УДК 519.46

О когомологиях модулярных алгебр Ли

Джумадильдаев А. С.

Для многих классов алгебр Ли над полем нулевой характеристики когомологии изучены хорошо. Например, когомологии конечномерных полупростых алгебр Ли над полем комплексных чисел полностью вычислены. Общеизвестная лемма Уайтхеда утверждает, что когомологии полупростых алгебр Ли с коэффициентами в неприводимом нетривиальном конечномерном модуле равны нулю (см., например, [1, с. 106, упр. 12к]). Такой факт справедлив также для конечномерных нильпотентных алгебр Ли (Диксмье [2]). В последнее время весьма интенсивно изучаются когомологии бесконечномерных алгебр Ли картановских типов. По сравнению с нулевой характеристикой когомологии модулярных алгебр Ли, т. е. алгебр Ли над полем положительной характеристики, практически не исследованы. Поэтому всякое утверждение, касающееся специально когомологий модулярных алгебр Ли, представляет интерес.

В настоящей работе мы доказываем некоторые модулярные аналоги леммы Уайтхеда. В отличие от случая нулевой характеристики основной результат (теорема 1) справедлив для произвольной модулярной алгебры Ли и для достаточно широкого класса модулей (не обязательно неприводимых). Например, когомологии p-алгебр Ли с коэффициентами в неприводимом модуле могут быть нетривиальными только для p-модулей (теорема 2). Затем эти результаты применяются для исследования когомологий простых алгебр Ли: из классических серий — трехмерной простой алгебры Ли типа A_1 из картановских серий—p^n-мерной алгебры Цассенхауза $W_1(n)$. Для алгебры Ли типа A_1 получено полное описание когомологий с коэффициентами в неприводимом модуле (теорема 4). Для алгебры Цассенхауза изучение таких когомологий сведено к вычислению когомологий самой алгебры Ли $W_1(n)$ и ее (p^n-2)-мерной нильпотентной подалгебры $\mathscr{L}_1=\bigoplus_{i\geqslant 1} L_i$, где $L_i=\langle x^{(i+1)}\partial\rangle$, с коэффициентами в одномерном тривиальном модуле (следствие теоремы 5).

§ 1. Когомологии модулярных алгебр Ли с коэффициентами в нетривиальном модуле

В настоящей статье все алгебры и модули предполагаются конечномерными и рассматриваются над фиксированным полем P характеристики $p>0$. Пусть L — алгебра Ли, $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра и Z — центр универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. Напомним, что p-многочленом называется многочлен вида $f(t)=\sum_{i\geqslant 0}\lambda_i t^{p^i}\in P[t]$. Известно, что всякому элементу $l\in L$ можно сопоставить p-многочлен $z(t)$ такой, что при подстановке вместо t элемента $l\in L$ получаем центральный элемент $z(l)\in Z$. Такое отображение (вообще говоря, неоднозначное) обозначим через z: $L \to Z$. Пусть M — модуль над алгеброй Ли L и

$$l \mapsto (l)_M, \quad l \in L, \quad (l)_M \in \operatorname{End} M,$$

— соответствующее представление. Основной результат формулируется так

Теорема 1. *Пусть L — алгебра Ли над полем положительной характеристики и M — произвольный L-модуль. Допустим, что для некоторого $l \in L$ и соответствующего центрального элемента $z(l) \in Z$ эндоморфизм $(z(l))_M$ невырожден. Тогда когомологии $H^*(L, M)$ равны нулю.*

Для дальнейшего полезно напомнить некоторые моменты в определении когомологий алгебр Ли. Мы будем следовать обозначениям книги [1, с. 104, упр. 12], а также введем несколько новых обозначений. Пусть $C^k(L, M)$ — пространство кососимметрических полилинейных отображений от k аргументов при $k>0$. По определению $C^0(L, M) = M$ и $C^k(L, M)=0$ при $k<0$. Тогда в коцепном комплексе $C^*(L, M) = \bigoplus_k C^k(L, M)$ вводится отображение кограницы

$$d\psi = \psi' + \psi'',$$

где ψ', $\psi'' \in C^{k+1}(L, M)$ — коцепи, соответствующие элементу $\psi \in C^k(L, M)$ и определяемые формулами

$$\psi'(l_1, \ldots, l_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \psi([l_i, l_j], l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, \hat{l}_j, \ldots, l_{k+1}),$$

$$\psi''(l_1, \ldots, l_{k+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} (l_i)_M \psi(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_{k+1})$$

(здесь и в дальнейшем знак $\hat{}$ показывает, что соответствующий элемент опущен). Следующие обозначения стандартны: $Z^k(L, M)$ — пространство k-коциклов, $B^k(L, M)$ — пространство k-кограниц и $H^k(L, M) = Z^k(L, M)/B^k(L, M)$ — пространство k-х когомологий. Далее, класс когомологий коцикла $\psi \in Z^k(L, M)$ в пространстве $H^k(L, M)$ обозначим через $\bar{\psi}$. Пусть θ — представление алгебры Ли L в пространстве коцепей $C^*(L, M)$:

$$(\theta(l)\psi)(l_1, \ldots, l_k) = (l)_M \psi(l_1, \ldots, l_k) + \sum_i (-1)^i \psi([l, l_i] l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_k).$$

Продолжим это представление до представления универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. Произвольный элемент $l \in L$ определяет эндоморфизм $i(l)$ степени -1 (эндоморфизм внутреннего умножения) коцепного комплекса $C^*(L, M)$ по правилу

$$(i(l)\psi)(l_1, \ldots, l_{k-1}) = \psi(l, l_1, \ldots, l_{k-1}), \quad \psi \in C^k(L, M).$$

Нам понадобятся следующие формулы:

$$d\theta(l) = \theta(l) d, \quad l \in L, \tag{1}$$

$$di(l) + i(l) d = \theta(l), \quad l \in L. \tag{2}$$

Зафиксируем обозначение M^L для подпространства инвариантов:

$$M^L = \langle m \in M \mid l(m) = 0, l \in L \rangle.$$

Пусть L' — подалгебра в L. Напомним, что пространство относительных когомологий $H^*(L, L', M) = \bigoplus_k H^k(L, L', M)$ определяется как когомологии относительного коцепного комплекса

$$C^*(L, L', M)=\langle\psi\in C^*(L, M)\,|\,i(l')\psi=0,\ \theta(l')\psi=0,\ l'\in L\rangle.$$

Подробнее о когомологиях см., например, в [3].

Лемма 1. *Для произвольного p-многочлена $f(t)\in P[t]$ и для любого элемента $l\in L$ справедлива формула*

$$\theta(f(l))=f(\theta(l)).$$

Доказательство. Утверждение достаточно проверить для одночлена вида $f(t)=t^{p^s}$. Надо установить, что $(\theta(l))^{p^s}\psi=\theta(l^{p^s})\psi$ для произвольной коцепи $\psi\in C^k(L, M)$, $k\geqslant 0$. Рассмотрим представления $\theta_q\colon L\to\mathrm{End}\, C^k(L, M)$, $0\leqslant q\leqslant k$, заданные по правилу

$$\theta_0(l)=(l)_M,$$

$$(\theta_q(l)\psi)(l_1,\ldots,l_k)=(-1)^q\psi([l, l_q], l_1,\ldots,\hat{l}_q,\ldots,l_k),\quad 0<q\leqslant k.$$

Продолжим их до представления универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. Для произвольного $l\in L$ эндоморфизмы $\theta_q(l)$, $0\leqslant q\leqslant k$, попарно коммутируют и в сумме дают эндоморфизм $\theta(l)$. Стало быть, при возведении в степень равенства $\theta(l)=\sum\limits_{q=0}^{k}\theta_q(l)$ мы можем пользоваться биномом Ньютона. В частности,

$$(\theta(l))^{p^s}=\sum_{q=0}^{k}(\theta_q(l))^{p^s}.$$

С другой стороны, $\theta_q(l)^{p^s}=\theta_q(l^{p^s})$. Лемма доказана.

Следствие. *Для любого центрального элемента $z(l)\in Z$ соответствующего элементу $l\in L$, справедлива формула*

$$\theta(z(l))=(z(l))_M.$$

Доказательство. Поскольку $z(\theta_q(l))=\theta_q(z(l))=0$, $0<q\leqslant k$, по лемме 1 справедлива цепочка равенств

$$\theta(z(l))=z(\theta(l))=\sum_{q=0}^{k}z(\theta_q(l))=z(\theta_0(l))=z((l)_M)=(z(l))_M.$$

Лемма 2. *Пусть для некоторого $l\in L$ эндоморфизм $(z(l))_M$ невырожден и $\bar{l}=(z(l))_M^{-1}$ — обратный эндоморфизм. Тогда имеет место формула*

$$\bar{l}d=d\bar{l}.$$

Доказательство. Пусть $\psi\in C^k(L, M)$, $k\geqslant 0$. Проверим, что

$$(\bar{l}\psi)'=\bar{l}(\psi'),\tag{3}$$

$$(\bar{l}\psi)''=\bar{l}(\psi'').\tag{4}$$

Формула (3) очевидна. Так как $z(l)\in Z$, то $(z(l))_M(l')_M=(l')_M(z(l))_M$; стало быть, $\bar{l}(l')_M=(l')_M\bar{l}$ для любых $l'\in L$. В частности,

$$\bar{l}((l')_M\psi(\ldots,\hat{l}',\ldots))=(l')_M(\bar{l}\psi(\ldots,\hat{l}',\ldots)).$$

Теперь формула (4) очевидна. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Умножая обе части равенства (2) справа на элемент вида $\theta(l)^q$, с учетом формулы (1) получаем, что $di_q(l)+i_q(l)d=\theta(l)^{q+1}$ для некоторого эндоморфизма $i_q(l)$ степени —1 (именно, $i_q(l)=i(l)\theta(l)^q$). Ясно, что взяв линейную комбинацию таких соотношений, можем добиться того, что для любого p-многочлена $f(t)\in P[t]$ будет выполнено условие

$$di_f(l)+i_f(l)d=f(\theta(l))$$

для некоторого эндоморфизма i_f: $C^*(L, M)\to C^*(L, M)$ степени —1. В частности, для центрального элемента $z(l)$ согласно следствию леммы 1 имеем

$$di_z(l)+i_z(l)d=(z(l))_M.$$

Допустим, что эндоморфизм $(z(l))_M$ обратим. Тогда по лемме 2

$$d\rho+\rho d=(\mathrm{id})_M,$$

где эндоморфизм гомотопии ρ задается правилом $\rho=\bar{l}i_z(l)$. Теорема 1 доказана.

Выведем несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть P — поле положительной характеристики и M — неприводимый L-модуль. Для того чтобы когомологии $H^*(L, M)$ были отличны от нуля, необходимо, чтобы эндоморфизмы $(z(l))_M$ были нулевыми для всех $l\in L$.*

Доказательство. По лемме Шура эндоморфизм $(z(l))_M$ обратим, если он отличен от нуля.

Следствие 2. *Если для некоторого* ad-*нильпотентного элемента $l\in L$ эндоморфизм $(l)_M$ невырожден, то когомологии $H^*(L, M)$ тривиальны.*

Доказательство. Если $(\mathrm{ad}\, l)^q=0$, то элемент l^{p^s}, $q<p^s$, лежит в центре Z. Обратимость эндоморфизма $(l)_M$ равносильна обратимости эндоморфизма $(l)_M{}^{p^s}$.

Следствие 3. *Пусть L—нильпотентная алгебра Ли над полем положительной характеристики и M — неприводимый L-модуль. Пространство когомологий $H^*(L, M)$ нетривиально тогда и только тогда, когда M — одномерный тривиальный L-модуль.*

Отметим, что это утверждение также верно в случае нулевой характеристики, и в работе [2] дано доказательство, основанное на спектральной последовательности Серра — Хохшильда, не зависящее от характеристики поля. Впрочем, оно более содержательно в модулярном случае, поскольку всякое конечномерное неприводимое представление нильпотентной алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики одномерное, а в модулярном случае это не так.

Доказательство. Допустим, что $H^*(L, M)\neq 0$. Рассмотрим нижний центральный ряд

$$L^1=L\supset L^2=[L, L]\supset \dots \supset L^q\supset 0.$$

Рассуждая индукцией по $i=q$, $q-1$, ..., 1, докажем, что $(l)_M=0$, если $l\in L^i$. Тогда при $i=1$ получаем, что M — тривиальный L-модуль. Стало быть, он одномерен. Поскольку подалгебра L^q лежит в центре алгебры Ли L, согласно следствию 1 основание индукции имеется. Допустим, что утверждение доказано для $i+1$. Тогда $[(l)_M, (l')_M]=([l, l'])_M=0$, $l\in L^i$, $l'\in L$, так как $[l, l']\in L^{i+1}$. Иными словами, эндоморфизм $(l)_M$ коммутирует со всеми эндоморфизмами $(l')_M$, хотя элемент l вовсе не обязан принадлежать центру Z. Значит, по лемме Шура $(l)_M=0$ или $(l)_M$ — невырожденный эндоморфизм. Но последнее невозможно, поскольку $z(l)$ имеет вид l^{p^s} и согласно теореме 1 $0=(z(l))_M=(l)_M^{p^s}$. Индукционный переход доказан.

В обратную сторону утверждение следствия 3 очевидно. Например,

$$H^0(L, P)\cong P\neq 0.$$

Заметим, что в отличие от [2] мы не требуем алгебраическую замкнутость поля.

Напомним, что нилькомпонентой элемента $z(l)\in Z$ в L-модуле M называется подпространство $M_0(z(l))$, в котором эндоморфизм $(z(l))_M$ действует нильпотентно: $M_0(z(l))=\bigcup\limits_{j\geqslant 1}\operatorname{Ker}(z(l))_M^j$. Подпространство $M_0(Z)=\bigcap\limits_{l\in L} M_0(z(l))$ называется Z-нилькомпонентной L-модуля M. Нилькомпонента $M_0(Z)$ обладает структурой L-модуля. Заметим, что для нильпотентной алгебры Ли L нилькомпонента $M_0(Z)$ совпадает с фиттинговой нилькомпонентой $M_0=\bigcap\limits_{l\in L}\bigcup\limits_{j\geqslant 1}\operatorname{Ker}(l)_M^j$.

Приведем другую формулировку теоремы 1.

Теорема 1'. *Пусть L — произвольная алгебра Ли над полем положительной характеристики и M — L-модуль. Имеет место изоморфизм пространств когомологий*

$$H^*(L, M)\cong H^*(L, M_0(Z)).$$

Доказательство. Если $M=M_0(Z)$, то утверждение тривиально. Если $M\neq M_0(z(l))$ для некоторого $l\in L$, то в фактормодуле $M_1(z(l))=M/M_0(z(l))$ эндоморфизм $(z(l))_{M_1(z(l))}$ обратим, поэтому согласно теореме 1 $H^*(L, M_1(z(l)))=0$. Рассматривая теперь длинную точную когомологическую последовательность

$$\ldots\to H^k(L, M_0(z(l)))\to H^k(L, M)\to H^k(L, M_1(z(l)))\to\ldots$$

соответствующей точной последовательности L-модулей

$$0\to M_0(z(l))\to M\to M_1(z(l))\to 0,$$

получаем, что

$$H^k(L, M)\cong H^k(L, M_0(z(l))),\quad k\geqslant 0,\quad \dim M_0(z(l))<\dim M.$$

Несложная индукция по размерности M доказывает теорему 1.

Следствие 4. *Для нильпотентной модулярной алгебры Ли L пространства когомологий $H^*(L, M)$ и $H^*(L, M_0)$ изоморфны.*

В частности, получаем другое доказательство следствия 3.

Ввиду важности следующее следствие назовем теоремой.

Теорема 2. *Пусть L — p-алгебра Ли и неприводимый L-модуль M не является p-модулем. Тогда пространство когомологий $H^*(L, M)$ тривиально.*

Доказательство. Существует элемент $l\in L$ такой, что эндоморфизм $(l^p-l^{[p]})_M$ отличен от нуля. Поскольку $l^p-l^{[p]}\in Z$, согласно следствию 1 теорема 2 доказана.

Пусть теперь в алгебре Ли L имеется невырожденная инвариантная симметрическая форма $(,)$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в алгебре Ли L и $e_1', \ldots, e_n'$ — дуальный базис: $(e_i, e_j')=\delta_{i,j}$, $i, j=1, \ldots, n$. Из невырожденности формы $(,)$ вытекает следующее хорошо известное

Утверждение. *Если* $[e_i, l] = \sum_i \lambda_{i,j} e_j$, $[e_i', l] = \sum_j \lambda'_{i,j} e_j'$ — *разложения по базисным элементам для* $l \in L$, *то* $\lambda_{i,j} + \lambda'_{j,i} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Элемент Казимира $c = \sum_i e_i e_i'$ принадлежит центру Z. В доказательстве этого известного факта используется вышеупомянутое утверждение. Это утверждение также является основным в доказательствах леммы Уайтхеда и следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* R — *идеал в алгебре Ли* L *и в* R *имеется невырожденная инвариантная симметрическая форма* $(\cdot, \cdot)$. *Пусть* c — *соответствующий элемент Казимира. Если эндоморфизм* $(c)_M$ *обратим, то пространство когомологии* $H^*(L, M)$ *тривиально.*

Например, если форма следа $(l, l')_M = \mathrm{tr}((l)_M (l')_M)$, соответствующая неприводимому l-модулю M, невырождена и размерность идеала R не делится на характеристику поля, то $H^*(L, M) = 0$ (см. [1, с. 106, упр. 12 к)]).

Напомним вкратце, как доказывается эта теорема. Пусть ρ — эндоморфизм пространства $C^*(L, M)$ степени -1 такой, что

$$(\rho\psi)(l_1, \ldots, l_{k-1}) = \sum_i (e_i)_M \psi(e_i', l_1, \ldots, l_{k-1}), \quad \psi \in C^k(L, M).$$

Тогда используя наше утверждение, легко проверить, что

$$d\rho + \rho d = (c)_M. \tag{5}$$

Начало доказательства теоремы 3 точно такое; только в самом конце, когда получена формула (5), необходимо применить лемму 2.

Несмотря на небольшие отличия в формулировках леммы Уайтхеда и теоремы 3 последняя имеет более широкий круг применения. Всякая простая алгебра Ли над полем нулевой характеристики имеет невырожденную форму следа. В модулярном случае это не так. Тем не менее всякая модулярная классическая простая алгебра Ли обладает какой-либо невырожденной инвариантной формой; более того, класс таких алгебр Ли не исчерпывается классическими или даже p-алгебрами Ли. Например, любая гамильтонова алгебра Ли обладает невырожденной инвариантной формой, не являющейся формой следа [7].

Применим теоремы 2 и 3 для изучения когомологий трехмерной простой алгебры Ли типа A_1. Но сначала докажем одно предложение, представляющее независимый интерес. Напомним, что абелева подалгебра T в алгебре Ли L называется тором, если в L можно выбрать базис $\langle e_\alpha \mid \alpha \in T^* \rangle$, в котором любой элемент $h \in T$ действует полупросто: $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$, $\alpha \in T^*$.

Предложение 1. *Пусть* L — *конечномерная алгебра Ли над полем произвольной характеристики и в конечномерном* L-*модуле* M *тор* T *также действует полупросто. Пусть кограница* $d\psi \in B^*(L, M)$ *инвариантна относительно действия тора*: $\theta(h) d\psi = 0$ $\forall h \in T$. *Тогда в классе когомологий коцепи* ψ *можно выбрать представитель* φ, *также инвариантный относительно действия тора*: $\theta(h)\varphi = 0$ $\forall h \in T$, $\varphi - \psi \in B^*(L, M)$.

Доказательство. Так как T — модули полупростые, то в конечномерном пространстве коцепей $C^*(L, M) \cong \Lambda^* L \otimes M$ можно выбрать базис, состоящий из коцепей, собственных относительно эндоморфизмов $\theta(h)$, $h \in T$. Пусть $\psi = \sum_{j=0}^{k} \psi_j$, где $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_k$ — коцепи с различными собственными значениями $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ соответственно. Пусть для определенности $\lambda_0=0$. Применим к равенству $d\psi=\sum_{j=0}^{k} d\psi_j$ эндоморфизм $\theta(h)^q$. Используя формулу (1), получаем, что

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_j^q d\psi_j = 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant k.$$

Определитель Вандермонда

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_k \\ \lambda_1^2 \ldots \lambda_k^2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \lambda_1^k \ldots \lambda_k^k \end{bmatrix}$$

отличен от нуля. Поэтому $d\psi_j=0$ для $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда согласно формуле (2)

$$d(i(h)\psi_j=\theta(h)\psi_j=\lambda_j\psi_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

откуда $\psi_j=d(i(h)\psi_j/\lambda_j) \in B^*(L, M)$. Остается положить $\varphi=\psi+d\sigma$, где $\sigma = \sum_{j=1}^{k} -i(h)\psi_j/\lambda_j$. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть L, M, T — те же, что и в предложении* 1. *Имеет место изоморфизм пространств*

$$H^*(L, M) \cong H^*(L, M)^T.$$

Пусть теперь

$$L=\langle e_-, h, e_+ \mid [e_+, e_-]=h, [h, e_\pm]=\pm 2e_\pm\rangle$$

— алгебра Ли типа A_1 над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>3$. Все p-представления этой алгебры Ли получаются редукцией по модулю p стандартных неприводимых представлений размерностей $1 \leqslant i+1 \leqslant p$ со старшим весом i (см. [5]). Эндоморфизм $(c)_M$, соответствующий элементу Казимира $c=e_+e_-+e_-e_++h^2/2$, невырожден, если $\dim M \neq 1, p-1$. Итак, согласно теоремам 2 и 3 $H^*(L, M)=0$, если M — неприводимый L-модуль размерности, отличной от 1, $p-1$. Пусть $M= =\langle v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p-1\rangle$ — $(p-1)$-мерный неприводимый L-модуль со старшим вектором v_{p-1}: $e_+v_{p-1}=0$ и с младшим вектором v_1: $e_-v_1=0$. Классы коциклов $\psi_+^1, \psi_-^1 \in Z^1(L, M)$, $\psi_+^2, \psi_-^2 \in Z^2(L, M)$, ненулевые компоненты которых задаются соотношениями

$$\psi_+^1(e_+) = v_1, \quad \psi_-^1(e_-) = v_{p-1},$$
$$\psi_+^2(e_+, h) = v_1, \quad \psi_-^2(e_-, h) = v_{p-1},$$

составляют базис пространства $H^*(L, M)$. Это вытекает из следствия предложения 1. Тем самым доказана

Теорема 4. *Пусть L — алгебра Ли типа A_1 над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \geqslant 3$ и M — неприводимый L-модуль. Тогда*

$$H^0(L, P) \cong H^3(L, P) \cong P,$$
$$H^1(L, M) \cong H^2(L, M) \cong P \oplus P, \ \dim M=p-1;$$

во всех остальных случаях когомологии $H^k(L, M)$ тривиальны.

Более существенно применение теоремы 1 для исследования когомологий алгебры Цассенхауза, чему посвящена вторая половина работы.

§ 2. Когомологии алгебры Цассенхауза

Все известные до сих пор конечномерные простые алгебры Ли над полем положительной характеристики включаются в одну из следующих серий простых алгебр Ли: классических и картановских. Если представителем классических алгебр Ли наименьшей размерности является трехмерная алгебра Ли типа A_1, то таким представителем среди картановских серий служит p-мерная алгебра Витта $W_1(1)$. Наши рассуждения относительно когомологий алгебры Витта проходят и для алгебры Цассенхауза $W_1(n)$.

Приведем вкратце определение алгебры Ли $W_1(n)$ (подробности см. в [4]). Напомним, что умножение в алгебре разделенных степеней $O_1(n)=\langle x^{(i)} \mid 0\leqslant i\leqslant p^n-1\rangle$ задается так:

$$x^{(i)}x^{(j)}=\binom{i+j}{i}x^{(i+j)},\qquad \binom{i+j}{i}=\frac{(i+j)!}{i!\,j!}.$$

Алгебра Ли дифференцирований $W_1(n)=\langle u\partial \mid u\in O_1(n)\rangle$ алгебры $O_1(n)$,

$$u\partial: v\mapsto u(\partial(v)),\quad u,\ v\in O_1(n),$$
$$\partial: x^{(i)}\mapsto x^{(i-1)}\ (i>0),\qquad \partial: x^{(0)}\mapsto 0,$$

называется общей алгеброй Ли картановского типа от одной переменной (в терминах А. И. Кострикина и И. Р. Шафаревича) или алгеброй Цассенхауза. В алгебре Ли $W_1(n)$ можно выбрать базис $\{e_i=x^{(i+1)} \mid -1\leqslant i\leqslant p^n-2\}$, относительно которого умножение записывается так:

$$[e_i, e_j]=\left(\binom{i+j+1}{j}-\binom{i+j+1}{i}\right)e_{i+j}.$$

Алгебра Ли $L=W_1(n)$ градуирована:

$$L=\bigoplus_{i=-1}^{p^n-2}L_i,\qquad L_i=\langle e_i\rangle.$$

Пусть

$$L=\mathscr{L}_{-1}\supset\mathscr{L}_0\supset\mathscr{L}_1\supset\ldots\supset\mathscr{L}_{p^n-2}\supset 0,\qquad \mathscr{L}_i=\bigoplus_{j\geqslant i}L_j$$

— соответствующая фильтрация. Отметим, что подалгебра $L_0=\langle e_0\rangle$ задает тор в алгебре Ли L.

Алгебра разделенных степеней $U=O_1(n)$ обладает естественной градуировкой

$$U=\bigoplus_{i=0}^{p^n-1}U_i,\qquad U_i=\langle x^{(i)}\rangle.$$

Таким образом, в ассоциативной алгебре U имеется естественная структура градуированного модуля над алгеброй Ли L. Отметим, что этот модуль приводим и в нем содержится одномерный тривиальный модуль P. Введем в пространстве $O_1(n)$ новые структуры градуированных модулей над L по правилу

$$(l, v)\mapsto l(v)+t(\mathrm{Div}\, l)v,\qquad t\in P,$$

где $\mathrm{Div}(u\partial)=\partial(u)$ — дивергенция дифференцирования $u\partial\in W_1(n)$. Обозначим полученный модуль через U_t. В частности, U_0 совпадает с естественным L-модулем U.

Далее, в нильпотентной подалгебре $\mathscr{L}_0$ имеется p-структура $e_0^{[p]}=e_0$, $e_i^{[p]}=0$, $i>0$, но $(\operatorname{ad} e_{-1})^{p^n}=0$. В частности, алгебра Витта $W_1(1)$ является p-алгеброй Ли. Согласно следствию 1 теоремы 1 нетривиальные когомологии $H^*(L, M)$ алгебры Цассенхауза L с коэффициентами в неприводимом модуле M могут возникнуть только в таких случаях, когда

$$(e_{-1})_M^{p^n} = 0, \ (e_0)_M^p = (e_0)_M, \quad (e_i)_M^p = 0, \ i>0.$$

Хотя неприводимые представления алгебры Ли $W_1(n)$ в общем случае устроены достаточно сложно (см. [6]), такие «почти p-представления» допускают хорошую реализацию. Соответствующие модули исчерпываются следующим списком: одномерным тривиальным L-модулем P, (p^n-1)-мерным L-фактормодулем U/P и p^n-мерными L-модулями U_t, где $t\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $t\neq 0$, 1 (в количестве $p-2$ штук).

Оставшаяся часть работы посвящена вычислению когомологии $H^*(L, U_t)$ с точностью до когомологий $H^*(\mathscr{L}_1, P)$. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем в рассмотрение одномерный $\mathscr{L}_0$-модуль $\langle 1_t\rangle$ такой, что $e_0 1=t1$ и $e_i 1=0$, если $i>0$. Кроме того, обозначения вида $H^*(L, P)$, $H^*(\mathscr{L}_0, \langle 1_t\rangle)$ будем сокращать соответственно так: $H^*(L)$, $H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$. Напомним также, что для модуля V над некоторой алгеброй L' через $V^{L'}$ мы обозначаем подпространство инвариантов.

Теорема 5. *Пусть $L=W_1(n)$. Для любого $t\in P$ имеет место изоморфизм пространств* ($k\geqslant 0$)

$$H^k(L,U_t)\cong((H^k(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-2}(\mathscr{L}_1))\otimes\langle 1_t\rangle)^{L_0}.$$

Из теоремы 5 и из следствия 1 теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть P — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>3$. Пусть M — конечномерный неприводимый модуль над алгеброй Ли $L=W_1(n)$. Тогда когомологии $H^*(L, M)$ тривиальны за исключением следующих случаев*:

(i) *M — p^n-мерный L-модуль U_t, где $t\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $t\neq 0$, 1. Тогда*

$$H^k(L,M)\cong((H^k(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-2}(\mathscr{L}_1))\otimes\langle 1_t\rangle)^{L_0}, \quad k\geqslant 0;$$

(ii) *M—(p^n-1)-мерный L-фактормодуль U/P. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0\to H^0(L)\to H^0(L, U)\to H^0(L, M)\to H^1(L)\to\cdots$$
$$\cdots\to H^k(L)\to H^k(L, U)\to H^k(L, M)\to H^{k+1}(L)\to\cdots,$$

где

$$H^k(L,U)\cong(H^k(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-2}(\mathscr{L}_1))^{L_0}, \quad k\geqslant 0;$$

(iii) *M — одномерный тривиальный L-модуль.*

Впрочем, стоит объяснить происхождение точной последовательности в случае (ii). Она возникает как длинная точная последовательность пространств когомологий, соответствующая короткой точной последовательности L-модулей $0\to P\to U\to M\to 0$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, введем некоторые обозначения. Если $V=\bigoplus\limits_{i\in\mathbf{Z}} V_i$ — градуированное пространство с однородными компонентами V_i, то запись вида $|v|=i$ будет означать, что

$v \in V_i$. Далее, для подпространства V' в V через $\mathrm{pr}_{V'}$ будем обозначать естественную проекцию $V \to V'$. Если $v_1, \ldots, v_n$ — базис в пространстве V, то для любого $v \in V$ справедливо разложение $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{pr}_j v$, где $\mathrm{pr}_j v = \mathrm{pr}_{\langle v_j \rangle} v$. Пусть $A_j \in P$ — коэффициент при элементе v_j у проекции $\mathrm{pr}_j v$. Условимся обозначать элементы алгебры Ли L буквами $l, l_1, \ldots$, элементы естественного L-модуля U буквами $u, v, u_1, v_1, \ldots$, а L-модуль U_t как правило будем обозначать через M и его элементы буквами $m, m', \ldots$. Далее, привычное нам обозначение $(l)_M(m)$ часто будем сокращать так: $l(m)$. При этом из-за наших соглашений в контексте будет видно, каким пространствам принадлежат элементы l, m.

Наделим L-модуль $M = U_t$ структурой модуля над ассоциативной алгеброй U относительно естественного умножения

$$(u, m) \mapsto um, \qquad u \in U, \quad m \in M.$$

Ясно, что M — унитарный U-модуль,

$$1m = m, \qquad m \in M,$$

и M — свободный U-модуль с базой $\langle 1 \rangle$, совпадающей с подпространством инвариантов $M^{L_{-1}} = \langle m \in M \mid e_{-1}(m) = 0 \rangle$. Кроме того, M — градуированный модуль как над алгеброй Ли L, так и над ассоциативной алгеброй U, причем эти структуры модулей согласованы:

$$l(u\,m) = l(u)m + u\,l(m), \qquad l \in L, \quad u \in U, \quad m \in M.$$

Поэтому естественное спаривание пространств коцепей

$$C^*(L, U) \smile C^*(L, M) \to C^*(L, M)$$

продолжается до спаривания пространств когомологий:

$$H^*(L, U) \smile H^*(L, M) \to H^*(L, M).$$

В частности, пространство 1-когомологий $H^1(L, U)$ действует в пространстве когомологий $H^*(L, M)$. Приведем явную формулу действия элемента $\psi \in C^1(L, U)$ на элемент $\varphi \in C^k(L, M)$:

$$(\psi \smile \varphi)(l_1, \ldots, l_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \psi(l_i) \smile \varphi\,(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_{k+1}).$$

Лемма 3. *В пространстве когомологий $H^*(L, M)$ пространство относительных когомологий $H^*(L, L_{-1}, M)$ выделяется прямым слагаемым. Кроме того, имеет место изоморфизм пространств когомологий $H^*(L, L_{-1}, U_t) \cong H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$, $t \in P$.*

Доказательство. Пусть

$$\mathscr{A} : C^*(L, U_t) \to C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$$

— композиция двух линейных отображений — ограничения на подалгебру $\mathscr{L}_0$ с последующей проекцией на подпространство $(U_t)^{L_{-1}} = \langle 1 \rangle$:

$$(A\psi)(l_1, \ldots, l_k) = \mathrm{pr}_{\langle 1 \rangle}(\psi(l_1, \ldots, l_k)), \quad \psi \in C^k(L, U_t), \ l_1, \ldots, l_k \in \mathscr{L}_0, \ k > 0,$$

$$Am = \mathrm{pr}_{\langle 1 \rangle}(m), \qquad m \in C^0(L, U_t) = U_t.$$

Проверим коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} C^k(L,U_t) & \xrightarrow{d} & C^{k+1}(L,U_t) \\ \mathscr{A}\downarrow & & \mathscr{A}\downarrow \\ C^k(\mathscr{L}_0, 1_t) & \xrightarrow{d} & C^{k+1}(\mathscr{L}_0, 1_t) \end{array} \qquad k\geqslant 0.$$

Так как U_t — градуированный L-модуль, то $\mathrm{pr}_{\langle 1\rangle}(l(m)) = \mathrm{pr}_{\langle 1\rangle}(l(\mathrm{pr}_{\langle 1\rangle}(m)))$ для любых $l\in\mathscr{L}_0$, $m\in U_t$ и, значит,

$$l(A\psi(\ldots,\hat{l},\ldots)) = A(l(\psi(\ldots,\hat{l},\ldots)))$$

для произвольных $l\in\mathscr{L}_0$, $\psi\in C^k(L, U_t)$. Поэтому $(\mathscr{A}\psi)''=\mathscr{A}(\psi'')$. То, что $(\mathscr{A}\psi)'=\mathscr{A}(\psi')$, очевидно. Таким образом, $d\mathscr{A}\psi=\mathscr{A}d\psi$. Иными словами, линейное отображение $\mathscr{A}$ задает проекцию коцепных комплексов.

Теперь проверим, что на подпространстве относительных коцепей $C^*(L, L_{-1}, U_t)$ проекция $\mathscr{A}$ является отображением инъекции. Допустим противное. Пусть $A\psi=0$, но $\mathrm{pr}_{\langle x^{(j)}\rangle}(\psi(\ldots))\neq 0$, причем $j>0$ — наименьшее среди таких. Пусть $\psi\in C^k(L, L_{-1}, U_t)$. Распишем условие $\theta(e_{-1})\psi=0$. По определению

$$e_{-1}(\psi(l_1, \ldots, l_k)) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \psi([e_{-1}, l_i], l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_k). \tag{6}$$

Для некоторых $l_1, \ldots, l_k\in\mathscr{L}_0$ проекция левой части условия (6) на подпространство $\langle x^{(j-1)}\rangle$ отлична от нуля. Значит, отлична от нуля проекция одного из слагаемых правой части этого условия на подпространство $\langle x^{(j-1)}\rangle$. Это противоречит выбору j. Итак, ограничение проекции $\mathscr{A}$ на подпространство $C^*(L, L_{-1}, U_t)$ не имеет ядра.

Построим расщепляющее отображение $\mathscr{A}'$: $C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)\to C^*(L, U_t)$ проекции $\mathscr{A}$. Положим $\mathscr{A}'1=1$ при $k=0$. Пусть при $k>0$

$$(\mathscr{A}'\varphi)(x^{i_1})\partial, \ldots, x^{(i_k)}\partial) = \sum_{j_1,\ldots j_k=1}^{p^n-1} \partial^{j_1}(x^{(i_1)}) \ldots \partial^{j_k}(x^{(i_k)})\varphi(x^{(j_1)}\partial, \ldots, x^{(j_k)}\partial).$$

Легко проверить, что $\theta(e_{-1})\mathscr{A}'\varphi=0$, $i(e_{-1})\mathscr{A}'\varphi=0$, т. е. на самом деле $\mathscr{A}'$ отображает пространство $C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$ в пространство $C^*(L, L_{-1}, U_t)$.

Проверим, что композиция отображений

$$C^*(\mathscr{L}_0, 1_t) \xrightarrow{\mathscr{A}'} C^*(L, U_t) \xrightarrow{\mathscr{A}} C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$$

— тождественный эндоморфизм. Пусть $C_r^k(\mathscr{L}_0, 1_t)$ — подпространство в $C^k(\mathscr{L}_0, 1_t)$, состоящее из таких коцепей φ, что $\varphi(l_1, \ldots, l_k)=0$, если $|l_1|+\cdots+|l_k|\neq r$, $r\geqslant 0$, $k>0$. Тогда градуированное пространство $C_r^*(\mathscr{L}_0, 1_t)=\bigoplus\limits_k C_r^k(\mathscr{L}_0, 1_t)$ обладает структурой коцепного комплекса. Более того, имеет место разложение на прямую сумму подкомплексов

$$C^*(\mathscr{L}_0, 1_t) = \bigoplus_{r\geqslant 0} C_r^*(\mathscr{L}_0, 1_t).$$

Поэтому приведенное выше утверждение достаточно проверять на коцепях из подпространства $C_r^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$, $r\geqslant 0$.

Итак, пусть $\varphi\in C_r^k(\mathscr{L}_0, 1_t)$, $k>0$. Надо доказать, что

$$\mathscr{A}\mathscr{A}'\varphi(l_1, \ldots, l_k)=\varphi(l_1, \ldots, l_k) \tag{7}$$

для любых $l_1, \ldots, l_k\in\mathscr{L}_0$. Так как U_t — градуированный U-модуль с базой $\langle 1\rangle$, то коцепь $\mathscr{A}'\varphi$ сдвигает градуировку на $-r$:

$$|\mathscr{A}'\varphi(l_1, \ldots, l_k)| = |l_1| + \ldots + |l_k| - r.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}'\varphi(l_1, \ldots, l_k) = 0 \quad |l_1| + \ldots + |l_k| < r,$$

$$\mathscr{A}\mathscr{A}'\varphi(l_1, \ldots, l_k) = 0, \quad |l_1| + \ldots + |l_n| > r.$$

Более подробный анализ определения отображения $\mathscr{A}'$ показывает, что $\mathscr{A}\mathscr{A}'\varphi(l_1, \ldots, l_k) = \varphi(l_1, \ldots, l_k)$, если $|l_1| + \cdots + |l_k| = r$. Соотношение (7) доказано.

Итак, отображение $\mathscr{A}'$ задает расщепление проекции $\mathscr{A}$ и индуцирует изоморфизм коцепных комплексов $C^*(L, L_{-1}, U_t)$ и $C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$. Лемма доказана.

Для дальнейшего удобно привести явную формулу отображения кограницы $d: C^*(\mathscr{L}_0, 1_t) \to C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$. Легко видеть, что

$$d\varphi = \varphi' + \varphi'',$$

где коцепи $\varphi \in C^k(\mathscr{L}_0, 1_t)$ сопоставлена коцепь $\varphi'' \in C^{k+1}(\mathscr{L}_0, 1_t)$, задаваемая правилом

$$\varphi'(l_1, \ldots, l_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{|l_i|=0} (-1)^{i+1} l_i(\varphi(l_1, \ldots, \hat{l}_i, l_{k+1})),$$

а коцепь φ' определяется, как прежде (см. § 1).

Полезно также привести некоторые факты относительно строения пространства когомологий $H^1(L, U)$. Коцепи $\alpha, \beta \in C^1(L, U)$ такие, что

$$\alpha(u\partial) = ux^{(p^n-1)}, \qquad \beta(u\partial) = \partial(u),$$

являются коциклами. Действительно, $\alpha = d(x^{(p^n)})$ — «почти» кограница; более того, класс коцикла α нетривиален, поскольку $x^{(p^n)} \notin U$. Отметим, что подпространство $\langle\bar{\alpha}\rangle \subset H^1(L, U)$ можно рассматривать как пространство когомологий $H^1(L_{-1}, U)$ одномерной подалгебры L_{-1}.

Дадим другую интерпретацию этого подпространства. Пусть $\Omega^* = \bigoplus_k \Omega^k$ — де Рамовский коцепной комплекс, т. е. $\Omega^0 = U$, $\Omega^k = 0$, $k > 1$ и $\Omega^1 \cong U \otimes \Lambda^1$ — пространство внешних форм с коэффициентами в алгебре разделенных степеней U. Тогда пространство 1-когомологий де Рама $H^1(\Omega^*)$ изоморфно факторпространству $U/\partial(U)$, а это, в свою очередь, изоморфно подпространству, натянутому на класс коцикла α в пространстве когомологий $H^1(L, U)$.

Нам понадобится следующее более развернутое определение коцикла α:

$$\alpha(e_{-1}) = x^{(p^n-1)}, \quad \alpha(e_i) = 0, \; i \geqslant 0.$$

Что касается коцепи β, ее коцикличность равносильна известному свойству оператора дивергенции

$$\operatorname{Div}[l_1, l_2] = l_1(\operatorname{Div} l_2) - l_2(\operatorname{Div} l_1).$$

Впрочем, этот факт и нетривиальность класса коцикла β мгновенно вытекает из леммы 3, если заметить, что $\beta \in Z^1(L, L_{-1}, U)$ и проекция $\mathscr{A}\beta$ задает единственный базисный коцикл в подпространстве коциклов $Z^1(L_0)$ пространства $Z^1(\mathscr{L}_0)$. В дальнейшем будет видно, что классы коциклов α и β составляют базис в пространстве когомологии $H^1(L, U)$.

Как было указано выше, для любых $t\in P$, $k\geqslant 0$, определены спаривания

$$H^1(L, U)\cup H^k(L, U_t)\to H^{k+1}(L, U_t).$$

В частности,

$$H^1(L, U)\cup H^k(L, L_{-1}, U_t)\to H^{k+1}(L, U_t).$$

Полезно привести явную формулу

$$(\alpha\cup\psi)(l_1, \ldots, l_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{|l_i|=-1}(-1)^{i+1}x^{(p^n-1)}\psi(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_{k+1}),$$

где $\psi\in C^k(L, L_{-1}, U_t)$. Нам также понадобится явный вид спаривания

$$C^1(L_0)\cup C^k(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\to C^{k+1}(\mathscr{L}_0, 1_t),$$

а именно,

$$(\beta\cup\varphi)(l_1, \ldots, l_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{|l_i|=0}(-1)^{i+1}\varphi(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_{k+1}).$$

Ясно, что это спаривание также индуцирует спаривание когомологий

$$H^1(L_0)\cup H^k(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\to H^{k+1}(\mathscr{L}_0, 1_t).$$

Лемма 4. *Справедливы следующие изоморфизмы пространств*:

$$H^*(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\cong(H^*(\mathscr{L}_1)\otimes\langle 1_k\rangle)^{L_0},\qquad t\in P,$$

$$H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)\cong H^*(L_0)\otimes H^*(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t),\qquad t\in P.$$

В частности, имеет место изоморфизм

$$H^k(\mathscr{L}_0, 1_t)\cong((H^k(\mathscr{L}_1)\oplus H^{k-1}(\mathscr{L}_1))\otimes\langle 1_t\rangle)^{L_0},\qquad k\geqslant 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что линейное отображение

$$C^k(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\to C^k(\mathscr{L}_1, 1_t),$$

состоящее в естественном ограничении на подалгебру $\mathscr{L}_1$, задает изоморфизм пространств $C^k(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\to C^k(\mathscr{L}_1, 1_t)^{L_0}$. Также очевидно, что это отображение коммутирует с отображением кограницы. Поэтому

$$H^k(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\cong H^k(\mathscr{L}_1, 1_t)^{L_0}\cong(H^k(\mathscr{L}_1)\otimes\langle 1_t\rangle)^{L_0}.$$

Согласно предложению 1 имеет место изоморфизм пространств

$$H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)\cong H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)^{L_0}.$$

Пусть $\varphi\in Z^k(\mathscr{L}_0, 1_t)^{L_0}$. Тогда $i(e_0)\varphi\in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)$. Если $\varphi=d\omega$ — кограница, где $\omega\in C^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t)^{L_0}$, то $i(e_0)\varphi$ — также кограница в $Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)$. Действительно,

$$i(e_0)\varphi=i(e_0)d\omega=-d(i(e_0)\omega),\qquad i(e_0)\omega\in C^{k-2}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t).$$

Таким образом, линейное отображение пространств когомологий

$$\mathscr{B}:\ H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)^{L_0}\to H^{*-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t),$$
$$\bar{\varphi}\mapsto\overline{i(e_0)\varphi},$$

корректно определено.

Используя приведенные выше формулы спариваний, можно проверить, что линейное отображение

$$\mathscr{B}':H^{*-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)\to H^*(\mathscr{L}_0, 1_t)^{L_0},$$

которое определяется так:

$$\mathscr{B}'\colon\ \overline{\varphi}\to\overline{\beta\cup\varphi},$$

корректно и задает расщепление отображения $\mathscr{B}$. Также несложно вычислить ядро отображения $\mathscr{B}$:

$$\operatorname{Ker}\mathscr{B}=\langle\overline{\varphi}\in H^*(\mathscr{L}_0,\ 1_t)^{L_0}\,|\,i(e_0)\varphi=0\rangle\cong H^*(\mathscr{L}_1,\ 1_t)^{L_0}.$$

Лемма доказана.

В лемме 3 было доказано, что относительные когомологии $H^*(L,\ L_{-1},\ U_t)$ выделяются прямым слагаемым в пространстве когомологий $H^*(L,\ U_t)$. В следующей лемме дано описание дополнительного слагаемого.

Лемма 5. *Имеет место изоморфизм пространств*

$$H^*(L,\ U_t)\cong H^*(L_{-1},\ U)\otimes H^*(L,\ L_{-1},\ U_t),\qquad t\in P.$$

В частности,

$$H^k(L,\ U_t)\cong H^k(L,\ L_{-1},\ U_t)\oplus H^{k-1}(L,\ L_{-1},\ U_t),\qquad k\geqslant 0.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение эндоморфизм пространства U_t, обозначаемый через $\int$ (отображение «интеграла»). Положим

$$\int x^{(i)}=x^{(i+1)}\qquad(0\leqslant i<p^n-1),\quad \int x^{(p^n-1)}=0,$$

и продолжим по линейности на все пространство U_t. Поясним причину обозначения $\int$. Очевидно, что $\partial\int u=u$, если $\operatorname{pr}_{\langle x(p^n-1)\rangle}u=0$, т. е. $\int$ — «почти» обратная операция к операции взятия производной $\partial\colon U_t\to U_t$.

Пусть $\overline{\psi}$ — класс когомологий в $H^k(L,\ U_t)$. Докажем, что в этом классе можно подобрать такой представитель $\psi\in Z^k(L,\ U_t)$, что будет выполнена нормировка

$$\psi(e_{-1},\ l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})=\lambda(l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})\,x^{(p^n-1)},\tag{8}$$

где $\lambda\in C^{k-1}(\mathscr{L}_0,\ P)$. Пусть ψ' — произвольный представитель класса $\overline{\psi}$ и для него эта нормировка не выполнена. Надо доказать, что существует такая кограница $d\omega\in B^k(L,\ U_t)$, что коцикл $\psi=\psi'-d\omega$ будет удовлетворять нормировке (8). Элементы $\omega(l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})$ для однородных $l_1,\ \ldots,\ l_{k-1}\in L$ будем строить индукцией по сумме индексов однородности $q=|l_1|+\ldots+|l_{k-1}|$. Ясно, что тогда будет построена коцепь $\omega\in C^{k-1}(L,\ U_t)$. Положим

$$i(e_{-1})\omega=0.$$

В частности, основание индукции для такой конструкции имеется.

Допустим, что для $q-1$ все элементы $\omega(l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})$ построены. Пусть теперь линейно независимые элементы $l_1,\ \ldots,\ l_{k-1}\in\mathscr{L}_0$ удовлетворяют условию $|l_1|+\ldots+|l_{k-1}|=q$. Тогда

$$d\omega(e_{-1},\ l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})=e_{-1}(\omega(l_1,\ \ldots,\ l_{k-1}))+a,$$

где $a=\sum\limits_i(-1)^i\omega([e_{-1},\ l_i],\ l_1,\ \ldots,\ \hat{l}_i,\ \ldots,\ l_{k-1})$ — известный (по предположению индукции) элемент в U_t. Осталось положить

$$\omega(l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})=\int(\psi(e_{-1},\ l_1,\ \ldots,\ l_{k-1})-a).$$

Индукционный шаг доказан. Значит, нормировка (8) достигнута.

Теперь докажем, что

$$\lambda \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t).$$

Пусть $\lambda = \sum_{r \geqslant 0} \lambda_r$, где $\lambda_r \in C_r^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t)$. Рассуждая индукцией по r, докажем, что $d\lambda_r = 0$. Поскольку пространство коциклов $Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t)$ конечномерно, мы получили бы требуемое утверждение: $d\lambda = 0$.

При $r < 0$ доказывать нечего. Допустим, что для $r-1$ утверждение верно. Тогда условие коцикличности

$$d\psi(e_{-1}, l_1, \ldots, l_k) = 0, \quad \text{где} \quad |l_1| + \ldots + |l_k| = r,$$

расписывается так:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{|l_i|=0} (-1)^{i+1} (l_i)_{U_t} (\psi(e_{-1}, l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_k)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{|l_i|=0} (-1)^{i} \psi([l_i, e_{-1}], l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_k) +$$

$$+ (i(e_{-1})\psi)'(l_1, \ldots, l_k) = e_{-1}(\psi(l_1, \ldots, l_k)).$$

Поскольку $(e_0)_{U_t}(x^{(p^n-1)}) = -x^{(p^n-1)} + tx^{(p^n-1)}$ и $[e_0, e_{-1}] = -e_{-1}$, это условие, в свою очередь, с учетом нормировки (8) дает, что

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{|l_i|=0} (-1)^{i+1} ((l_i)_{\langle 1_t \rangle} \lambda_r(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_k)) x^{(p^n-1)} +$$

$$+ \lambda_r'(l_1, \ldots, l_k) x^{(p^n-1)} = e_{-1}(\psi(l_1, \ldots, l_k)).$$

Вспомнив формулу кограницы d в коцепном комплексе $C^*(\mathscr{L}_0, 1_t)$, перепишем полученное соотношение:

$$(d\lambda(l_1, \ldots, l_k)) x^{(p^n-1)} = e_{-1}(\psi(l_1, \ldots, l_k)).$$

Ясно, что такое возможно только в случае, когда

$$d\lambda(l_1, \ldots, l_k) = 0, \qquad e_{-1}(\psi(l_1, \ldots, l_k)) = 0.$$

Индукционный переход доказан. Стало быть, $\lambda \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t)$.

Используя формулу спаривания на коцикл α, легко проверить, что $\alpha \cup \mathscr{A}'\lambda = \alpha \cup \lambda$, если $\lambda \in C^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t)$. Итак, всякий коцикл $\psi \in Z^k(L, U_t)$ можно представить в виде

$$\psi = \alpha \cup \mathscr{A}'\lambda + \varphi,$$

где $\lambda \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t)$ и $\varphi \in Z^k(L, U_t)$. Заметим, что $i(e_{-1})(\psi - \alpha \cup \lambda) = 0$, т. е. $i(e_{-1})\varphi = 0$. Тогда согласно формуле (2)

$$\theta(e_{-1})\varphi = d(i(e_{-1})\varphi) + i(e_{-1})(d\varphi) = 0.$$

Иными словами, $\varphi \in Z^k(L, L_{-1}, U_t)$. Таким образом, в любом классе коциклов ψ из дополнительного подпространства к пространству относительных когомологий $H^k(L, L_{-1}, U_t)$ в пространстве $H^k(L, U_t)$ можно выбрать коцикл ψ, представляемый в виде

$$\psi = \alpha \cup \mathscr{A}'\lambda, \qquad \lambda \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, 1_t).$$

Ясно при этом, что класс коцикла λ нетривиален, если таковым является класс коцикла ψ.

Осталось доказать, что если $\psi = d\omega$ — кограница, то соответствующий коцикл λ также будет кограницей. Итак, пусть

$$\alpha \smile \mathscr{A}'\lambda = d\omega. \tag{9}$$

Будем рассуждать индукцией по количеству аргументов $k=0, 1, 2, \ldots$. При $k=0$ нет предмета рассмотрения. Допуская, что для $k-1$ наше утверждение установлено, докажем его для k. Согласно предложению 1 когомологии коцепного комплекса $C^*(L, M)$ и его подкомплекса $C^*(L, M)^{L_0}$, инвариантного относительно действия тора L_0, изоморфны. Поэтому можем считать, что кроме условия (9) выполнены следующие соотношения:

$$i(e_0)\omega = 0, \qquad \theta(e_0)\omega = 0.$$

Тогда из условия (9) с учетом формулы (2) вытекает, что

$$\alpha \smile i(e_0)\mathscr{A}'\lambda = -d(i(e_0)\omega),$$

поскольку $i(e_0)(\alpha \smile \mathscr{A}'\lambda) = \alpha \smile (i(e_0)\mathscr{A}'\lambda)$. Так как $i(e_0)\mathscr{A}'\lambda \in Z^{k-2}(L, L_{-1}, U_t)$, то по предположению индукции $i(e_0)\mathscr{A}'\lambda = d\sigma$ для некоторого $\sigma \in C^{k-3}(L, L_{-1}, U_t)$. Тогда по лемме 4

$$\mathscr{A}'\lambda = -d(\beta \smile \sigma) + \mathscr{A}'\tilde{\lambda}$$

для некоторого $\tilde{\lambda} \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)$. Итак, условие (9) можно переписать в виде

$$\alpha \smile A'\tilde{\lambda} = d\varkappa, \tag{10}$$

где $\varkappa = \omega - \alpha \smile (\beta \smile \sigma) \in C^{k-1}(L, U_t)$.

Справедлива импликация

$$i(e_0)\tilde{\lambda} = 0,\ \theta(e_0)\tilde{\lambda} = 0 \Rightarrow i(e_0)(\alpha \smile \mathscr{A}'\tilde{\lambda}) = 0,\ \theta(e_0)(\alpha \smile \mathscr{A}'\tilde{\lambda}) = 0.$$

Поэтому $i(e_0)d\varkappa = 0$, $\theta(e_0)d\varkappa = 0$. По предложению 1 можем считать, что $\theta(e_0)\varkappa = 0$. Тогда $d(i(e_0)\varkappa) = 0$. Иначе говоря, $\varkappa = \beta \smile i(e_0)\varkappa + \tilde{\omega}$ для некоторого $\tilde{\omega} \in C^{k-1}(L, U_t)$ такого, что $i(e_0)\tilde{\omega} = 0$, $\theta(e_0)\tilde{\omega} = 0$ и $d\tilde{\omega} = d\varkappa$. Итак, условие (10), а стало быть, и условие (9), можно переписать в виде

$$\alpha \smile \mathscr{A}'\tilde{\lambda} = d\tilde{\omega}, \tag{11}$$

где $i(e_0)\tilde{\omega} = 0$, $\theta(e_0)\tilde{\omega} = 0$ и $\tilde{\lambda} \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t)$, причем коциклы λ, $\tilde{\lambda}$ отличаются на кограницу. Теперь заметим, что при выводе нормировки (8) мы нигде не пользовались тем, что ψ — коцикл. Применим ту же процедуру для коцепи $\breve{\omega}$.

Итак, можем считать, что выполнена нормировка

$$i(e_{-1})\tilde{\omega} = \mu \smile x^{(p^n-1)}, \qquad \mu \in C^{k-2}(\mathscr{L}_0, 1_t). \tag{12}$$

Напомним формулу спаривания коцепи μ на 0-коцепь $x^{(p^n-1)}$:

$$(\mu \smile x^{(p^n-1)})(l_1, \ldots, l_{k-2}) = \mu(l_1, \ldots, l_{k-2})\, x^{(p^n-1)}.$$

Более того, при этом можем сделать так, чтобы прежняя нормировка не испортилась:

$$i(e_0)\tilde{\omega} = 0, \qquad \theta(e_0)\tilde{\omega} = 0. \tag{13}$$

Тогда из условий (11) и (12) согласно формуле (2) вытекает, что

$$\mathscr{A}'\tilde{\lambda} \smile x^{(p^n-1)} + d(\mu \smile x^{(p^n-1)}) = \theta(e_{-1})\tilde{\omega}, \tag{14}$$

поскольку $i(e_{-1})(\alpha \smile A'\tilde{\lambda}) = A'\tilde{\lambda} \smile x^{(p^n-1)}$.

Теперь выведем из условия (14) следующий факт:

$$\tilde{\lambda} + d\mu = \tilde{0}.$$

Ясно, что тогда будет доказан индукционный шаг по k, и, значит, доказательство леммы будет завершено. Мы проверим, что

$$(\tilde{\lambda} + d\mu)(l_1, \ldots, l_{k-1}) = 0$$

для любых линейно независимых однородных элементов $l_1, \ldots, l_{k-1} \in \mathscr{L}_0$. Будем рассуждать, в свою очередь, индукцией по сумме индексов однородности $q = |l_1| + \cdots + |l_{k-1}|$. Если один из элементов $l_1, \ldots, l_{k-1}$ лежит в торе L_0, то утверждение верно. По существу, это было проверено выше (вспомним нормировку (13) и, что $\tilde{\lambda} \in Z^{k-1}(\mathscr{L}_0, L_0, 1_t))$). В частности, основание индукции имеется. Допустим, что наше утверждение установлено для $q-1$ и докажем его для q. При этом, как отметили выше, можем считать, что $l_1, \ldots, l_{k-1} \in \mathscr{L}_1$.

Итак, рассмотрим ограничения коцепей $\tilde{\lambda}$, μ, $\tilde{\omega}$ на подалгебру $\mathscr{L}_1$. Легко заметить, что тогда

$$d(\mu \smile x^{(p^n-1)}) = d\mu \smile x^{(p^n-1)};$$

поэтому условие (14) равносильно следующей системе уравнений:

$$(\tilde{\lambda} + d\mu)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}}) x^{(p^n-1)} = e_{-1}(\tilde{\omega}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}})) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \tilde{\omega}(e_{i_j-1}, e_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k-1}}), \tag{15}$$

где $e_{i_j} \in L_{i_j}$, $i_j > 0$, $j = 1, \ldots, k-1$. Пусть $A_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \in P$ — коэффициент при базисном одночлене $x^{(p^n-q+i_1+\ldots+i_{k-1})}$ в разложении элемента $\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}})$ по базисным векторам в пространстве U_t. Выведем условия, которые накладывают на эти коэффициенты уравнения (15). Легко проверить, что получаются следующие уравнения, каждое из которых соответствует некоторому набору $(i_1, \ldots, i_{k-1})$:

$$(\tilde{\lambda} + d\mu)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}}) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j A_{i_j-1, i_1, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{k-1}},$$

если $i_1 + \cdots + i_{k-1} = q$, и по предположению индукции

$$0 = A_{i_1,\ldots,i_{k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j A_{i_j-1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{k-1}},$$

если $i_1 + \cdots + i_{k-1} < q$. Назовем наборы $(i_1-1, i_2, \ldots, i_{k-1})$, $(i_1, i_2-1, \ldots, i_{k-1}), \ldots, (i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}-1)$ присоединенными к набору $(i_1, \ldots, i_{k-1})$. Если наборы $(i_1, \ldots, i_{k-1})$, $(i_1', \ldots, i'_{k-1})$ присоединены и также присоединены наборы $(i_1', \ldots, i'_{k-1})$, $(i_1'', \ldots, i''_{k-1})$, то будем считать наборы $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ и $(i_1'', \ldots, i''_{k-1})$ присоединенными. Пусть $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ — произвольный, но фиксированный набор такой, что $i_1 + \cdots + i_{k-1} = q$, $0 < i_1, \ldots, 0 < i_{k-1}$. Соберем все уравнения, соответствующие наборам $(i_1', \ldots, i'_{k-1})$, $i_1' + \cdots + i'_{k-1} = q' < q$, присоединенным к набору $(i_1, \ldots, i_{k-1})$, и сложим их. Тогда все слагаемые правых частей взаимно уничтожаются, а в левой части остается одно слагаемое $(\tilde{\lambda} + d\mu)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}})$. Итак, шаг индукции по q доказан. Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы 5 непосредственно следует из лемм 4 и 5.

Отметим, что наше доказательство позволяет эффективно строить базис пространства когомологий $H^*(L, U_t)$, исходя из базиса пространства $H^*(\mathscr{L}_1, 1_t)^{L_0}$: если класс коцикла ψ базисный в пространстве $H^*(\mathscr{L}_1, 1_t)^{L_0}$, то классы коциклов $\mathscr{A}'\psi$, $\alpha\cup\mathscr{A}'\psi$, $\beta\cup\mathscr{A}'\psi$, $\alpha\cup(\beta\cup\mathscr{A}'\psi)$ будут базисными в когомологиях $H^*(L, U_t)$ и ими исчерпывается базис этого пространства. Приведем другую формулировку теоремы 5.

Теорема 5'. *Пусть L — алгебра Цассенхауза $W_1(n)$ и $t\in P$. Пространство когомологий $H^*(L, U_t)$ можно разложить на тензорные произведения подпространств*

$$H^*(L, U_t)\cong H^*(L_{-1}, U)\otimes H^*(L_0)\otimes(H^*(\mathscr{L}_1)\otimes\langle 1_t\rangle)^{L_0}.$$

Заметим, что $H^1(L)\cong L/[L, L]=0$, но пространство

$$H^1(\mathscr{L}_1)\cong\mathscr{L}_1/[\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_1]\cong\langle e_1, e_2, e_{p^k-1} \mid 0<k<n\rangle$$

имеет размерность $n+1$. Так как по теореме 5 для пространства 1-когомологии имеет место разложение на прямые суммы

$$H^1(L, U_t)\cong(H^1(L_{-1}, U)\oplus H^1(L_0))\otimes\langle 1_t\rangle^{L_0}\oplus(H^1(\mathscr{L}_1)\otimes\langle 1_t\rangle)^{L_0},$$

то немедленно получаем

Следствие 2. *Пусть $L=W_1(n)$, $t\in P$. Тогда 0-когомологии $H^0(L, U_t)$ тривиальны, если $t\neq 0$, и 1-когомологии $H^1(L, U_t)$ тривиальны за исключением следующих случаев:*

$$\begin{aligned} H^1(L, U)\cong H^1(L_{-1}, U)\oplus H^1(L_0) &\quad \textit{двумерно при } t=0;\\ H^1(L, U_1)\cong\langle e_1\rangle &\quad \textit{одномерно при } t=1;\\ H^1(L, U_2)\cong\langle e_1\rangle &\quad \textit{одномерно при } t=2;\\ H^1(L, U_{-1})\cong\langle e_{p^k-1} \mid 0<k<n\rangle &\quad (n-1)\textit{-мерно при } t=-1. \end{aligned}$$

Заметим, что L-модуль U_{-1} изоморфен присоединенному L-модулю. Поэтому в последнем случае речь идет о следующем известном факте: пространство внешних дифференцирований $H^1(L, L)$ порождается дифференцированиями $\{\partial^{p^k} \mid 0<k<n\}$, в частности, оно $(n-1)$-мерно. Далее, при $t=0$ получаем, что классы коциклов α и β линейно независимы, и наше обещание о доказательстве этого факта выполнено.

В заключение выражаю благодарность Кострикину А. И. за внимание к работе.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. 1—3. М.: Мир, 1975.
2. *Dixmier J.* Cohomologie des algébres de Lie nipiotentes.— Acta Scient. Math. Szeged, 1955, v. 16, № 3—4, p. 246—250.
3. *Hochsild G., Serre J.-P.* Cohomology of Lie algebras.— Ann. Math., ser. 2, 1953, v. 57, № 3, p. 591—603.
4. *Кострикин А. И., Шафаревич И. Р.* Градуированные алгебры Ли конечной характеристики.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1969, т. 33, № 2, с. 251—322.
5. *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* Неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полем конечной характеристики.— Матем. заметки, 1967, т. 2, с. 439—454.
6. *Мильнер А. А.* Неприводимые представления алгебры Цассенхауза.— УМН, 1975, т. 30, № 6, с. 178.
7. *Block R.* New simple Lie algebras of prime characteristic.— Trans. Amer. Math. Soc., 1958, v. 89, № 2, p. 421—449.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
11.I.1982