

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И УСИЛИЙ В КОНСТРУКЦИЯХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИИ

Интенсивность сил инерции и тяжесть звена имеют определенное аналитическое выражение. Используя их [1] и метод конечных стержневых элементов (МКЭ), основанный на прямолинейном однородном стержне [2–4], получены более точные для исследования кинетостатики рычажных механизмов модели стержневого конечного элемента:

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_\xi^{ij} \\ \vec{R}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{ij} & B_{12}^{ij} \\ B_{21}^{ij} & B_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}_\xi^{ij} \\ \vec{U}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{Q}^{ij} \\ \vec{Q}^{ji} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где реактивные силы $\vec{R}_\xi^{ij} = [R_{1N\xi}^{ij} R_{2N\xi}^{ij} R_{3N\xi}^{ij} R_{1M\xi}^{ij} R_{2M\xi}^{ij} R_{3M\xi}^{ij}]^T$ и $\vec{R}_\xi^{ji} = [R_{1N\xi}^{ji} R_{2N\xi}^{ji} R_{3N\xi}^{ji} R_{1M\xi}^{ji} R_{2M\xi}^{ji} R_{3M\xi}^{ji}]^T$, узловые перемещения $\vec{U}_\xi^{ij} = [u_1^{ij} u_2^{ij} u_3^{ij} \phi_1^{ij} \phi_2^{ij} \phi_3^{ij}]^T$ и $\vec{U}_\xi^{ji} = [u_1^{ji} u_2^{ji} u_3^{ji} \phi_1^{ji} \phi_2^{ji} \phi_3^{ji}]^T$; $[B_{rq}^{ij}]$ ($r=1,2; q=1,2$) матрицы жесткости $[B^{ij}]$ не изменяются [2–4], а подвекторы \vec{Q}^{ij} и \vec{Q}^{ji} получены в следующем виде [1]:

– для распределенной инерции плоскопараллельного движения

$$\vec{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ -\frac{a_q l}{2} - \frac{3b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a_q l^2}{12} - \frac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ -\frac{a_q l}{2} - \frac{7b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_q l^2}{12} + \frac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$$\text{где } a_n = -\gamma A \sin \theta - \frac{\gamma A}{g} w_p^{x_k}; \quad b_n = \frac{\gamma A}{g} \omega^2; \quad a_q = -\gamma A \cos \theta - \frac{\gamma A}{g} w_p^{y_k};$$

$b_q = -\frac{\gamma A}{g} \varepsilon$; γ, A, l – удельный вес, площадь сечения и длина звена; θ – угол наклона звена;

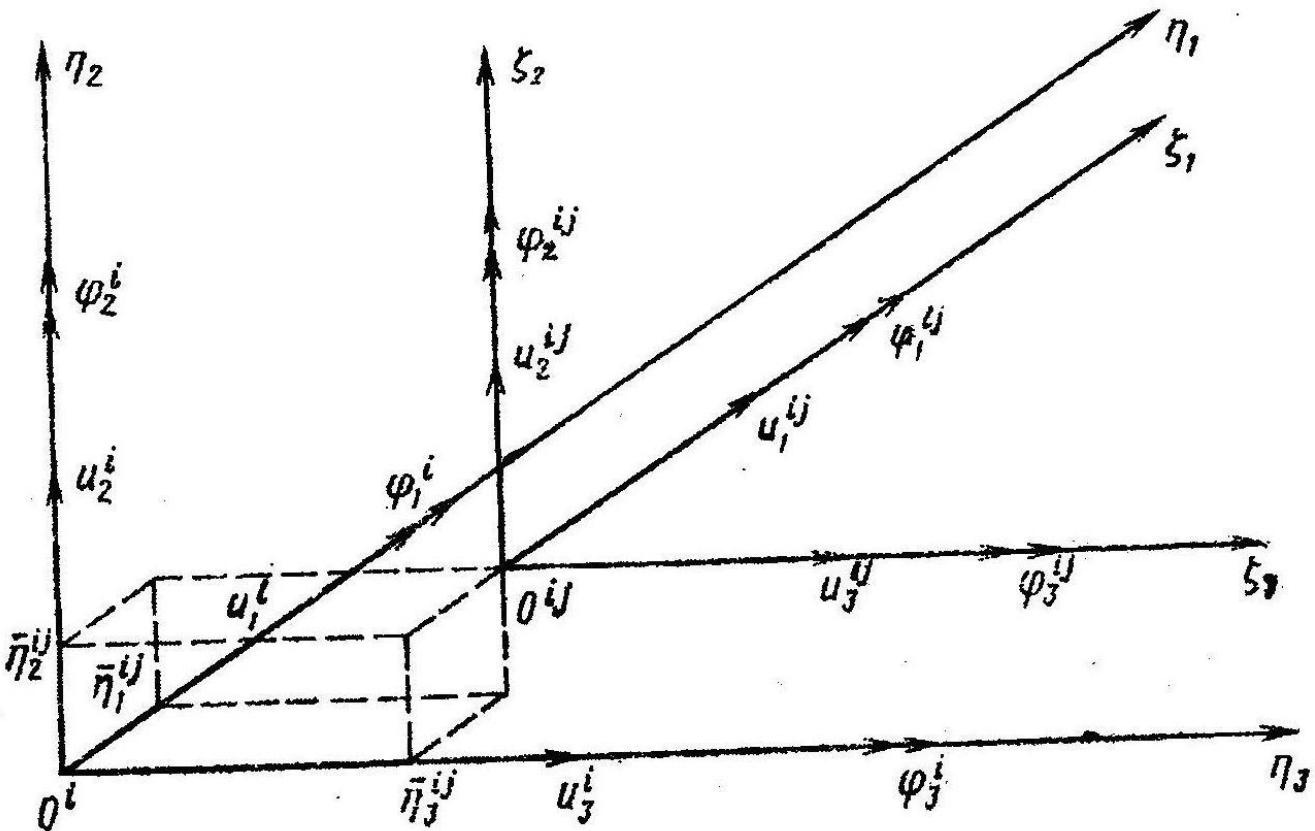
– для распределенной инерции пространственного движения:

$$\bar{Q}^{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{a_n l}{2} & -\frac{b_n l^2}{2} \\ \frac{a_q^y l}{2} & \frac{3b_q^y l^2}{20} \\ \frac{a_q^z l}{2} & \frac{3b_q^z l^2}{20} \\ \frac{ml}{2} & 0 \\ \frac{a_q^z l^2}{12} + \frac{b_q^z l^3}{30} & 0 \\ \frac{a_q^y l^2}{12} - \frac{b_q^y l^3}{30} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}^{ji} = \begin{pmatrix} -\frac{a_n l}{2} & -\frac{b_n l^2}{2} \\ \frac{a_q^y l}{2} & \frac{7b_q^y l^2}{20} \\ \frac{a_q^z l}{2} & \frac{7b_q^z l^2}{20} \\ \frac{ml}{2} & 0 \\ \frac{a_q^z l^2}{12} - \frac{b_q^z l^3}{30} & 0 \\ \frac{a_q^y l^2}{12} + \frac{b_q^y l^3}{30} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где m – равномерно распределенная интенсивность крутящего момента.

Определение перемещений узлов. Пусть \vec{U}^{ij} – вектор обобщенных перемещений точки контакта ij -го стержневого элемента с i -м узловым элементом, а \vec{U}^{ji} – вектор обобщенных перемещений точки контакта ij -го стержневого элемента с j -м узловым элементом. Положительные направления перемещений примем совпадающими с положительными направлениями координатных осей $O^i \zeta_k$ и $O^j \zeta_k$ ($k = 1, 2, 3$). Тогда имеют место зависимости $\vec{U}^{ij} = [D^{ij}] * \vec{U}_\xi^{ij}$, $\vec{U}^{ji} = [D^{ji}] * \vec{U}_\xi^{ji}$ и обратные $\vec{U}_\xi^{ij} = [D^{ij}]^T \vec{U}^{ij}$, $\vec{U}_\xi^{ji} = [D^{ji}]^T \vec{U}^{ji}$, причем $[D^{ij}] = [D^{ji}]$ в силу прямолинейности стержня. В свою очередь перемещения \vec{U}^{ij} и \vec{U}^{ji} точек контакта ij -го стержневого элемента с i -м и j -м узловыми элементами связаны с перемещениями $\tilde{\Delta}^i$ и $\tilde{\Delta}^j$ центров этих узловых элементов вдоль осей $O^i \eta_k$ и $O^j \eta_k$ ($k = 1, 2, 3$) следующими соотношениями (см. рисунок):

$$\vec{U}^{ij} = [H^{ij}]^T \tilde{\Delta}^i, \quad \vec{U}^{ji} = [H^{ji}]^T \tilde{\Delta}^j,$$



Связь компонент перемещений точек O^i и O^{ij} узлового элемента

$$\text{где } \vec{\Delta}^i = [u_1^i \ u_2^i \ u_3^i \ \varphi_1^i \ \varphi_2^i \ \varphi_3^i]^T, \quad \vec{\Delta}^j = [u_1^j \ u_2^j \ u_3^j \ \varphi_1^j \ \varphi_2^j \ \varphi_3^j]^T$$

$$[\bar{H}_i^j] = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\eta}_3^{ij} & \bar{\eta}_2^{ij} \\ \bar{\eta}_3^{ij} & 0 & -\bar{\eta}_1^{ij} \\ -\bar{\eta}_2^{ij} & \bar{\eta}_1^{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\bar{H}_i^{ji}] = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\eta}_3^{ji} & \bar{\eta}_2^{ji} \\ \bar{\eta}_3^{ji} & 0 & -\bar{\eta}_1^{ji} \\ -\bar{\eta}_2^{ji} & \bar{\eta}_1^{ji} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$$\text{Обозначая } [D^{ij}]^T [H^{ij}]^T = [H^{ij} D^{ij}]^T = [C_i^{ij}]^T \quad \text{и}$$

$$[D^{ji}]^T [H^{ji}]^T = [H^{ji} D^{ji}]^T = [C_i^{ji}]^T, \text{ получим}$$

$$\vec{U}_{\xi}^j = [C_i^{ij}]^T \vec{\Delta}^i, \quad \vec{U}_{\xi}^{ji} = [C_i^{ji}]^T \vec{\Delta}^j. \quad (5)$$

Подставляя далее соотношения (5) в зависимости (1), получим:

$$\vec{R}_{\xi}^{ij} = [B_{11}^{ij}] [C_i^{ij}]^T \vec{\Delta}^i + [B_{12}^{ij}] [C_i^{ji}]^T \vec{\Delta}^j + \vec{Q}^{ij}; \quad (6)$$

$$\vec{R}_{\xi}^{ji} = [B_{21}^{ij}] [C_i^{ij}]^T \vec{\Delta}^i + [B_{22}^{ij}] [C_i^{ji}]^T \vec{\Delta}^j + \vec{Q}^{ji}; \quad (7)$$

связывающие обобщенные реакции \vec{R}_{ξ}^{ij} и \vec{R}_{ξ}^{ji} с обобщенными перемещениями $\vec{\Delta}^i$ и $\vec{\Delta}^j$ центров узловых элементов, соединенных ij -м стержневым элементом.

Подставляя (6) и (7) в уравнения равновесия узловых элементов

$$\sum_{j=1}^{i-1} [C_i^{ji}] * \vec{R}_\xi^{ji} + \sum_{j=i+1}^{N_r} [C_i^{ji}] * \vec{R}_\xi^{ji} = \vec{q}^i \quad (i = 1, \dots, N_r),$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных перемещений центров узловых элементов рассматриваемой пространственной стержневой системы:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{i-1} [C_i^{ji}] [B_{21}^{ij}] [C_i^{ji}]^T * \vec{\Delta}^j + \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} [C_i^{ji}] [B_{22}^{ij}] [C_i^{ji}]^T + \sum_{j=i+1}^{N_r} [C_i^{ji}] [B_{11}^{ij}] [C_i^{ji}]^T \right\} * \vec{\Delta}^i + \\ & + \sum_{j=i+1}^{N_r} [C_i^{ji}] [B_{12}^{ij}] [C_i^{ji}]^T * \vec{\Delta}^j = \vec{q}^i - \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} [C_i^{ji}] * \vec{Q}^{ji} - \sum_{j=i+1}^{N_r} [C_i^{ji}] * \vec{Q}^{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, N_r) \end{aligned} \quad (8)$$

Систему линейных алгебраических уравнений (8) можно записать в матричной форме

$$[P]^* \vec{\Delta} = \vec{F}. \quad (9)$$

$$\text{Здесь } [P] = \begin{bmatrix} p_{11} \dots p_{1N_r} \\ \dots \\ p_{N_r 1} \dots p_{N_r N_r} \end{bmatrix}; \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \vec{\Delta}_1 \\ \dots \\ \vec{\Delta}_{N_r} \end{bmatrix}; \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \dots \\ \vec{f}_{N_r} \end{bmatrix}, (j > i), [p_{ij}] = [K_{21}^{ij}],$$

$$[p_{ii}] = \sum_{t=1}^{i-1} [K_{22}^{tt}] + \sum_{t=i+1}^{N_r} [K_{11}^{tt}], [p_{ji}] = [K_{21}^{ij}],$$

$$\vec{f}_i = \vec{q}_i - \sum_{t=1}^{i-1} [C_i^{ti}] * \vec{Q}^{ti} - \sum_{t=i+1}^{N_r} [C_i^{ti}] * \vec{Q}^{ti} \quad (10)$$

$$[K_{11}^{ij}] = [C_i^{ji}] [B_{11}^{ij}] [C_i^{ji}]^T; \quad [K_{12}^{ij}] = [C_i^{ji}] [B_{12}^{ij}] [C_i^{ji}]^T;$$

$$[K_{21}^{ji}] = [C_i^{ji}] [B_{21}^{ij}] [C_i^{ji}]^T; \quad [K_{22}^{ji}] = [C_i^{ji}] [B_{22}^{ij}] [C_i^{ji}]^T.$$

Суммирование в (8) и (10) ведется только по реальным связям. Решение системы (9) с учетом того, что некоторые из компонент векторов $\vec{\Delta}^i$ обобщенных смещений центров узловых элементов могут быть заранее известны (задание граничных условий, накладываемых на модель), позволяет определить остальные компоненты векторов $\vec{\Delta}^i$ ($i = 1, 2, \dots, N_r$) обобщенных смещений конечно-элементной модели.

Решая (6, 7) при найденных $\bar{\Delta}^i$ ($i = 1, 2, \dots, N_r$), находим обобщенные реакции \bar{R}_ξ^{ij} и \bar{R}_ξ^{ji} .

Реакции в опорах стержневой системы. Реакции \bar{R}^i в центрах узловых элементов связаны с реакциями \bar{R}_ξ^{ij} и \bar{R}_ξ^{ji} со стороны стержневых элементов соотношениями:

$$\bar{R}^i = \sum_{j=1}^{i-1} [C_i^{ji}] * \bar{R}_\xi^{ji} + \sum_{j=i+1}^{N_r} [C_i^{ij}] * \bar{R}_\xi^{ij}, \quad (11)$$

В свою очередь реакции \bar{R}_ξ^{ij} и \bar{R}_ξ^{ji} выражаются через перемещения $\bar{\Delta}^i$ и $\bar{\Delta}^j$ центров узловых элементов по формулам (6, 7). Подставляя их в (11), получаем выражение

$$\begin{aligned} \bar{R}^i = & \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} [K_{22}^{ij}] + \sum_{j=i+1}^{N_r} [K_{11}^{ij}] \right\} * \bar{\Delta}^i + \sum_{j=1}^{i-1} [K_{21}^{ij}] * \bar{\Delta}^j + \sum_{j=i+1}^{N_r} [K_{11}^{ij}] * \bar{\Delta}^j + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} [C_i^{ji}] * \bar{Q}^j + \sum_{j=i+1}^{N_r} [C_i^{ij}] * \bar{Q}^i, \end{aligned} \quad (12)$$

позволяющее определить реакции в центре i -го узлового элемента, если известны перемещения центров всех узловых элементов. Очевидно, что если на перемещения центра i -го узлового элемента не было наложено никаких ограничений, то $\bar{R}^i = \bar{q}^i$. Если же на перемещения центра i -го узлового элемента были наложены какие-либо ограничения, то такие узловые элементы будем называть опорными узловыми элементами. Реакции \bar{R}^i , приведенные к центру опорного узлового элемента, вычисляются по формуле (12). Реакции \bar{R}_0^i в самих опорах равны реакциям в опорных узловых элементах. Положительные направления реакций \bar{R}_0^i в опорах совпадают с положительными направлениями $O^j \eta_k$ ($k = 1, 2, 3$).

Построение эпюор внутренних силовых факторов для прямолинейного стержневого элемента. После того, как система уравнений (9) решена и определены смещения $\bar{\Delta}^i$ центров узловых элементов пространственной стержневой системы, по формулам

$$\bar{U}_\xi^{ij} = [C_i^{ij}]^T \bar{\Delta}^i; \quad \bar{U}_\xi^{ji} = [C_i^{ji}]^T \bar{\Delta}^j$$

можно вычислить обобщенные перемещения точек контакта ij -го стержневого элемента с i -м и j -м узловыми элементами. По формуле

$$\vec{R}_{\xi}^{ij} = [B_{11}^{ij}] * \vec{U}_{\xi}^{ji} + [B_{12}^{ij}] * \vec{U}_{\xi}^{ji} + \vec{Q}^{ij}$$

вычисляют реакции, действующие на ij -й стержневой элемент в начале локальной системы координат стержня, и по формулам

$$N_0 = -R_{1N\xi}^{ij}, \quad Q_{y0} = -R_{2N\xi}^{ij}, \quad Q_{z0} = -R_{3N\xi}^{ij};$$

$$M_0 = -R_{1M\xi}^{ij}, \quad M_{y0} = -R_{2M\xi}^{ij}, \quad M_{z0} = -R_{3M\xi}^{ij};$$

— внутренние силовые факторы в начальном торцовом сечении стержня. Их достаточно для построения эпюр внутренних силовых факторов для ij -го стержневого элемента конечно-элементной модели. Из уравнений равновесия получим

$$\frac{dN}{dx} + a_n + b_n x = 0, \quad \frac{dM}{dx} + m = 0;$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + a_q + b_q x = 0; \quad \frac{dM_z}{dx} - Q_y = 0;$$

$$\frac{dQ_z}{dx} + a_q^z + b_q^z x = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - Q_z = 0$$

тем самым определив зависимость внутренних силовых факторов от координаты x .

Литература

1. Джолдасбеков С.У., Темирбеков Е.С. Силовой анализ конструкций стержневых механизмов с учетом распределенной инерции движения // Междунар. научн. конф. “Проблемы теоретической и прикладной механики”, посвященная 75-летию академика У.А. Джолдасбекова. 1–2 марта, 2006: Тез. докл. – Алматы, 2006. – С. 94.
2. Шапошников Н.Н., Тарабасов Н.Д., Петров В.Б., Мяченков В.И. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. – М.: Машиностроение, 1981. – 333 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
4. Темирбеков Е.С. Кинематическое и силовое исследования механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев: Дисс. ... докт. техн. наук. – Алматы, 1996.