Е.С. ТЕМИРБЕКОВ

АНАЛИЗ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И УСИЛИЙ В КОНСТРУКЦИЯХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИИ

Интенсивности сил инерции и тяжести звена имеют определенное аналитическое выражение, используя их [1] и метод конечных стержневых элементов (МКЭ), основанный на прямолинейном однородном стержне [2-4], получены более точные для исследования кинетостатики рычажных механизмов модели стержневого конечного элемента:

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_{\xi}^{ij} \\ \vec{R}_{\xi}^{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{ij} & B_{12}^{ij} \\ B_{21}^{ij} & B_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}_{\xi}^{ij} \\ \vec{U}_{\xi}^{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{Q}^{ij} \\ \vec{Q}^{ji} \end{Bmatrix}, \text{ где} \tag{1}$$

реактивные силы $\vec{R}_{\xi}^{ij} = \left[R_{1N\xi}^{ij} R_{2N\xi}^{ij} R_{3N\xi}^{ij} R_{1M\xi}^{ij} R_{2M\xi}^{ij} R_{3M\xi}^{ij}\right]^T$ и $\vec{R}_{\xi}^{ji} = \left[R_{1N\xi}^{ji} R_{2N\xi}^{ji} R_{3N\xi}^{ji} R_{1M\xi}^{ji} R_{2M\xi}^{ji} R_{3M\xi}^{ji}\right]^T$, узловые перемещения $\vec{U}_{\xi}^{ij} = \left[u_1^{ij} u_2^{ij} u_3^{ij} \varphi_1^{ij} \varphi_2^{ij} \varphi_3^{ij}\right]^T$ и $\vec{U}_{\xi}^{ji} = \left[u_1^{ji} u_2^{ji} u_3^{ji} \varphi_1^{ji} \varphi_2^{ji} \varphi_3^{ji}\right]^T$; $\left[B_{rq}^{ij}\right] (r = 1,2; q = 1,2)$ матрицы жесткости $\left[B^{ij}\right]$ не изменяются [2-4], а подвекторы $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$ получены в следующем виде [1] - для распределенной инерции плоскопараллельного движения:

$$\vec{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ -\frac{a_q l}{2} - \frac{3 b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a_q l^2}{12} - \frac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ -\frac{a_q l}{2} - \frac{7 b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_q l^2}{12} + \frac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

где $a_n = -\gamma A \sin\theta - \frac{\gamma A}{g} w_p^{x_i}$; $b_n = \frac{\gamma A}{g}\omega^2$; $a_q = -\gamma A \cos\theta - \frac{\gamma A}{g} w_p^{y_i}$; $b_q = -\frac{\gamma A}{g}\varepsilon$; γ, A, l - удельный вес, площадь сечения и длина звена; θ - угол наклона звена;

- для распределенной инерции пространственного движения:

$$\vec{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ -\frac{a_q^y l}{2} - \frac{3b_q^y l^2}{20} \\ -\frac{a_q^z l}{2} - \frac{3b_q^z l^2}{20} \\ \frac{ml}{2} \\ \frac{a_q^z l^2}{12} + \frac{b_q^z l^3}{30} \\ -\frac{a_q^y l^2}{12} - \frac{b_q^y l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ -\frac{a_q^y l}{2} - \frac{7b_q^y l^2}{20} \\ -\frac{a_q^z l}{2} - \frac{7b_q^z l^2}{20} \\ -\frac{ml}{2} \\ -\frac{a_q^z l^2}{12} - \frac{b_q^z l^3}{30} \\ \frac{a_q^y l^2}{12} + \frac{b_q^y l^3}{30} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

где m - равномерно распределенная интенсивность крутящего момента. **Определение перемещений узлов.** Пусть $\vec{U}^{ij}$ вектор обобщенных перемещений точки контакта ij -го стержневого элемента с i-м узловым элементом, а $\vec{U}^{ji}$ - вектор обобщенных перемещений точки контакта ij -го стержневого элемента с j-м узловым элементом. Положительные направления перемещений примем совпадающими с положительными направлениями координатных осей $O^i\zeta_k^{ij}$ и $O^j\zeta_k^{ji}$ $(k=1,2,3)$. Тогда имеют место зависимости $\vec{U}^{ij} = \left[D^{ij}\right] * \vec{U}_\xi^{ij}$, $\vec{U}^{ji} = \left[D^{ji}\right] * \vec{U}_\xi^{ji}$ и обратные им $\vec{U}_\xi^{ij} = \left[D^{ij}\right]^T \vec{U}^{ij}$, $\vec{U}_\xi^{ji} = \left[D^{ji}\right]^T \vec{U}^{ji}$, причем $\left[D^{ij}\right] = \left[D^{ji}\right]$ в силу прямолинейности стержня. В свою очередь перемещения $\vec{U}^{ij}$ и $\vec{U}^{ji}$ точек контакта ij -го стержневого элемента с i-м и j-м узловыми элементами связаны с перемещениями $\vec{\Delta}^i$ и $\vec{\Delta}^j$ центров этих узловых элементов вдоль осей $O^i\eta_k$ и $O^j\eta_k$ $(k=1,2,3)$ следующими соотношениями (рис. 1):

$$\vec{U}^{ij} = \left[H^{ij}\right]^T \vec{\Delta}^i, \quad \vec{U}^{ji} = \left[H^{ji}\right]^T \vec{\Delta}^j, \text{ где } \vec{\Delta}^i = \left[u_1^i u_2^i u_3^i \varphi_1^i \varphi_2^i \varphi_3^i\right]^T, \ \vec{\Delta}^j = \left[u_1^j u_2^j u_3^j \varphi_1^j \varphi_2^j \varphi_3^j\right]^T$$

$$\left[\overline{H}_i^{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{\eta}_3^{ij} & \overline{\eta}_2^{ij} \\ \overline{\eta}_3^{ij} & 0 & -\overline{\eta}_1^{ij} \\ -\overline{\eta}_2^{ij} & \overline{\eta}_1^{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\overline{H}_i^{ji}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{\eta}_3^{ji} & \overline{\eta}_2^{ji} \\ \overline{\eta}_3^{ji} & 0 & -\overline{\eta}_1^{ji} \\ -\overline{\eta}_2^{ji} & \overline{\eta}_1^{ji} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Обозначая $\left[D^{ij}\right]^T \left[H^{ij}\right]^T = \left[H^{ij} D^{ij}\right]^T = \left[C_i^{ij}\right]^T$ и $\left[D^{ji}\right]^T \left[H^{ji}\right]^T = \left[H^{ji} D^{ji}\right]^T = \left[C_i^{ji}\right]^T$ получим:

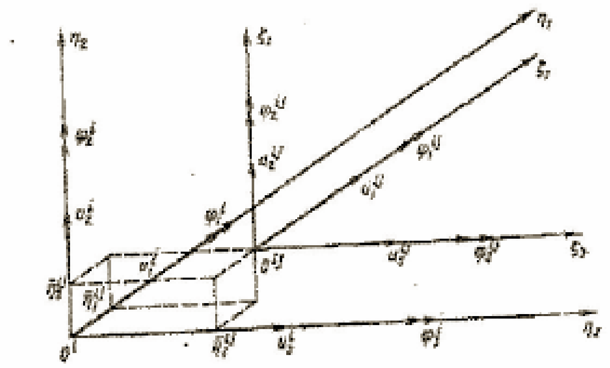

Рисунок 1. Связь компонент перемещений точек O^i и O^{ij} узлового элемента

$$\vec{U}_{\xi}^{ij} = \left[C_i^{ij}\right]^T \vec{\Delta}^i, \quad \vec{U}_{\xi}^{ji} = \left[C_i^{ji}\right]^T \vec{\Delta}^j \tag{5}$$

Подставляя далее соотношения (5) в зависимости (1), получим:

$$\vec{R}_{\xi}^{ij} = \left[B_{11}^{ij}\right]\left[C_i^{ij}\right]^T \vec{\Delta}^i + \left[B_{12}^{ij}\right]\left[C_i^{ji}\right]^T \vec{\Delta}^j + \vec{Q}^{ij}; \tag{6}$$

$$\vec{R}_{\xi}^{ji} = \left[B_{21}^{ij}\right]\left[C_i^{ij}\right]^T \vec{\Delta}^i + \left[B_{22}^{ij}\right]\left[C_i^{ji}\right]^T \vec{\Delta}^j + \vec{Q}^{ji}; \tag{7}$$

связывающие обобщенные реакции $\vec{R}_{\xi}^{ij}$ и $\vec{R}_{\xi}^{ji}$ с обобщенными перемещениями $\vec{\Delta}^i$ и $\vec{\Delta}^j$ центров узловых элементов, соединенных ij-м стержневым элементом.

Подставляя (6) и (7) в уравнения равновесия узловых элементов:

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left[C_i^{ji}\right] * \vec{R}_{\xi}^{ji} + \sum_{j=i+1}^{N_r}\left[C_i^{ij}\right] * \vec{R}_{\xi}^{ij} = \vec{q}^{\,i} \quad (i = 1, \ldots N_r)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных перемещений центров узловых элементов рассматриваемой пространственной стержневой системы:

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left[C_i^{ji}\right]\left[B_{21}^{ij}\right]\left[C_i^{ij}\right]^T * \vec{\Delta}^j + \left\{\sum_{j=1}^{i-1}\left[C_i^{ji}\right]\left[B_{22}^{ij}\right]\left[C_i^{ji}\right]^T + \sum_{j=i+1}^{N_r}\left[C_i^{ij}\right]\left[B_{11}^{ij}\right]\left[C_i^{ij}\right]^T\right\} * \vec{\Delta}^i +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{N_r}\left[C_i^{ij}\right]\left[B_{12}^{ij}\right]\left[C_i^{ji}\right]^T * \vec{\Delta}^j = \vec{q}^{\,i} -$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1}\left[C_i^{ji}\right] * \vec{Q}^{ji} - \sum_{j=i+1}^{N_r}\left[C_i^{ij}\right] * \vec{Q}^{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, N_r) \tag{8}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (8) можно записать в матричной форме

$$[P]*\vec{\Delta}=\vec{F}. \tag{9}$$

Здесь $[P]=\begin{bmatrix} p_{11}\cdots p_{1N_r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{N_r1}\cdots p_{N_rN_r}\end{bmatrix}; \vec{\Delta}=\begin{Bmatrix}\vec{\Delta}_1 \\ \cdots \\ \vec{\Delta}_{N_r}\end{Bmatrix}; \vec{F}=\begin{Bmatrix}\vec{f}_1 \\ \cdots \\ \vec{f}_{N_r}\end{Bmatrix}$;, $(j>i)$, $[p_{ij}]=[K_{21}^{ij}]$

$$[p_{ii}]=\sum_{j=1}^{i-1}[K_{22}^{ij}]+\sum_{j=i+1}^{N_r}[K_{11}^{ij}],\ \ [p_{ji}]=[K_{21}^{ij}],\ \ \vec{f}_i=\vec{q}_i-\sum_{j=1}^{i-1}[C_i^{ij}]*Q^{ij}-\sum_{j=i+1}^{N_r}[C_i^{ij}]*Q^{ij} \tag{10}$$

$$[K_{11}^{ij}]=[C_i^{ij}][B_{11}^{ij}][C_i^{ij}]^T;\ \ [K_{12}^{ij}]=[C_i^{ij}][B_{12}^{ij}][C_i^{ji}]^T;$$
$$[K_{21}^{ji}]=[C_i^{ji}][B_{21}^{ij}][C_i^{ij}]^T;\ \ [K_{22}^{ji}]=[C_i^{ji}][B_{22}^{ij}][C_i^{ji}]^T;$$

Суммирование в выражениях (8) и (10) ведется только по реальным связям. Решение системы (9) с учетом того, что некоторые из компонент векторов $\vec{\Delta}^i$ обобщенных смещений центров узловых элементов могут быть заранее известны (задание граничных условий, накладываемых на модель), позволяет определить остальные компоненты векторов $\vec{\Delta}^i$ $(i=1,2,\ldots,N_r)$ обобщенных смещений конечно-элементной модели.

Реакции в опорах стержневой системы. Реакции $\vec{R}^i$ в центрах узловых элементов связаны с реакциями $\vec{R}_\xi^{ij}$ и $\vec{R}_\xi^{ji}$ со стороны стержневых элементов соотношениями:

$$\vec{R}^i=\sum_{j=1}^{i-1}[C_i^{ji}]*\vec{R}_\xi^{ji}+\sum_{j=i+1}^{N_r}[C_i^{ij}]*\vec{R}_\xi^{ij}, \tag{11}$$

В свою очередь реакции $\vec{R}_\xi^{ij}$ и $\vec{R}_\xi^{ji}$ выражаются через перемещения $\vec{\Delta}^i$ и $\vec{\Delta}^j$ центров узловых элементов по формулам (6-7). Подставляя их в (11), получаем выражение

$$\vec{R}^i=\left\{\sum_{j=1}^{i-1}[K_{22}^{ij}]+\sum_{j=i+1}^{N_r}[K_{11}^{ij}]\right\}*\vec{\Delta}^i+\sum_{j=1}^{i-1}[K_{21}^{ij}]*\vec{\Delta}^j+\sum_{j=i+1}^{N_r}[K_{11}^{ij}]*\vec{\Delta}^j+$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}[C_i^{ij}]*\vec{Q}^{ij}+\sum_{j=i+1}^{N_r}[C_i^{ij}]*\vec{Q}^{ij}, \tag{12}$$

позволяющее определить реакции в центре i – го узлового элемента, если известны перемещения центров всех узловых элементов. Очевидно, что если на перемещения центра i – го узлового элемента не было наложено никаких ограничений, то $\vec{R}^i=\vec{q}^i$. Если же на перемещения центра i – го узлового элемента были наложены какие-либо ограничения, то такие узловые элементы будем называть опорными узловыми элементами. Реакции $\vec{R}^i$, приведенные к центру опорного узлового элемента, вычисляются по формуле (12). Реакции $\vec{R}_0^i$ в самих опорах равны реакциям в опорных узловых элементах. Положительные направления реакций $\vec{R}_0^i$ в опорах совпадают с положительными направлениями $O^i\eta_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Построение эпюр внутренних силовых факторов для прямолинейного стержневого элемента. После того, как система уравнений (9) решена и определены смещения $\vec{\Delta}^i$ центров узловых элементов пространственной стержневой системы, по формулам

$$\vec{U}_\xi^{ij} = \left[C_i^{ij}\right]^T \vec{\Delta}^i; \quad \vec{U}_\xi^{ji} = \left[C_i^{ji}\right]^T \vec{\Delta}^j$$

можно вычислить обобщенные перемещения точек контакта ij-го стержневого элемента с i-м и j-м узловыми элементами. По формуле

$$\vec{R}_\xi^{ij} = \left[B_{11}^{ij}\right] * \vec{U}_\xi^{ji} + \left[B_{12}^{ij}\right] * \vec{U}_\xi^{ji} + \vec{Q}^{ij}$$

вычисляют реакции, действующие на ij-й стержневой элемент в начале локальной системы координат стержня, и по формулам

$$N_0 = -R_{1N\xi}^{ij}, \quad Q_{y0} = -R_{2N\xi}^{ij}, \quad Q_{z0} = -R_{3N\xi}^{ij};$$
$$M_0 = -R_{1M\xi}^{ij}, \quad M_{y0} = -R_{2M\xi}^{ij}, \quad M_{z0} = -R_{3M\xi}^{ij};$$

- внутренние силовые факторы в начальном торцовом сечении стержня. Их достаточно для построения эпюр внутренних силовых факторов для ij-го стержневого элемента конечно-элементной модели. Из уравнений равновесия получим

$$\frac{dN}{dx} + a_n + b_n x = 0, \quad \frac{dM}{dx} + m = 0;$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + a_q + b_q x = 0; \quad \frac{dM_z}{dx} - Q_y = 0; \quad \frac{dQ_z}{dx} + a_q^z + b_q^z x = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - Q_z = 0$$

тем самым определив зависимость внутренних силовых факторов от координаты x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джолдасбеков С.У., Темирбеков Е.С. Силовой анализ конструкций стержневых механизмов с учетом распределенной инерции движения. Международная научная конференция "Проблемы теоретической и прикладной механики" посвященная 75-летию академика У.А. Джолдасбекова. 1-2 марта, 2006. -Алматы. Тезисы докладов. -С.94.
2. Варвак П.М. Метод конечных элементов. -Киев: Вища школа. Головное издательство, 1981.- 176 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных эементов / Пер. с англ. А.С.Алексеева и др.; под ред. А.Ф.Смирнова. -М.: Стройиздат, 1982. -448 с.
4. Темирбеков Е.С. Кинематическое и силовое исследования механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев. Диссертация … доктора техн. наук. -Алматы, 1996.

Поступила в редакцию 07.08.2006.