем, связанной с эффектами изменения масс гравитирующих тел со временем. Массы многих небесных тел меняются со временем в процессе эволюции. Например, истечение вещества наблюдается из множества звезд различных спектральных классов [16], причем внеатмосферные наблюдения показали, что истечение вещества в форме звездного ветра присуще всем звездам ранних спектральных классов и усиливается на поздних стадиях эволюции [17]. Данные о фотонном и корпускулярном излучении звезд, аккреции межзвездного вещества, диссипативных явлениях в звездных системах приводят к необходимости рассмотрения динамических моделей нестационарных гравитирующих систем. При этом, вообще говоря, следует дополнительно учитывать как различные типы эмиссии или аккреции материи (а не только чистую радиацию) для рассматриваемой звезды или скопления звезд, так и влияние гравитационного фона, в рамках той или иной космологической модели.

Известное решение Шварцшильда в общей теории относительности соответствует гравитационному полю сферически-симметричной звезды постоянной массы. Решение Вайды [164] обобщает решение Шварцшильда на случай радиально излучающей звезды переменной массы $m(r, t)$. В недавних работах Р. Маллета [165] и У. Гупта и С. Гупта [166] рассматривается обобщение чисто радиационного решения Вайды на случай космологического фона де Ситтера.

Нами сформулирована расширенная проблема Вайды, в которой известное решение Вайды уравнений ОТО для излучающей массы обобщается на случай истечения или аккреции материи с произвольной радиальной скоростью, не обязательно равной скорости света [167]. Эти результаты обобщаются с учетом влияния космологического фона де Ситтера. Детали расчетов содержатся в работах [168-170]. Возможные применения обобщенной метрики Вайды предложены в работе [171].

9.2. Гравитационное поле звезды с переменной массой

Метрика Вайдьи есть решение уравнений Эйнштейна ($G=1$, $c=1$, обозначения стандартные):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (9.1)$$

с тензором энергии-импульса радиально излучаемой материи:

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon \eta_\mu \eta_\nu, \quad (9.2)$$

где ε – плотность радиации; η_μ – изотропный вектор: $\eta_\mu \eta^\mu = 0$. Метрика Вайдьи имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2 = \\ &= \frac{\dot{m}^2}{\Phi^2(m)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $\dot{m} \equiv \partial m / \partial t$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ и функция

$$\Phi(m) = m' (1 - 2m/r), \quad m' \equiv \partial m / \partial r. \quad (9.4)$$

Наша задача состоит в том, чтобы обобщить решение (9.3), (9.4) на случай, когда эмиссия материи происходит радиально с произвольной скоростью, не обязательно равной скорости света [167]. Этому может соответствовать, например, гравитационное поле звезды, теряющей массу не только за счет изотропного излучения (фотоны, нейтрино, гравитоны), но и за счет корпускулярного истечения материи (либо при аккреции вещества на звезду).

Рассматриваемый случай характеризуется тем, что векторное поле η_μ в (9.2) уже не является, вообще говоря, изотропным и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \eta_\mu &= \alpha u_\mu \pm v_\mu, \quad u_\mu u^\mu = -v_\mu v^\mu = 1, \quad u_\mu v^\mu = 0 \Rightarrow \\ \eta_\mu \eta^\mu &= \alpha^2 - 1; \quad u_\mu = \delta_\mu^0 / \sqrt{g^{00}}, \quad v_\mu = \delta_\mu^1 / \sqrt{-g^{11}}; \quad \alpha = const. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь и в дальнейшем верхний знак всегда соответствует истечению (излучению) материи, а нижний – аккреции (поглощению). Наиболее интересны положительные значения параметра α , при $\alpha > 1$ вектор η_μ стано-

вится времениподобным. Очевидно, только при $\alpha = 1$ имеет место изотропный случай Вайдьи.

Решение уравнений (9.1) будем искать в форме (9.3). Тогда функцию $\Phi(m)$ находим следующим образом. При условии (9.5) из (9.1) имеем

$$R_{22} = 4\pi g_{22}T, \quad T \equiv T_{\mu}^{\mu}, \quad (9.6)$$

$$R_{01} = -8\pi T_{01}. \quad (9.7)$$

Используя далее (9.3) и (9.5), получаем из (9.6) и (9.7):

$$\left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \frac{2m'}{r} \mp \frac{a\Phi}{r(1-2m/r)}, \quad (9.8)$$

где введено обозначение $a \equiv (\alpha^2 - 1)/\alpha$.

Первый интеграл (9.8) можно найти методом Лагранжа [172] решения уравнений в частных производных первого порядка. Для этого используем соотношение

$$\frac{\dot{\Phi}}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{m'} = 0. \quad (9.9)$$

Теперь можно показать, что первый интеграл системы (9.8), (9.9) имеет вид

$$\Phi(m) = m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right]^{-1}. \quad (9.10)$$

Таким образом, получено [167] решение уравнений Эйнштейна (9.1) при условиях (9.2), (9.5) для гравитационного поля звезды переменной массы m в форме (9.3), где $\Phi(m)$ определяется формулой (9.10). При $a = 0$ (изотропное излучение) решение (9.3), (9.10) переходит в метрику Вайдьи (9.3), (9.4).

Решение (9.3), (9.10) можно также представить в форме

$$ds^2 = Bdt^2 - Adr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (9.11)$$

где

$$A = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad B = \left(\frac{\dot{m}}{m'}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right]^2. \quad (9.12)$$

При этом, согласно (9.6), выполняется следующее соотношение для функции $m(r, t)$, обобщающее аналогичное выражение в работе [166] (без λ – члена):

$$\left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \frac{2m}{r^2} \mp \frac{am}{r^2 \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right]} . \quad (9.13)$$

Далее, используя (9.5) и (9.7), прямыми вычислениями можно определить плотность энергии ε и компоненты тензора энергии-импульса эмиссионного потока:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Phi}{4\pi\alpha r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} , \quad (9.14)$$

и

$$T_{\mu\nu} = \pm \frac{\Phi}{4\pi\alpha r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \left[\frac{\alpha \dot{m}}{\Phi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \delta_{\mu}^0 \pm \delta_{\mu}^1 \right] \left[\frac{\alpha \dot{m}}{\Phi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \delta_{\nu}^0 \pm \delta_{\nu}^1 \right] , \quad (9.15)$$

где под Φ подразумевается функция (9.10). Таким образом, выражения (9.14) и (9.15) можно представить в следующей явной форме:

$$\varepsilon = \pm \frac{m'}{4\pi\alpha r^2 \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right]^{-1}} , \quad (9.16)$$

$$T_{\mu\nu} = \pm \frac{m' \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right]^{-1}}{4\pi\alpha r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \cdot \left\{ \frac{\alpha \dot{m}}{m'} \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right] \delta_{\mu}^0 \pm \delta_{\mu}^1 \right\} \times \left\{ \frac{\alpha \dot{m}}{m'} \left[1 \pm \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right] \delta_{\nu}^0 \pm \delta_{\nu}^1 \right\} . \quad (9.17)$$

Очевидно, при $\alpha = 1$ ($a = 0$) отсюда следует результат, указанный Р. Маллетом [165] для случая метрики Вайдьи. Далее, если, следуя [165], рассмотреть частную подстановку типа $\Phi(m) = \dot{m}$, то метрика (9.3) приводится к виду, формально совпадающему с решением Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (9.18)$$

но с переменной массой $m = m(r, t)$. При этом плотность энергии и тензор энергии-импульса истекающей или аккрецирующей материи, согласно (9.14), (9.15), определяются выражениями:

$$\varepsilon = \pm \frac{\dot{m}}{4\pi \alpha r^2 (1 - 2m/r)}, \quad (9.19)$$

$$T_{\mu\nu} = \pm \frac{\dot{m}}{4\pi \alpha r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \cdot \left[\alpha \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \delta_{\mu}^0 \pm \delta_{\mu}^1 \right] \cdot \left[\alpha \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \delta_{\nu}^0 \pm \delta_{\nu}^1 \right]. \quad (9.20)$$

Заметим, что при $\Phi = \dot{m}$ и $\alpha = 1$, согласно (9.8), $m' = 0$, т.е. масса зависит только от времени: $m = m(t)$, а при $\alpha \neq 1$ получим соотношение

$$m' = \pm \frac{a}{2} \dot{m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \text{ для связи } m' \text{ и } \dot{m}.$$

Непосредственный астрономический интерес представляет случай, когда центральная масса изменяется со временем, например, по известному закону Эддингтона-Джинса: $\dot{m} = -km^n$, где k и n – константы. В известном смысле полученное решение может также служить основой для обсуждения релятивистских аналогов нестационарной задачи Гильдена-Мещерского [22] в небесной механике тел переменной массы.

Наконец, если данную задачу решать на де-ситтеровском фоне, т.е. в уравнениях (9.1) учитывать λ – член, то результирующая метрика будет отличаться от метрики (9.3), (9.10) заменой всюду фактора $(1 - 2m/r)$ на выражение $(1 - 2m/r - \lambda r^2/3)$ в соответствии с работами [165, 166]. Далее рассмотрим эти вопросы более подробно.

9.3. Гравитационное поле звезды с переменной массой на космологическом фоне де Ситтера

Упомянутое решение Вайдьи [164] обобщает сферически-симметричное решение Шварцшильда для постоянной центральной массы на случай радиально излучающей звезды переменной массы $m(r, t)$, а в работах Р. Маллета [165] и У. Гупта и С. Гупта [166] при этом учитывается космологический фон де Ситтера.

Метрика Вайдьи является решением уравнений Эйнштейна ($G = c = 1$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad R \equiv R_{\alpha}^{\alpha}, \quad (9.21)$$

с тензором энергии-импульса радиально излучаемой материи

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon \eta_\mu \eta_\nu , \quad (9.22)$$

где ε – плотность радиации, $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, и под η_μ подразумевается только изотропный вектор: $\eta_\mu \eta^\mu = 0$. Метрика Вайдьи может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2 = \\ &= \frac{\dot{m}^2}{\Phi^2(m)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \end{aligned} \quad (9.23)$$

где $\dot{m} \equiv \frac{\partial m}{\partial t}$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ и функция

$$\Phi(m) = m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right) , \quad m' \equiv \frac{\partial m}{\partial r} . \quad (9.24)$$

Решение (9.23), (9.24) в работах [165, 166] обобщено на случай излучающей звезды, погруженной в космологический фон де Ситтера. Для этого рассматривается решение уравнений с λ -членом:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \lambda g_{\mu\nu} , \quad T \equiv T^\alpha_\alpha = \varepsilon \eta^2 = 0 , \quad (9.25)$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, λ – космологическая постоянная, и тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ берется в форме (9.22). В результате метрика Вайдьи на деситтеровском фоне приобретает такой вид [165, 166]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\frac{\dot{m}}{\Phi(m)} \right]^2 \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2\right) dt^2 - r^2 d\Omega^2 - \\ &- \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 \equiv \frac{\dot{m}^2}{\Phi^2} D dt^2 - D^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \end{aligned} \quad (9.26)$$

где теперь

$$\Phi \equiv \Phi(m) = m' \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2\right) \equiv m' D . \quad (9.27)$$

Решение (9.26), (9.27) допускает дальнейшее обобщение [168-170], когда эмиссия материи происходит радиально, но с произвольной скоростью, не обязательно равной скорости света. Этому может соответствовать, например, гравитационное поле звезды, теряющей массу не только за счет изотропного излучения (фотоны, нейтрино, гравитоны и т.п.), но и за счет корпускулярного истечения материи (можно также учитывать рост массы при аккреции вещества на звезду).

Рассматриваемый случай характеризуется той же самой симметрией, что и (9.26), но векторное поле в выражении для тензора энергии-импульса (9.22) уже не является, вообще говоря, изотропным и может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \eta_\mu &= \alpha u_\mu + \beta v_\mu, \quad u_\mu u^\mu = -v_\mu v^\mu = 1, \quad u_\mu v^\mu \equiv (uv) = 0; \\ \eta_\mu \eta^\mu &\equiv \eta^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad \alpha, \beta = const; \\ u_\mu &= \delta_\mu^0 / \sqrt{g^{00}}, \quad v_\mu = \delta_\mu^1 / \sqrt{-g^{11}}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Существенное значение имеет отношение величин α и β , поэтому, не теряя общности, положим $\alpha = 1$ при произвольном значении β , т.е.

$$\eta_\mu = u_\mu + \beta v_\mu, \quad \eta^2 \equiv \eta_\mu \eta^\mu = 1 - \beta^2. \quad (9.28a)$$

Здесь и в дальнейшем положительный знак β соответствует истечению (излучению) материи, а отрицательный – аккреции (поглощению), при $|\beta| < 1$ вектор η_μ становится времениподобным. Очевидно, только при $|\beta| \equiv 1$ имеет место изотропный случай Вайдды.

Решение уравнений (9.25) будем искать в форме (9.26). Тогда функцию $\Phi(m)$ находим следующим способом. При условии (9.28) из (9.25) имеем

$$R_{22} = 4\pi g_{22}T + \lambda g_{22}, \quad T \equiv T_\alpha^\alpha, \quad (9.29)$$

$$R_{01} = -8\pi T_{01}. \quad (9.30)$$

Используя далее (9.26), (9.28) и (9.28a), получим из (9.29) и (9.30):

$$\left[\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{\Phi} \right] \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) = \frac{2m'}{r} - \frac{a\Phi}{r \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)}, \quad (9.31)$$

где введено обозначение $a \equiv \eta^2/(\eta u)(-\eta v) = (1 - \beta^2)/\beta$.

Первый интеграл (9.31) можно найти методом Лагранжа [172] решения уравнений в частных производных первого порядка. Для этого используем соотношение [165]:

$$\frac{\dot{\Phi}}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{m'} = 0 . \quad (9.32)$$

Теперь можно показать, что первый интеграл системы (9.31), (9.32) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(m) &= m' \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) / \left[1 + \frac{a}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) \right] \equiv \\ &\equiv m' D \left(1 + \frac{a}{2} \ln D \right)^{-1} , \quad D \equiv 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} . \end{aligned} \quad (9.33)$$

Таким образом, получено [168-170] решение уравнений Эйнштейна (9.25) при условиях (9.22), (9.28) для гравитационного поля звезды переменной массы m в форме (9.26), где $\Phi(m)$ определяется формулой (9.33). При $\lambda = 0$ (отсутствие космологического фона) решение (9.26), (9.33) переходит в найденную нами [167] метрику (9.3), (9.10) , обобщающую решение Вайдьи [164]. При $a = 0$ (изотропное излучение) решение (9.26), (9.33) переходит в метрику Вайдьи-де Ситтера (9.26), (9.27), полученную в работе [165]. При $a = 0$, $\lambda = 0$ (изотропное излучение, отсутствие космологического фона) решение (9.26), (9.33) переходит в метрику Вайдьи (9.23), (9.24).

Решение (9.26), (9.33) можно также представить в форме

$$ds^2 = B dt^2 - A dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9.34)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)^{-1} \equiv D^{-1} , \\ B &= \left(\frac{\dot{m}}{m'} \right)^2 \left(1 + \frac{a}{2} \ln D \right)^2 D^{-1} . \end{aligned} \quad (9.35)$$

При этом, согласно (9.29), выполняется следующее соотношение для функции $m(r, t)$, обобщающее аналогичное выражение в работе [166]:

$$\left[\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'} \right] \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) = \frac{2m}{r^2} - \frac{2\lambda r}{3} - \frac{a \left(\frac{m}{r^2} - \frac{\lambda r}{3} \right)}{1 + \frac{a}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)}. \quad (9.36)$$

Далее, используя (9.28) и (9.30), прямыми вычислениями можно определить плотность энергии ε и компоненты тензора энергии-импульса эмиссионного потока:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi\beta} \frac{\Phi}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)} \equiv \frac{1}{4\pi\beta} \frac{\Phi}{r^2 D} \quad (9.37)$$

и

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi\beta} \frac{\Phi}{r^2 D^2} \left(\frac{\dot{m}}{\Phi} D \delta_{\mu}^0 + \beta \delta_{\mu}^1 \right) \left(\frac{\dot{m}}{\Phi} D \delta_{\nu}^0 + \beta \delta_{\nu}^1 \right), \quad (9.38)$$

где под Φ подразумевается функция (9.33).

Таким образом, выражения (9.37) и (9.38) можно представить в следующей явной форме:

$$\varepsilon = \frac{m'/4\pi\beta r^2}{1 + \frac{a}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)} \equiv \frac{m'}{4\pi\beta r^2 \left(1 + \frac{a}{2} \ln D \right)}, \quad (9.39)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{m'}{4\pi\beta r^2 \left(1 + \frac{a}{2} \ln D \right) D} \times \left\{ \frac{\dot{m}}{m'} \left(1 + \frac{a}{2} \ln D \right) \delta_{\mu}^0 + \beta \delta_{\mu}^1 \right\} \left\{ \frac{\dot{m}}{m'} \left(1 + \frac{a}{2} \ln D \right) \delta_{\nu}^0 + \beta \delta_{\nu}^1 \right\}. \quad (9.40)$$

Очевидно, при $|\beta|=1$ ($a=0$) отсюда следует результат Р. Маллета [165]. Если к тому же $\lambda=0$, то приходим к результату, указанному Р. Маллетом [165] для случая метрики Вайдьи. Далее, если следуя [165] рассмотреть частную подстановку типа $\Phi(m) = q_0 \dot{m}$, где $q_0 = \text{const}$ ($q_0 \neq 0$), то метрика (9.26) приводится к виду

$$ds^2 = \frac{1}{q_0^2} \left(1 - \frac{2m(r,t)}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m(r,t)}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (9.41)$$

формально совпадающему при $q_0 = \pm 1$ с решением Шварцшильда на космологическом фоне де Ситтера (решение Коттлера), но с переменной массой $m = m(r, t)$. При этом плотность энергии и тензор энергии-импульса истекающей или аккрецирующей материи, согласно (9.37)-(9.38), определяются выражениями:

$$\varepsilon = q_0 \dot{m} / 4\pi\beta r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) \equiv q_0 \dot{m} (4\pi\beta r^2 D)^{-1}, \quad (9.42)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{q_0 \dot{m}}{4\pi\beta r^2 D^2} \left(\frac{1}{q_0} D\delta_\mu^0 + \beta\delta_\mu^1 \right) \left(\frac{1}{q_0} D\delta_\nu^0 + \beta\delta_\nu^1 \right). \quad (9.43)$$

Очевидно, при $q_0 = 1/\beta$ ковариантные компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ (9.43) не зависят от β , но эта зависимость все равно проявляется в g_{00} - компоненте метрики (9.41) и, как следствие, в выражении для плотности энергии (9.42):

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \varepsilon (\eta u)^2 = \varepsilon. \quad (9.44)$$

Заметим, что при $\Phi = q_0 \dot{m}$ и $|\beta| = 1$, согласно (9.31), имеем $m' = 0$, т.е. масса будет зависеть только от времени: $m = m(t)$, а при $|\beta| \neq 1$ получим соотношение

$$m' = \frac{a}{2} q_0 \dot{m} \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right)^{-1} \equiv \frac{q_0 a \dot{m}}{2D}, \quad (9.45)$$

связывающее m' и \dot{m} для произвольных значений параметра q_0 .

Наконец, необходимо подчеркнуть, что зависимость

$$\Phi = q_0 \dot{m}, \quad q_0 = \text{const} \quad (9.46)$$

следует рассматривать как особенное решение, не содержащееся в общих решениях вида (9.33), (9.27) или (9.24) уравнений типа (9.31). Действительно, зависимость (9.46) возникает в качестве альтернативы по

отношению к (9.33), если в исходном уравнении (9.31) потребовать, чтобы множитель в квадратных скобках обращался в нуль:

$$\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{\Phi} = 0. \quad (9.47)$$

Непосредственный астрономический интерес представляет случай, когда центральная масса изменяется со временем, например, по известному феноменологическому закону Эддингтона-Джинса $\dot{m} = -km^n$, где k и n -константы. В известном смысле полученное решение может также служить основой для обсуждения релятивистских аналогов нестационарной задачи Гильдена-Мещерского [22] в небесной механике тел переменной массы и ее дальнейшего обобщения с учетом влияния космологического фона де Ситтера.

9.4. Дополнение: Об особенностях первого интеграла в обобщенной проблеме Вайды

Рассмотрим вопрос о нахождении функции $\Phi(m)$ как первого интеграла системы уравнений (9.31), (9.32) [168, 169]:

$$\left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{\Phi} \right) D = \frac{2m'}{r} - \frac{a\Phi}{rD}, \quad D \equiv 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}; \quad (9.48)$$

$$\frac{\dot{\Phi}}{\dot{m}} - \frac{\Phi'}{m'} = 0 \Rightarrow \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\dot{m}}{m'} = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}, \quad (9.49)$$

где точкой и штрихом обозначено дифференцирование по времени t и координате r , соответственно, a и λ – постоянные. Условие (9.49) есть просто констатация того факта, что $\Phi = \Phi(m)$ и $m = m(r, t)$. Умножая (9.48) на \dot{m}/m' , с учетом (9.49) получим

$$\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\dot{m}'}{m'} + \frac{2\dot{m}}{rD} = \frac{a}{2} \frac{2\dot{m}}{rD} \frac{\Phi}{m'D}. \quad (9.50)$$

Поскольку $2\dot{m}/r = -\dot{D}$, то (9.50) принимает вид:

$$\left[\ln \frac{\Phi}{m'D} \right]^{\cdot} = -\frac{a}{2} \frac{\dot{D}}{D} \frac{\Phi}{m'D} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y^2} = -\frac{a}{2} \frac{\dot{D}}{D}, \quad (9.51)$$

где обозначено: $y \equiv \Phi/m'D$. Интегрируя (9.51) по t , с точностью до произвольной функции от радиальной координаты $C(r)$ находим искомое представление функции $\Phi(m)$:

$$y^{-1} = \frac{a}{2} \ln D + C(r) \Rightarrow \Phi = \frac{m'D}{C(r) + \frac{a}{2} \ln D} . \quad (9.52)$$

При $C(r)=1$ имеем приведенное в тексте решение (9.33). При $C(r)=1$ и для изотропного случая $a=0$ отсюда следуют известные ранее выражения для Φ , [165, 166] и, при $\lambda=0$, [164]. Случай $C(r) \neq 1$ при $a=0$ рассмотрен в [173]. В работе [166] приводятся аргументы в пользу выбора $C(r)=1$, основанные на замечании, что условие типа (9.36) (при $a=0$) должно выполняться. Однако из нашего подхода следует, что равенство (9.36) можно рассматривать только как следствие прямой подстановки (9.33), т.е. функции $\Phi(m)$, которая была получена в предположении, что $C(r)=1$, снова в уравнение (9.31).

В то же время, рассматривая условия интегрируемости наших уравнений поля, можно показать, что для $C(r)$ существуют замкнутые аналитические соотношения, из которых явно следует, при каких условиях допустим тот или иной выбор $C(r)$.

Разрешая систему (9.48), (9.49) относительно $\dot{\Phi}$ и Φ' , получим:

$$\dot{\Phi} = p\Phi , \quad (9.53)$$

$$\Phi' = q\Phi , \quad (9.54)$$

где

$$q = \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{1}{D} \left[\frac{2m'}{r} - \frac{a\Phi}{rD} \right] , \quad p = q \frac{\dot{m}}{m'} .$$

Функция (9.52) удовлетворяет уравнению (9.53) тождественно, т.к. (9.53) совпадает с (9.50). Точно также Φ должна удовлетворять и (9.54), но поскольку решение в форме (9.52) содержит, вообще говоря, новую функцию $C(r)$, результатом подстановки (9.52) в (9.54) является следующее дифференциальное уравнение первого порядка относительно $C(r)$:

$$C' - uC = \frac{a}{2}(u \ln D - v) , \quad (9.55)$$

где

$$u = \frac{m''}{m'} - \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} + v \equiv \left(\ln \frac{m'D}{\dot{m}} \right)' + \frac{2m'}{rD}, \quad (9.56)$$

$$v = \frac{2}{D} \left(\frac{m}{r^2} - \frac{\lambda r}{3} \right) \equiv (\ln D)' + \frac{2m'}{rD}. \quad (9.57)$$

Если не решая (9.55), просто положить $C(r)=1$, то из (9.55) в соответствии с (9.56) и (9.57) следует соотношение

$$u = \frac{a}{2}(v - u \ln D),$$

или

$$\left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'} \right) D = \frac{2m}{r^2} - \frac{2}{3} \lambda r - \frac{a \left(\frac{m}{r^2} - \frac{\lambda}{3} r \right)}{1 + \frac{a}{2} \ln D}, \quad (9.58)$$

что совпадает с выражением (9.36) в тексте. Это, разумеется, эквивалентно подстановке (9.52) с $C(r)=1$ в (9.54).

Теперь, решая (9.55) с начальным условием $C(r_0)=C_0$, в общем случае находим

$$C(r) = \exp \left\{ \int_{r_0}^r u dr \right\} \left[C_0 + \frac{a}{2} \int_{r_0}^r (u \ln D - v) e^{-\int_{r_0}^r u dr} dr \right]. \quad (9.59)$$

Отсюда, в частности, при $a=0$, согласно (9.56) и (9.57) имеем

$$\begin{aligned} C(r) = C_0 \exp \left\{ \int_{r_0}^r u dr \right\} &= C_0 \exp \left\{ \int_{r_0}^r \left[\frac{m''}{m'} - \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} + \frac{1}{D} \left(\frac{2m}{r^2} - \frac{2}{3} \lambda r \right) \right] dr \right\} = \\ &= C_0 \left(\frac{m'D}{\dot{m}} - \frac{m'_0 D_0}{\dot{m}_0} \right) \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{2m'}{rD} dr \right\}, \end{aligned} \quad (9.60)$$

где нулевым индексом отмечены величины при $r=r_0$. Условие (9.58) при $a=0$, то есть $u=0$, означает, согласно (9.60), что $C=C_0$. И наоборот, ес-

ли в (9.59) положить $C = C_0$, то после дифференцирования по r найдем соотношение

$$C_0 u = \frac{a}{2}(v - u \ln D),$$

или

$$\left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'}\right) D = \frac{2m}{r^2} - \frac{2}{3} \lambda r - \frac{a \left(\frac{m}{r^2} - \frac{\lambda}{3} r \right)}{C_0 + \frac{a}{2} \ln D}, \quad (9.61)$$

что совпадает с (9.58) в случае конкретного выбора $C_0 = 1$. Таким образом, выражения типа (9.58) или (9.61) нельзя считать независимыми уравнениями, это лишь частные следствия принятых ограничений на функцию $C(r)$.

В общем случае по смыслу функции $C(r)$ правая часть выражения (9.59) и, разумеется, (9.60) не должна зависеть от времени t . При ограничениях типа (9.58), (9.61) данное требование выполняется автоматически, так как при этом функция $C(r) = const$. Общее же условие того, чтобы правая часть в (9.59) не содержала t , может быть получено как условие полной интегрируемости [172] системы (9.53), (9.54). Дифференцируя тогда (9.53) по r и (9.54) по t , очевидно, будем иметь

$$\dot{\Phi}' + (\partial \dot{\Phi} / \partial \Phi) \Phi' = \Phi'^{\bullet} + (\partial \Phi' / \partial \Phi) \dot{\Phi}. \quad (9.62)$$

Условие (9.62) в соответствии с (9.53), (9.54) приводится к виду:

$$p' = \dot{q} \Rightarrow \frac{\dot{m}}{m'} q' - \dot{q} = \left(\frac{\dot{m} m''}{m'^2} - \frac{\dot{m}'}{m'} \right) q, \quad (9.63)$$

где, как и ранее,

$$p = \frac{\dot{m}}{m'} q, \quad q = \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{2m'}{rD} + \frac{a\Phi}{rD^2}, \quad D = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}. \quad (9.64)$$

Подставляя (9.64) в (9.63) и проделав необходимые вычисления, окончательно получим:

$$\frac{\dot{m}''}{m'} - \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} + \dot{m}' \left(\frac{\ddot{m}}{\dot{m}^2} - \frac{m''}{m'^2} \right) + \frac{2\dot{m}}{rD} \left(\frac{1}{r} + v \right) = \frac{a\Phi}{rD^2} \frac{\dot{m}}{m'} \left(\frac{1}{r} + v + u \right), \quad (9.65)$$

где v и u определяются формулами (9.57) и (9.56).

Тождественное выполнение соотношения (9.65), эквивалентного (9.62), является необходимым и достаточным условием того, чтобы система (9.53), (9.54) была вполне интегрируема, и, следовательно, чтобы правая часть (9.59) не содержала переменную t явно [172]. Отметим, что выражение (9.65) играет важную роль и в том отношении, что оно фактически ограничивает класс допустимых функций $m(r, t)$.

Если же условие (9.65) не выполняется тождественно, то оно определяет при $a \neq 0$ функцию

$$\Phi = \frac{\frac{\dot{m}''}{m'} - \frac{\ddot{m}'}{\dot{m}} + \dot{m}' \left(\frac{\ddot{m}}{\dot{m}^2} - \frac{m''}{m'^2} \right) + \frac{2\dot{m}}{rD} \left(\frac{1}{r} + v \right)}{a(\dot{m}/m'rD^2)(r^{-1} + v + u)}, \quad (9.66)$$

которую можно рассматривать как единственное решение системы (9.53), (9.54), не содержащее теперь произвольной постоянной. Наконец, в случае $a = 0$ условие (9.65) приводит к соотношению, не содержащему Φ :

$$\frac{\dot{m}''}{m'} - \frac{\ddot{m}'}{\dot{m}} + \dot{m}' \left(\frac{\ddot{m}}{\dot{m}^2} - \frac{m''}{m'^2} \right) + \frac{2\dot{m}}{rD} \left(\frac{1}{r} + v \right) = 0. \quad (9.67)$$

Когда данное условие тождественно выполняется, соответствующую систему типа (9.53), (9.54) следует считать вполне интегрируемой и решать рассмотренным здесь методом. В противном случае (9.67) может рассматриваться в качестве дополнительного ограничения на параметрическую функцию $m(r, t)$.

Соотношения (9.65)-(9.67), а также (9.58), (9.61), с помощью (9.56), (9.57) можно записать короче. Так, для (9.61) имеем:

$$u = \frac{a}{2} v / \left(C_0 + \frac{a}{2} \ln D \right). \quad (9.68)$$

Далее, поскольку

$$\dot{v} = (2\dot{m}/rD)(v + r^{-1}),$$

находим, что (9.67) тождественно совпадает с производной от (9.56) по времени:

$$\dot{u} = 0, \quad (9.69)$$

и, соответственно, (9.65) и (9.66) принимают вид, удобный для дальнейшего анализа:

$$\dot{u} = \frac{a}{2} \frac{\Phi}{m'D} \frac{2\dot{m}}{rD} (u + v + r^{-1}) \equiv \frac{a}{2} \frac{\Phi}{m'D} \left(\frac{2\dot{m}}{rD} u + \dot{v} \right) \quad (9.70)$$

и, аналогично,

$$\Phi = m'D^2 r \dot{u} / a \dot{m} (u + v + r^{-1}). \quad (9.71)$$

Запись (9.69) соотношения (9.67) особенно проста. Из нее сразу следует, что при $a = 0$ переменная u может быть функцией только от r :

$$u = \text{const}(t) = u(r).$$

Отсюда, например, при $u(r) = 0$ получаем условие типа (9.58), (9.61) с $a = 0$, что и следовало ожидать. Это показывает, что, в частности, известное соотношение

$$\left(\frac{m''}{m'} - \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} \right) + \frac{2m}{r^2} - \frac{2}{3} \lambda r = 0 \quad (9.72)$$

может быть получено и не решая исходных уравнений как одно из следствий условия интегрируемости рассмотренной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г.Н.* О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами // *Астрон. журн.* – 1930. – Т. 7, вып. 3-4. – С. 153-172.
2. *Лапин А.С.* Задача двух тел с переменными массами // *Ученые записки ЛГУ. Серия математич. наук.* – 1944. – Вып.13. – С. 3-55.
3. *Hadjidemetriou J.D.* Secular variation of mass and the evolution of binary systems // *Advances in Astronomy and Astrophysics.* – N.Y.-L.: Acad. Press, 1967. – Vol. 5. – P. 131-188.
4. *Михайлов Г.К.* Первые сто лет развития небесной механики тел переменного состава // *Труды Моск. ин-та хим. машиностр. (МИХМ), (теория функций, прикл. матем. и механика).* – М., 1975. – Вып. 65. – С. 122-133.
5. *Михайлов Г.К.* Становление динамики систем с переменными массами в исследованиях по небесной механике // *Исследования по истории физики и механики.* – М.: Наука, 1985. – С. 233-254.
6. *Поляхова Е.Н.* Небесномеханические аспекты задач двух и трех тел с переменными массами // *Ученые записки ЛГУ. Серия математич. наук.* – 1989. – Т. 42, № 424, вып. 64. – С. 104-143.
7. *Поляхова Е.Н.* Небесномеханические аспекты задачи двух тел с переменными массами: современное состояние проблемы // *Астрон. журн.* – 1994. – Т. 71, № 2. – С. 321-331.
8. *Омаров Т.Б.* Развитие работ по звездной динамике, небесной механике и космологии в АФИ им. В. Г. Фесенкова АН КазССР. I // *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.* – Алма-Ата: Наука, 1991. – № 4. – С. 42-49.
9. *Beikov A.A., Omarov T.B.* The theory of orbits in non-stationary stellar systems // *Astron. and Astrophys. Transactions.* – 2003. – Vol. 22(2). – P.143-153.
10. *Огородников К.Ф.* Динамика звездных систем. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 644 с.
11. *Чандрасекар С.* Принципы звездной динамики. – М.: Гос. изд. иностр. литературы, 1948. – 263 с.
12. *Кинг Айвен Р.* Введение в классическую звездную динамику: Учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 288 с.
13. *Кондратьев Б.П.* Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 272 с.
14. *Малков Е.А.* Точные модели в исследованиях бесстолкновительной эволюции гравитирующих систем. Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.03.02. – Алматы, 2004. – 214 с.
15. *Масевич А.Г., Тутуков А.В.* Эволюция звезд: теория и наблюдения. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
16. *Де Ягер К.* Звезды наибольшей светимости. – М.: Мир, 1984. – 493 с.
17. *Лозинская Т.А.* Сверхновые звезды и звездный ветер: Взаимодействие с газом Галактики. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
18. *Фесенков В.Г.* Постановка проблемы космогонии в современной астрономии // *Астрон. журн.* – 1949. – Т. 26, вып. 2. – С. 67-83.
19. *Масевич А.Г.* Закон убыли звездной массы, получаемый на основании теории внутреннего строения звезд // *Астрон. журн.* – 1951. – Т. 28, вып. 1. – С. 36-42.
20. *Фесенков В.Г.* Корпускулярная радиация как фактор эволюции Солнца и звезд. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 71 с.

21. *Gylden H.* Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Korpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind // *Astron. Nachr.* – 1884. – Bd. 109, N 2593-2594. – S. 1-6.
22. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 276 с.
23. *Гельфгат Б.Е.* Два случая интегрируемости задачи двух тел переменной массы и их применение к изучению движения в сопротивляющейся среде // *Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР.* – 1959. – Т. 7, № 5. – С. 354-362.
24. *Гельфгат Б.Е.* К задаче двух тел переменной массы при наличии возмущающей силы пропорциональной скорости // *Докл. на науч. конф. Яросл. гос. пед. ин-та.* – 1962. – Т. 1, № 3. – С. 147-153.
25. *Гельфгат Б.Е.* Обобщение задачи двух тел переменной массы и ее строгие решения // *Труды третьих чтений К. Э. Циолковского, секция “Механика космического полета”.* – 1968. – С. 86-101.
26. *Омаров Т.Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 144 с.
27. *Non-stationary Dynamical Problems in Astronomy / Ed. T. B. Omarov.* – N.Y.: Nova Science Publishers, Inc., 2002. – 248 p.
28. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 464 с.
29. *Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.,* Асимптотические методы небесной механики // *Итоги науки и техники. Серия Астрономия.* – М.: Наука, 1982. – Т. 20. – С. 3-86.
30. *El-Shaboury S.M.* Existence of particular solutions in the generalized restricted problem of three bodies with variable masses // *Astrophys. And Space Science.* – 1990. – Vol. 174, N 1. – P. 151-154.
31. *Лукьянов Л.Г.* О поверхностях нулевой скорости в ограниченной задаче трех тел с переменными массами // *Астрон. журн.* – 1992. – Т. 69, вып. 3. – С. 640-648.
32. *Дубошин Г.Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени // *Астрон. журн.* – 1925. – Т. 2, вып. 4. – С. 5-11.
33. *Дубошин Г.Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. II. // *Астрон. журн.* – 1927. – Т. 4, вып. 2. – С. 123-142.
34. *Дубошин Г.Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. III. Исследование одного частного случая // *Астрон. журн.* – 1928. – Т. 5, вып. 2-3. – С. 138-151.
35. *Дубошин Г.Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. IV. Новый метод решения проблемы // *Астрон. журн.* – 1929. – Т. 6, вып. 2. – С. 162-179.
36. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978. – 456 с.
37. *Dirac P.A.M.* The variability of the gravitational constant // *Cosmology, Fusion and other Matters.* – Boulder. Colo. – 1972. – P. 56-59.
38. *Mc Crea W.H.* Variable G // *Observatory.* – 1978. – Vol. 98, N 1023. – P. 52-54.
39. *Путьева Е.В., Путьев Н.П.* Оценки изменений массы Солнца и гравитационной постоянной по современным наблюдениям планет и космических аппаратов // *Астрон. вестник.* – 2012. – Т. 46, № 1. – С. 81-90.

40. *Krasinsky G.A., Brumberg V.A.* Secular increase of astronomical unit from analysis of the major planet motions, and its interpretation // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* – 2004. – Vol. 90, № 3-4. – P. 267-288.
41. *Лукьянов Л.Г.* Об уравнениях движения задачи многих тел с переменными массами // *Астрон. журн.* – 1983. – Т. 60, вып. 1. – С. 181-184.
42. *Лукьянов Л.Г.* Об уравнениях движения задачи двух тел с переменными массами // *Вестник МГУ. Сер. 3, физ., астрон.* – 1983. – Т. 24, № 1. – С. 62-66.
43. *Лукьянов Л.Г.* Консервативная задача двух тел с переменными массами // *Письма в Астрон. журн.* – 2005. – Т. 31, № 8. – С. 628-633.
44. *Лукьянов Л.Г.* Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом массой // *Астрон. журн.* – 2008. – Т. 85, № 8. – С. 755-768.
45. *Гасанов С.А.* Задача о движении звезды внутри слоисто-неоднородной эллиптической галактики с переменной массой // *Письма в Астрон. журн.* – 2007. – Т. 33, № 12. – С. 925-941.
46. *Гасанов С.А.* О движении звезды с переменной массой внутри слоисто-неоднородной эллиптической галактики // *Астрон. журн.* – 2009. – Т. 86, № 8. – С. 826-832.
47. *Лукьянов Л.Г., Гасанов С.А.* Эллиптические движения звезд в тесных двойных системах // *Астрон. журн.* – 2011. – Т. 88, № 8. – С. 797-805.
48. *Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И.* Лекции по небесной механике: Учебное пособие для высших учебных заведений. – Алматы: Эверо, 2009. – 277 с.
49. *Шеффер В.А.* Определение промежуточной возмущенной орбиты по двум векторам положения // *Астрон. вестник.* – 2003. – Т. 37, № 3. – С. 265-272.
50. *Докобо Х.А.* Некоторые интегрируемые случаи задачи двух тел с массой, зависящей от времени и расстояния // *Письма в Астрон. журн.* – 2003. – Т. 29, № 5. – С. 393-396.
51. *Лин-Сен Ли.* Влияние потери массы за счет звездного ветра на орбиты двойных звезд в рамках теории второго порядка // *Астрон. журн.* – 2008. – Т. 85, № 10. – С. 896-900.
52. *Беков А.А.* Нестационарные задачи небесной механики: Дис. ...докт. физ.-мат. наук: 01.03.01. – М.: МГУ ГАИШ, 1995. – 345 с.
53. *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. – М.: Мир, 2007. – 512 с.
54. *Малков Е.А.* Группы преобразований и первые интегралы задачи n тел переменной массы // *Труды АФИ АН КазССР.* – Алма-Ата: Наука, 1981. – Т. 35. – С. 55-60.
55. *Kholchevnikov S., Frakassini M.* Le probleme des deux corps avec G variable selon l'hypothese de Dirac // *Conference dell'Osserv. astron. Milano-Merate.* – 1968. – Vol. 1, N 9. – P. 1-50.
56. *Омаркулов К.А.* Движение тел в нестационарных нецентральных гравитационных полях. – Кокшетау, 2001. – 146 с.
57. *Шинибаев М.Д.* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 127 с.
58. *Шинибаев М.Д., Дасибеков А.Д.* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела переменной массы в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: Ғылым, 2003. – 130 с.

59. Шинибаев М.Д., Есенов Е.К. Орбитальные движения близкого ИСЗ в нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы: Ғылым, 2009. – 90 с.
60. Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы: Ғылым, 2010. – 132 с.
61. Кожанов Т.С. Гравитационная динамика иерархических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2003. – 290 с.
62. Минглибаев М.Дж. Динамика нестационарных гравитирующих систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 209 с.
63. Разбитная Е.П. Задача двух тел с переменными массами: классификация различных случаев // Астрон. журн. – 1985. – Т. 62, вып. 6. – С. 1175-1181.
64. Jeans J.H. Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 1924. – Vol. 85, N 1. – P. 2-11.
65. Радзиевский В.В., Гельфгат Б.Е. Об ограниченной задаче двух тел переменной массы // Астрон. журн. – 1957. – Т. 34, вып. 4. – С. 581-587.
66. Беркович Л.М. Задача Гильдена-Мещерского и законы изменения массы // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 250, № 5. – С. 1088-1091.
67. Беркович Л.М. Преобразование задачи Гильдена-Мещерского к стационарному виду и законы изменения массы // Прикл. мат. и мех. – 1980. – Т. 44, № 2. – С. 354-357.
68. Berkovich L.M. Gylden-Meshcherskii problem // Celest. Mech. – 1981. – Vol. 24, N 4. – P. 407-429.
69. Беркович Л.М. Об интегрируемости задачи Гильдена-Мещерского // Прикл. мат. и мех. – 1982. – Т. 46, № 1. – С. 165-167.
70. Степанов В.В. О форме траекторий материальной точки для случая ньютоновского притяжения переменной массы // Астрон. журн. – 1930. – Т. 7, вып. 2. – С. 73-80.
71. Беков А.А. Интегрируемые случаи и траектории движения в задаче Гильдена-Мещерского // Астрон. журн. – 1989. – Т. 66, вып. 1. – С. 135-151.
72. Беркович Л.М. Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений // Диффер. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 2. – С. 353-356.
73. Беркович Л.М., Гельфгат Б.Е. Исследования некоторых нестационарных задач небесной механики методом преобразований // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. – М.: Наука, 1975. – С. 54-61.
74. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
75. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. – 2-е издание. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
76. Радзиевский В.В. Задача двух гравитирующих и излучающих тел // Астрон. журн. – 1951. – Т. 28, вып. 5. – С. 363-372.
77. Беков А.А. Об эволюции орбит двойных систем с излучением // Мат. и мех.: Тез. докл. 9 Респ. межвуз. науч. конф., 12-15 сент., 1989. – Ч. 3. – Алма-Ата. 1989. – С. 6.
78. Saslaw W.C. Motion around a source whose luminosity changes // Astrophys. J. – 1978. – Vol. 226. – P. 240-252.
79. Беркович Л.М., Поляхова Е.Н. Прикладной фотогравитационный случай нестационарной задачи Гильдена-Мещерского // Прикл. небес. мех. и упр. движением:

- Труды 13 науч. чтений по космонавт., посвящ. памяти акад. С. П. Королева и др. сов. ученых-пионеров освоения косм. пр-ва. – М., 24-27 янв. 1989. – М., 1989. – С. 5-6.
80. Поляхова Е.Н. Нестационарная фотогравитационная задача двух тел в терминах проблемы Гюльдена-Мещерского-Джинса // Астрон. журн. – 1989. – Т. 66, вып. 6. – С. 1304-1310.
 81. Лукьянов Л.Г. О частных решениях нестационарной фотогравитационной задачи трех тел // Вестник МГУ. Сер. 3, физ., астрон. – 1986. – Т. 27, № 2. – С. 78-83.
 82. Guillaume P. Regularization of the two body problem with variable mass // Celest. Mech. – 1974. – Vol. 10, N 2. – P. 141-149.
 83. Muner A., Burgan J.R., Fijalkov E. Asymptotic solutions for a variable mass two-body problem // Astron. and Astrophys. – 1981. – Vol. 94, N 2. – P. 373-376.
 84. Батырев А.А. О формах траекторий в задачах двух и трех тел при изменении масс по закону Мещерского // Астрон. журн. – 1941. – Т. 18, вып.4-5. – С. 343-346.
 85. Батырев А.А. О формах траекторий в задаче двух тел с переменными массами // Астрон. журн. – 1949. – Т. 26, вып. 1. – С. 56-59.
 86. Аксенов Е.П. О научных трудах профессора Г. Н. Дубошина // Почти периодические орбиты в небесной механике. – М.: МГУ, 1990. – С. 4-13.
 87. Радзиевский В.В., Суркова Л.П. Об эволюции элементов орбит тесных двойных систем // Астрон. журн. – 1973. – Т. 50, вып. 6. – С. 1200-1210.
 88. Курьшев В.И., Перов Н.И. Об уравнениях движения бинарных систем с переменными массами // Астрон. журн. – 1981. – Т. 58, вып. 4. – С. 886-887.
 89. Беков А.А. Задача Гильдена-Мещерского. I. Точные решения // Препринт Астрофизического ин-та им. В. Г. Фесенкова АН КазССР. – Алма-Ата, 1990. – № 90-06. – 46 с.
 90. Гельфгат Б.Е. К вопросу об асимптотическом поведении решений задачи двух тел переменной массы // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1965. – Т. 5. – С. 191-204.
 91. Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. – 240 с.
 92. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.
 93. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
 94. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
 95. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
 96. Донцов Ю.П., Завенягин Ю.А., Тилинин Г.Н. Движение тела переменной массы и адиабатические инварианты // Космич. исслед. – 1985. – Т. 23, № 4. – С. 634-636.
 97. Беков А.А. О периодических решениях задачи Гильдена-Мещерского // Астрон. журн. – 1993. – Т. 70, вып. 6. – С. 1289-1295.
 98. Беркович Л.М. Обобщенная нестационарная задача двух тел и законы изменения массы // Вопросы небесной механики и звездной динамики. – Алма-Ата: Наука, 1990. – С. 18-23.
 99. Мычелкин Э.Г. Параметрическое решение задачи Гильдена-Мещерского // Гравитация и квантовая теория поля. – Алма-Ата: КазГУ, 1990. – С. 60-66.

100. *Мухаметкалиева Р.К.* К вопросу об исследовании нестационарного аналога интеграла Лапласа // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1988. – Т. 49. – С. 74-79.
101. *Поляхова Е.И.* Космический полет с солнечным парусом. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
102. *Поляхова Е.И.* Интегрируемый случай задачи Гюльдена-Мещерского применительно к движению в фотогравитационном поле // Вестник ЛГУ. Серия I. Матем., мех., астрон. – 1986. – Вып. 3. – С. 83-89.
103. *Беков А.А.* Задача Гильдена-Мещерского. III. Параметрические решения // Препринт Астрофизического ин-та им. В. Г. Фесенкова АН КазССР. – Алма-Ата, 1990. – № 90-02. – 25 с.
104. *Поляхова Е.И.* Парусная гелиоцентрическая задача с переменной редукцией гравитационного поля // Вестник ЛГУ. Серия I. Матем., мех., астрон. – 1984. – Вып. 4, № 19. – С. 63-68.
105. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Часть I. – М.: ИЛ., 1949. – 798 с.
106. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Часть II. – М.: ИЛ., 1949. – 220 с.
107. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. – М.: Физматгиз., 1963. – 515 с.
108. *Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
109. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
110. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
111. *Гельфгат Б.Е.* Об аналогах интеграла Якоби в ограниченной задаче трех тел переменной массы // Современные проблемы небесной механики и астродинамики. – М.: Наука, 1973. – С. 7-13.
112. *Беков А.А.* О частных решениях задачи Гильдена-Мещерского // Динамика тверд. тела перемен. состава. – Алма-Ата: КазГУ, 1990. – С. 3-6.
113. *Беков А.А., Мычелкин Э.Г.* Об эволюции орбит двойных систем с излучением // Гравитация и квантовая теория поля. – Алма-Ата: КазГУ, 1990. – С. 49-52.
114. *Самойлова-Яхонтова Н.С.* Движение тела переменной массы под действием центральной силы // Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР. – 1962. – Т. 8, № 6(99). – С. 396-401.
115. *Jeans J.* Astronomy and Cosmogony. – Cambridge, 1929. – 290 p.
116. *Беков А.А.* О точных решениях и промежуточном движении в задаче Гильдена-Мещерского // Современный групп. анализ и задачи мат. моделирования. Тезисы XI Российского Коллоквиума, Самара, 7-11 июля 1993. – Самара, 1993. – С. 10.
117. *Беков А.А.* О промежуточном движении и системах оскулирующих элементов в задаче Гильдена-Мещерского // Проблемы физики звезд и внегалактич. астрономии. – Алматы: Ғылым, 1993. – С. 115-134.
118. *Deprit A.* The secular accelerations in Gylden's problem // Celest. Mech. – 1983. – Vol. 31, N 1. – P. 1-22.
119. *Hadjidemetriou J.D.* Two-body problem with variable mass: a new approach // Icarus. – 1963. – Vol. 2. – P. 440-453.

120. *Омаров Т.Б., Минглибаев М.Д.* Системы оскулирующих элементов в задаче Гюльдена-Мещерского // *Динамическая эволюция космических систем. Труды АФИ АН КазССР.* – Алма-Ата: Наука, 1982. – Т. 39. – С. 57-65.
121. *Минглибаев М.Д., Омаров Т.Б.* К нестационарным модельным задачам небесной механики // *Динамическая эволюция звездных систем. Труды АФИ АН КазССР.* – Алма-Ата: Наука, 1984. – Т. 43. – С. 3-11.
122. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
123. *Беков А.А.* Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и динамические системы, приводимые к канонической форме // *Прикл. мат. и мех.* – 1986. – Т. 50, вып. 5. – С. 717-726.
124. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975. – 800 с.
125. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз., 1961. – 824 с.
126. *Беков А.А., Андабаев Э.Б.* Сравнительный анализ систем оскулирующих элементов в задаче Гильдена-Мещерского // *Известия НАН РК. Серия физ.-матем.* – Алматы: Ғылым, 1994. – № 4. – С. 12-17.
127. *Deprit A., Miller B., Williams Carol A.* Gylden systems: rotation of pericenters // *Astrophys. and Space Sci.* – 1989. – Vol. 159, N 2. – P. 239-270.
128. *Дубошин Г.Н.* Об устойчивости круговых движений в сопротивляющейся среде // *Астрон. журн.* – 1936. – Т. 13, вып. 5. – С. 455-486.
129. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 208 с.
130. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. – М.: Наука, 1968. – С. 352.
131. *Дегтярев В.Г.* Об устойчивости круговых движений в задаче двух неподвижных центров // *Прикл. мат. и мех.* – 1962. – Т. 26, вып. 4. – С. 778-779.
132. *Дегтярев В.Г., Евдокимова Л.С.* Анализ устойчивости круговых орбит в задаче двух неподвижных центров // *Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР.* – 1966. – Т. 10, № 8 (121). – С. 516-522.
133. *Питъев Н.П.* Круговые орбиты в задаче двух неподвижных центров // *Астрон. журн.* – 1975. – Т. 52, вып. 6. – С. 1324-1327.
134. *Питъев Н.П.* Круговые орбиты в задаче двух неподвижных центров // *Вестник ЛГУ.* – 1975. – № 13. – С. 131-133.
135. *Амбарцумян В.А.* Об активности ядер галактик // В сб. «Нестационарные явления в галактиках». – Ереван: Изд-во АрмССР, 1968. – С. 11-20.
136. *Амбарцумян В.А.* О ядрах галактик и их активности // В сб. «Проблемы гравитации». – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1975. – С. 5-17.
137. *Беков А.А.* Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.03.01 – М.: МГУ ГАИШ, 1978. – 111 с.
138. *Беков А.А.* Устойчивость одного класса спиральных орбит в нестационарной звездной системе с осевой симметрией // *Труды АФИ АН КазССР.* – Алма-Ата: Наука, 1979. – Т. 33. – С. 36-39.
139. *Беков А.А.* Об устойчивости нестационарных круговых орбит в сопротивляющейся среде // *Труды АФИ АН КазССР.* – Алма-Ата: Наука, 1981. – Т. 35. – С. 50-54.

140. *Беков А.А.* Об устойчивости спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1982. – Т. 39. – С. 42-46.
141. *Беков А.А.* Об устойчивости спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле // Известия НАН РК. Серия физ.-матем. – Алматы: Ғылым, 2013. – № 4. – С. 65-70.
142. *Беков А.А.* Об устойчивости кольцевой структуры пекулярных галактик // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1983. – Т. 40. – С. 80-86.
143. *Беков А.А., Омаров Т.Б.* Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики // Астрон. журн. – 1978. – Т. 55, вып. 3. – С. 635-644.
144. *Беков А.А., Омаров Т.Б.* К нестационарной гравитационной задаче Земля-спутник // Письма в Астрон. журн. – 1978. – Т. 4, № 1. – С. 30-33.
145. *Беков А.А.* Об устойчивости неавтономных динамических систем // Известия МН-АН РК. Серия физ.-матем. – Алматы: Ғылым, 1998. – № 4. – С. 57-60.
146. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. – Т. 2. – М.-Л., 1956. – 473 с.
147. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Кольцевые галактики // Астрон. журн. – 1960. – Т. 37, вып. 3. – С. 381-386.
148. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Внегалактическая астрономия. – М.: Наука, 1972. – 478 с.
149. *Canon R.D., Lloyd C., Penston M.V.* Ring galaxies // Observatory. – 1970. – Vol. 90, N 977. – P. 153-154.
150. *Thomson L.A.* Possible ring galaxies near rich clusters // Astroph. J. – 1977. – Vol. 211, N 3, part I. – P. 684-692.
151. *Theys J.S., Spiegel E.A.* Ring galaxies. I. // Astroph. J. – 1976. – Vol. 208, N 3, part I. – P. 650-661.
152. *Freeman K.C., de Vaucouleurs G.* An interpretation of ring galaxies and the properties of intergalactic gas clouds // Astroph. J. – 1974. – Vol. 194, N 3, part I. – P. 569-585.
153. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Многообразие кольцевых галактик и их происхождение // Письма в Астрон. журн. – 1976. – Т. 2, № 11. – С. 520-523.
154. *Smith R..T.* The radial velocity of a peculiar nebula // Publ. of Astr. Soc. of Pacific. – 1941. – Vol. 53. – P. 187-188.
155. *Baade W., Minkowski R.* On the identification of radio sources // Astroph. J. – 1954. – Vol. 119, N 1. – P. 215-231.
156. *Burbidge E.M.* The strange extragalactic systems: Mayall's Object and IC 883 // Astroph. J. – 1964. – Vol. 140, N 4. – P. 1617-1620.
157. *Sersic J.L.* Transient annular structures in exploding galaxies // “Periodic orbits, Stability and Resonances”, (ed. G.E.O.Giacaglia). – Dordrecht-Holland, 1970. – P. 314-321.
158. *Sersic J.L.* On the structure of the peculiar galaxies // Bulletin of the astron. inst. of Czechoslovakia. – 1973. – Vol. 24, N 3. – P. 150-157.
159. *Беков А.А., Омаров Т.Б.* К структурным особенностям пекулярных галактик // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1976. – Т. 28. – С. 3-13.
160. *Дубошин Г.Н.* Об устойчивости колец Сатурна // Труды гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга. – 1940. – Т. 14, вып. 1. – С. 172-207.

161. *Беков А.А.* Об обобщенной задаче Баррара // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1978. – Т. 32. – С. 21-24.
162. *Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. – М.: Наука, 1961. – 267 с.
163. *Беков А.А.* О предельном варианте задачи двух неподвижных центров переменной массы // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1982. – Т. 39. – С. 38-41.
164. *Vaidya P.C.* The Gravitational field of a Radiating Star // Proceedings of the Indian Academy of Sciences. – 1951. – Vol. A33. – P. 264.
165. *Mallett R.L.* Radiating Vaidya metric imbedded in de Sitter space // Physical review D. Part Fields. – 1985. – Vol. 31, N 2. – P. 416-417.
166. *Gupta Y.K., Gupta S.* On the most general metric of a radiating mass in a de Sitter space // General relativity and gravitation. – 1988. – Vol. 20, N 12. – P. 1293-1295.
167. *Беков А.А., Мычелкин Э.Г.* Гравитационное поле звезды с переменной массой // Известия АН КазССР. Серия физ.-матем. – Алма-Ата: Ғылым, 1990. – № 4. – С. 64-67.
168. *Мычелкин Э.Г., Беков А.А.* Гравитационное поле звезды с переменной массой на космологическом фоне де-Ситтера // Препринт Астрофизического ин-та им. В.Г.Фесенкова АН КазССР. – Алма-Ата, 1990. – № 90-01. – 14 с.
169. *Mychelkin E.G., Bekov A.A.* The gravitational field of the variable mass on the cosmological de Sitter background // Preprint V. G. Fessenkov Astrophysical institute Academy of Science of the Kazakh SSR. – Alma-Ata, 1990. – Preprint 90-05. – 16 p.
170. *Мычелкин Э.Г., Беков А.А.* Расширенная проблема Вайдьи с учетом космологического члена // Проблемы динамики звездных систем. Труды АФИ АН Республики Казахстан. – Алма-Ата: Ғылым, 1992. – Т. 50. – С. 127-132.
171. *Беков А.А.* О расширенной проблеме Вайдьи с учетом космологического фона де Ситтера // Тезисы докл. Российская грав. конфер. “Теоретич. и экспер. проблемы гравитации”. – Владимир, 1999. – С. 143.
172. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – Т. 4. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 804 с.
173. *Bhattacharyya D., Ray D.* On “Radiating Vaidya metric imbedded in de Sitter space” // Gen. Rel. Grav. – 1987. – Vol. 19, N 7. – P. 651-654.

Научное издание

Аскар Абдул-Халыкович Беков

**ДИНАМИКА ДВОЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ**

Ответственный за выпуск *С. К. Досаева*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

ISBN 9965-593-46-9



Подписано в печать 23.10.2013.

Формат 60x84¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

10,25 п.л. Тираж 500.

*Отпечатано в типографии ИП «Аруна»
г. Алматы, ул. Муратбаева, 75*

