

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Е.С.Темирбеков
ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, г.Астана

Для плоских рычажных механизмов (РМ) методика применения метода конечных стержневых элементов известна [1-3]. Однако для пространственных РМ стандартный подход МКЭ не годится в силу ряда причин. Здесь изложен нестандартный подход в применении к жесткостному и силовому анализу пространственных РМ (ПРМ) методом конечных стержневых элементов (МКЭ).

Нестандартное отличие заключается в том, что в качестве неизвестных задачи МКЭ предлагается принять перемещения узлов не как принято традиционно - в глобальной системе координат (ГСК), а в локальных (ЛСК) узлов. Также - нестандартным подходом при моделировании кинематических пар (локальных граничных условий) - названным методикой «ожестких» узлов. **Основная система уравнений МКЭ в ЛСК.** Пусть $U_i = (u_1^i, \dots, u_6^i)^T$,

$\tilde{U}_i = (\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_6^i)^T$, $F_i = (f_1^i, \dots, f_6^i)^T$, $\tilde{F}_i = (\tilde{f}_1^i, \dots, \tilde{f}_6^i)^T$, ($i = 1, \dots, m$), - векторы перемещений i -го узла и внешних сил, приложенных к i -му узлу, соответственно в ГСК $OXYZ$ и в ЛСК $O_i\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ i -го узла, m - общее число узлов в КЭМ (рисунок 1).

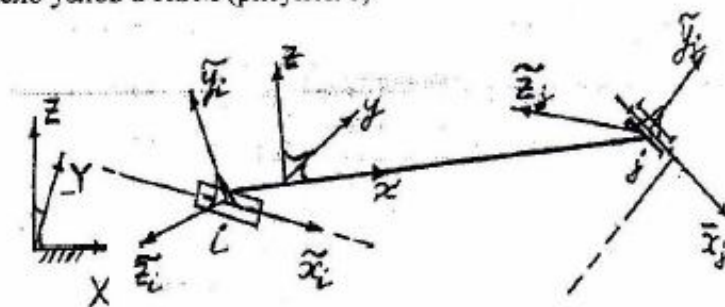


Рисунок 1 – Схема узла и системы координат

Пусть $[T_i^o]$ - матрица направляющих косинусов ЛСК $O_i\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ i -го узла относительно ГСК $OXYZ$. Тогда для i -го узла $U_i = [T_i] \tilde{U}_i$, $F_i = [T_i] \tilde{F}_i$, $\tilde{U}_i = [T_i]^T U_i$, $\tilde{F}_i = [T_i]^T F_i$, $i = 1, \dots, m$, где $[T_i]$ переводит узловые векторы из ЛСК i -го узла в ГСК и имеет вид:

$$[T_i] = \begin{bmatrix} T_i^o & O \\ O & T_i^o \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m. \text{ Так как } [T_i^o] \text{ является матрицей вращения, то: } [T_i^o]^T = [T_i^o]^{-1},$$

тогда $[T_i]$ также ортогональна:

$$[T_i]^T [T_i] = [T_i] [T_i]^T = [E], \text{ или } [T_i]^T = [T_i]^{-1} \quad (1)$$

Пусть U - вектор перемещений всех узлов КЭМ и F - вектор внешних узловых сил в ГСК: OXYZ:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m)^T = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T, F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T \quad (2)$$

где N - количество степеней свободы системы или неизвестных. Аналогично в ЛСК узлов:

$$\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_m)^T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_N)^T, \tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_m)^T = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N)^T \quad (3)$$

подвекторами которых являются векторы перемещений и внешних сил отдельных узлов в соответствующих ЛСК. Тогда (2) и (3) связаны следующим образом:

$$U = [T] \tilde{U}, F = [T] \tilde{F}, \tilde{U} = [T]^T U, \tilde{F} = [T]^T F \quad (4)$$

где матрица преобразования $[T]$ имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m \end{bmatrix}$$

Покажем, что матрица $[T]$ является ортогональной.

$$[T]^T [T] = \begin{bmatrix} T_1^T & O & \dots & O \\ O & T_2^T & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m^T \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^T T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2^T T_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m^T T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O & \dots & O \\ O & E & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E \end{bmatrix} = [E]$$

Следовательно, для $[T]$ также выполняется (1): $[T]^T [T] = [T][T]^T = [E]$, или $[T]^T = [T]^{-1}$.
Основная система линейных уравнений МКЭ имеет вид:

$$[K]U = F \quad (5)$$

Преобразуем уравнение (5) следующим образом: $[T]^T [K] U = [T]^T F$.

Очевидно, оно эквивалентно: $[T]^T [K] [E] U = [T]^T F$ или $[T]^T [K] [T][T]^T U = [T]^T F$.

Используя (4), последнее выражение можем записать в виде: $[T]^T [K][T] \tilde{U} = \tilde{F}$.

Обозначим $[\tilde{K}] = [T]^T [K][T]$ матрица жесткости системы КЭМ в ЛСК узлов. Таким образом, (5) эквивалентно уравнению

$$[\tilde{K}] \tilde{U} = \tilde{F}, \quad (6)$$

которое является уравнением равновесия конструкции в ЛСК узлов, и вместо решения уравнения (5) нужно искать решение уравнения (6). Следовательно, предлагаемый подход рассмотрения основной системы МКЭ не в ГСК, а в ЛСК узлов является корректным.

Учет кинематических пар методикой "жестких" узлов. Обычно используется стандартный способ учета кинематических соединений. Он является апробированным подходом моделирования шарниров в МКЭ и пригоден для расчета стержневых систем с вращательными и поступательными парами с взаимно параллельными или перпендикулярными осями. В [3] предложен другой способ, названный методикой "жестких" узлов. Основная идея заключается в том, что шарнирные узлы моделируются в виде комбинации двух или более жестких узлов, расположенных в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы. При этом вводятся дополнительно новые неизвестные - в виде углов поворота торцевого сечения конечных стержневых элементов (КСЭ) относительно оси шарнира. Следовательно, порядок основной системы (СЛАУ) равновесия МКЭ увеличится на число этих дополнительных неизвестных, но зато значительно упростится схема учета шарнирных соединений. С точки зрения моделирования, основной идеей является включение уравнений (8) в СЛАУ МКЭ как независимых и ее решение, порядок которой таким образом увеличен на число КСЭ, примыкающих к шарнирам.

Кратко приведем основные моменты этого подхода. Кроме жестких и шарнирных узлов вводятся так называемые жесткошарнирные узлы. На рисунке 2 а,б показаны примеры жестких узлов, 2в,г – полных шарнирных узлов, а на рисунке 2д,е,ж,з - примеры жесткошарнирных узлов. Для таких узлов известные методы учета шарнирных соединений оказались на практике трудно применимыми. Например, в узле (рисунок 2ж) на концах элементов 1, 2 и 3, 4 соответственно возникают два разных по значению изгибающих момента и соответственно два угла поворота относительно оси вращения шарнира: общий угол поворота торцевых сечений жестко соединенных 1-го и 2-го КСЭ, и общий угол поворота торцевых сечений 3-го и 4-го КСЭ. Узлы вида д,е,ж,з названы сложными шарнирами и определено для них число степеней свободы W . Очевидно, в общем случае сложные шарниры представляют собой категорию узлов, в которых шарнирно соединяются n групп стержней, каждая из которых состоит из $k_i, i=1, \dots, n$ жестко связанных КСЭ. Тогда все остальные виды узловых соединений являются частными случаями сложных шарниров. Очевидно, внутри каждой группы в торцевых сечениях КСЭ возникают одинаковые изгибающие моменты и одинаковые угловые повороты вокруг оси шарнира. Т.е. по шарнирной степени свободы (вращение вокруг оси шарнира) каждая жесткая группа имеет свои компоненты перемещения узла и вектора реакций. Остальные пять компонент этих векторов одинаковы для всех групп, т.к. по этим степеням свободы передаются реакции между всеми стержнями, входящими в узел. Из данных рассуждений можем сделать: любой шарнирный узел можно представить в виде комбинации нескольких жестких узлов, расположенных в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы. Число степеней свободы W сложного шарнира, соединяющего n жестких групп стержневых элементов:

$$W = 5 + n. \quad (7)$$

Учет дополнительных перемещений и усилий, возникающих в сложных узлах, естественно означает введение дополнительных неизвестных задачи. Остановимся на этом вопросе подробнее. Если применить формулу (7) для узлов, в которые шарнирно входит хотя бы два одиночных стержня, то получим "лишние" степени свободы - повороты торцевых сечений стержней. Например, узел на рисунке 2д получит не 5, а 8 степеней свободы. Обычно [2] в число неизвестных перемещений стержневой системы не вводятся углы поворота сечений стержней, примыкающих к шарнирным узлам, хотя эти угловые перемещения так же неизвестны, как и углы поворота жестких узлов. Во-первых, потому что это приведет к увеличению числа неизвестных и, следовательно, количества уравнений равновесия. Во-вторых, потому, что это перемещение является линейно зависимым от остальных компонент перемещений данного стержневого элемента:

$$f_l = k_{11}\delta_1 + \dots + k_{1l}\delta_l + \dots + k_{1,12}\delta_{12} = 0 \quad (8)$$

где f_l - реакция по рассматриваемой l -й степени свободы, т.е. изгибающий момент, равный нулю; k_{ij} - элементы l -й строки МЖ КСЭ; δ_j - компоненты перемещений КСЭ.

Предлагаемый подход означает включение указанных углов поворота в число неизвестных перемещений вследствие введения "лишних" степеней свободы шарниров. При этом все узлы КЭМ конструкции считаются жесткими. Т.е., вместо исключения линейно зависимых уравнений из основной СЛАУ, эти "лишние" уравнения вводятся и решаются вместе со всеми.

Моделирование кинематических пар ПРМ. Для моделирования пространственных кинематических пар применим метод жестких узлов, изложенный выше. Согласно этому методу, кинематическая пара 5-го класса представляется в виде комбинации двух или более жестких узлов, находящихся в одной точке и имеющих 5 общих степеней свободы.

В общем случае, для произвольной пространственной кинематической пары количество общих степеней свободы входящих в нее узлов, очевидно, равно числу накладываемых связей W' , т.е. классу кинематической пары. Будем рассматривать кинематические пары, для которых $3 \leq W' \leq 5$. Определим число степеней свободы W (в смысле МКЭ) кинематической пары, состоящей из k жестких узлов. Аналогично (7):

$$W = W' + k(6 - W') \quad (9)$$

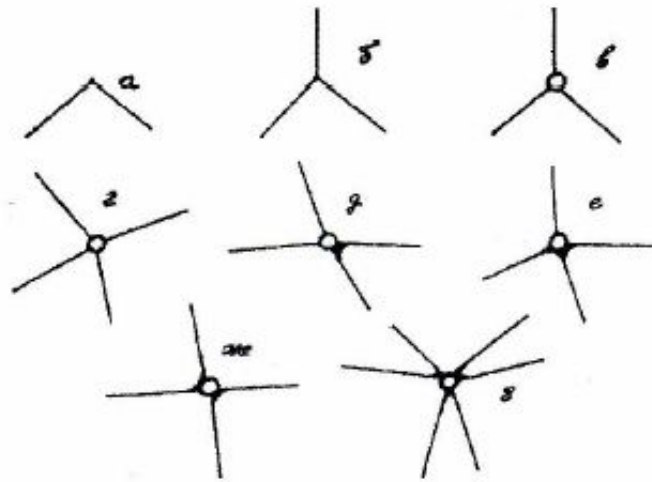


Рисунок 2 – Схематическое представление узлов

Тогда формулы для определения количества степеней свободы N всей конструкции ПМВК имеют вид:

$$N = 6n_{ж} + \sum_{i=1}^{n_{ш}} (6k_i - W'_i(k_i - 1)) - n_r, \quad (10)$$

где $n_{ж}$ - количество жестких узлов, $n_{ш}$ - количество кинематических пар; n_r - количество степеней свободы, по которым отсутствуют перемещения, т.е. наложены граничные условия; k_i ($i = 1, \dots, n_{ш}$) - количество жестких узлов, входящих в i -ю кинематическую пару; W'_i ($i = 1, \dots, n_{ш}$) - класс i -й кинематической пары. Таким образом, при составлении КЭМ ПРМ любая кинематическая пара представляется в виде комбинации из k узлов, находящихся в одной точке и имеющих W' общих степеней свободы; где k - количество жестких групп стержневых элементов, соединенных в этом шарнире, а W' - класс кинематической пары. Для каждого положения ПРМ необходимо задать ориентацию всех кинематических пар с помощью углов α, β, γ между ЛСК, связанными с кинематическими осями и осями ГСК Ox, Oy, Oz .

Количество осей S кинематических пар зависит от вида пары: вращательная, поступательная и цилиндрическая имеют только одну ось S , совпадающую с направлением поступательного движения или с осью вращения элементов кинематической пары. Сферический шарнир не имеет ось, т.к. в нем отсутствуют изгибающие моменты относительно любой оси. Сферический шарнир с "пальцем" имеет две шарнирные оси S_1 и S_2 , совпадающие с осью "пальца" и прямой, проходящей через центр шарнира перпендикулярно касательной к профилю направляющей прорези пальца. Для каждого узла КЭМ ПРМ необходимо построить ЛСК $Oxuz$ с центром в этом узле. ЛСК одиночных узлов (т.е. не входящих в какой-либо шарнир) и узлов сферического шарнира можно выбрать произвольно ввиду произвольной ориентации степеней свободы данных узлов. Поэтому оси ЛСК таких узлов направим параллельно осям ГСК $OXYZ$. ЛСК узлов, образующих кинематические пары 4 и 5 класса с одной кинематической осью S , построим таким образом, чтобы ось Ox совпадала с осью S , а оси Oy и Oz направим произвольно, разумеется, чтобы тройка $Oxuz$ была правой прямоугольной. Для узлов сферического шарнира с пальцем ось Ox направим по оси пальца S_1 , а ось Oy - по оси S_2 , проходящей через центр шарнира перпендикулярно касательной к профилю направляющей прорези. Очевидно, узлы одного шарнира имеют одну общую ЛСК, поэтому термин "ЛСК шарнира" означает ЛСК входящих в него жестких узлов.

В таблице приведены виды кинематических пар, используемые в ПРМ, ориентация их ЛСК в пространстве, а также отсутствующие (нулевые) компоненты вектора реакций. Помимо координат шарнира и расположения шарнирных осей, для каждой кинематической пары необходимо указать шарнирные степени свободы. Т.е. для узлов каждого шарнира нужно задать информацию о том, какие степени свободы в ЛСК узлов являются общими, и какие шарнирными. Это осуществляется тем же способом, что и в методе жестких узлов, приведенном в [3]. Отличие состоит лишь в том, что каждая строка матрицы ID задается не в ГСК, а в ЛСК соответствующего узла. Т.е. элементы i -й строки описывают перемещения и углы поворота i -го узла в его ЛСК.

Таблица – Виды кинематических пар

№	Название кин. пары	Условное обозначение	Нулевые усилия	Направления осей ЛСК $Oxyz$
1	Вращательная 5 класс		M_x	Ox – вдоль оси вращения Oy – перпендикулярно Ox Oz – перпендикулярно плоскости Oxy
2	Поступательная 5 класс		N_x	Ox – вдоль направления движения ползуна Oy – перпендикулярно Ox Oz – перпендикулярно плоскости Oxy
3	Цилиндрическая 4 класс		N_x M_x	Ox – вдоль оси вращения Oy – перпендикулярно Ox Oz – перпендикулярно плоскости Oxy
4	Сферическая с пальцем 4 класс		M_x M_y	Ox – вдоль оси пальца Oy – перпендикулярно плоскости прорези Oz – перпендикулярно плоскости Oxy
5	Сферическая 3-класс		M_x M_y M_z	Ox – произвольно Oy – перпендикулярно Ox Oz – перпендикулярно плоскости Oxy

Особенности МКЭ при силовом анализе ПМВК. Принцип построения МЖС и порядок вычисления МЖ КСЭ, изложенный в [1], остаются без изменений. Алгоритм силового расчета дополняется лишь процедурой преобразования МЖ КСЭ $[K_s^r]$, $s=1, \dots, n$ (n - количество стержневых элементов) из ГСК $OXYZ$ в ЛСК начального и конечного узлов КСЭ. Опишем эту процедуру более подробно. Вычисление МЖ s -го КСЭ $[K_s^s]$, $s=1, \dots, n$ производится по известным формулам [1] в ЛСК s -го КСЭ. Затем МЖЭ $[K_s^s]$ преобразовывается в МЖЭ $[K_s^r]$ в ГСК $OXYZ$. Пусть i, j - номера начального и конечного узла КСЭ s , $s=1, \dots, n$. В этих узлах имеем местные ЛСК $O_i x y z$ и $O_j x y z$ с матрицами направляющих косинусов $[T_i^o]$ и $[T_j^o]$ вида (2). Построим матрицу $[T^s]$ вида:

$$[T^s] = \begin{bmatrix} T_i & O \\ O & T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i^o & O & O & O \\ O & T_i^o & O & O \\ O & O & T_j^o & O \\ O & O & O & T_j^o \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Очевидно, $[T^s]$ является матрицей преобразования для КСЭ из ГСК в ЛСК узлов i и j .

Рассмотрим уравнение равновесия s -го КСЭ в ГСК:

$$[K_r^s]U^s = F^s, \quad (12)$$

где U^s и F^s - векторы перемещений и внешних усилий КСЭ s в ГСК:

$$\begin{aligned} U^s &= (U_i, U_j)^T = (u_1^i, \dots, u_6^i, u_1^j, \dots, u_6^j)^T, \\ F^s &= (F_i, F_j)^T = (f_1^i, \dots, f_6^i, f_1^j, \dots, f_6^j)^T \end{aligned} \quad (13)$$

$[T^s]$ является ортогональной, поэтому для (12) можно произвести аналогичные (5)-(6) преобразования, в результате которых получим уравнение равновесия s -го элемента:

$$[\tilde{K}^s]\tilde{U}^s = \tilde{F}^s \quad (14)$$

в местных системах координат i -го и j -го узлов, где

$$[\tilde{K}^s] = [T^s]^T [K_r^s] [T^s] \quad (15)$$

- МЖ s -го КСЭ в ЛСК i -го и j -го узлов.

Таким образом, перевод МЖ КСЭ $[K_r^s]$, $s=1, \dots, n$, в ЛСК узлов производится по формуле (15).

Построение МЖ КЭМ $[\tilde{K}]$ из полученных МЖ КСЭ $[\tilde{K}^s]$ выполняется известным способом [1]. Процедура решения системы уравнений равновесия также не меняется. Небольшое дополнение вносится на этапе вычисления усилий в КСЭ. После решения основной системы уравнений и определения узловых перемещений \tilde{U} необходимо для каждого s -го КСЭ выполнить преобразование вектора перемещений \tilde{U}^s КСЭ из ЛСК узлов в ГСК:

$$U^s = [T^s]\tilde{U}^s \quad (16)$$

Показана эквивалентность рассмотрения основной разрешающей системы МКЭ в ГСК и ЛСК узлов. Эквивалентность рассмотрения основной разрешающей системы МКЭ в ГСК и ЛСК узлов позволила разработать методику анализа конструкций ПРМ с учетом упругости и особенностей кинематических пар для определения всех компонент реакций и реактивных моментов в кинематических парах различного класса ПРМ.

Литература

- 1 Шапошников Н.Н. и др. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. - М.:Машиностроение, 1991.-333с.
- 2 Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / под ред. А.Ф.Смирнова. - М.: Стройиздат, 1992 - 448с.
- 3 Темирбеков Е.С. Кинематическое и силовое исследования механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев: дисс ... д-ра техн. наук.-Алматы, 1996.

Қорытынды

Төрт звенолы жазық механизмнің ерекше жағдайлары үшін қозғалыс берілісі беріліс бұрышы синусының мәні арқылы бағаланады. II класты алты звенолы жазық механизмдер үшін, жалпы алғанда, барлық II класты көп звенолы жазық механизмдер үшін де дәл осындай амал қолданылады. Алайда, өзгермелі тұйық контурлы алты звенолы механизмдер, яғни жоғары класты механизмдер (ЖКМ) үшін қозғалыс берілісінің қабілеттілігін бағалауға беріліс бұрыштарының берілуі жеткіліксіз болады. Мұнда

III және IV класты алты звенолы ЖКМ үшін қозғалыс пен күштер берілісін бағалайтын көрсеткіштер алынған.

Summary

For flat lever mechanisms the technique of application of a method of final rod elements (МКЭ) is known. However for spatial lever mechanisms (ППМ) standard approach МКЭ is not necessary by virtue of lines of the reasons. In clause (article) the non-standard approach in application to power (force) analysis ППМ is stated to a method of final rod elements. As unknown problems (tasks) МКЭ it is offered to accept movings of units not as it is accepted traditionally - in global system of coordinates, and in local systems of coordinates of units; and also in kinematic pairs are differently modelled.