

Е.С. ТЕМИРБЕКОВ, д-р техн. наук, проф.
(Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан)

АНАЛИЗ ЖЕСТКОСТИ И СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для плоских рычажных механизмов (РМ) методика применения метода конечных стержневых элементов известна [1–3]. Однако для пространственных РМ стандартный подход МКЭ не годится из-за ряда причин. Здесь изложен нестандартный подход в применении к жесткостному и силовому анализу пространственных РМ (ПРМ) методом конечных стержневых элементов (МКЭ).

Нестандартное отличие заключается в том, что в качестве неизвестных задачи МКЭ предлагается принять перемещения узлов не как принято традиционно — в глобальной системе координат (ГСК), а в локальных (ЛСК) узлов. Также — нестандартным подходом при моделировании кинематических пар (локальных граничных условий) — названным методикой «жестких» узлов.

Основная система уравнений МКЭ в ЛСК

Пусть $U_i = (u_1^i, \dots, u_6^i)^T$, $\bar{U}_i = (\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_6^i)^T$, $F_i = (f_1^i, \dots, f_6^i)^T$, $\bar{F}_i = (\bar{f}_1^i, \dots, \bar{f}_6^i)^T$, $(i=1, \dots, m)$ — векторы перемещений i -того узла и внешних сил, приложенных к i -тому узлу, соответственно в ГСК $OXYZ$ и в ЛСК $O_i x_i y_i z_i$ i -того узла, m — общее число узлов в КЭМ (рис. 1).

Пусть $[T_i^o]$ — матрица направляющих косинусов ЛСК $O_i x_i y_i z_i$ i -того узла относительно ГСК $OXYZ$. Тогда для i -того узла $U_i = [T_i] \bar{U}_i$, $F_i = [T_i] \bar{F}_i$, $\bar{U}_i = [T_i]^T U_i$, $\bar{F}_i = [T_i]^T F_i$, $i=1, \dots, m$, где $[T_i]$ переводит узловые векторы из ЛСК i -того узла в ГСК и имеет вид:

$$[T_i] = \begin{bmatrix} T_i^o & O \\ O & T_i^o \end{bmatrix}, i=1, \dots, m.$$

Так как $[T_i^o]$ является матрицей вращения, то $[T_i^o]^T = [T_i^o]^{-1}$, тогда $[T_i]$ также ортогональна:

$$[T_i]^T [T_i] = [T_i] [T_i]^T = [E], \text{ или } [T_i]^T = [T_i]^{-1}. \quad (1)$$

Пусть U — вектор перемещений всех узлов конечно-элементной модели (КЭМ) и F — вектор внешних узловых сил в ГСК $OXYZ$:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m)^T = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T, \quad F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T, \quad (2)$$

где N — количество степеней свободы системы или неизвестных. Аналогично в ЛСК узлов:

$$\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m)^T = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)^T, \quad \bar{F} = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m)^T = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_N)^T, \quad (3)$$

подвекторами которых являются векторы перемещений и внешних сил отдельных узлов в соответствующих ЛСК. Тогда (2) и (3) связаны следующим образом:

$$U = [T] \bar{U}, \quad F = [T] \bar{F}, \quad \bar{U} = [T]^T U, \quad \bar{F} = [T]^T F, \quad (4)$$

где матрица преобразования $[T]$ имеет вид: $[T] = \begin{bmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m \end{bmatrix}$.

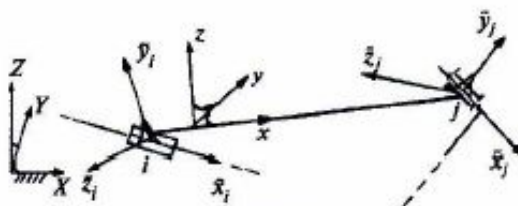


Рис. 1

Покажем, что матрица $[T]$ является ортогональной.

$$[T]^T [T] = \begin{bmatrix} T_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^T T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2^T T_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_n^T T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E \end{bmatrix} = [E].$$

Следовательно, для $[T]$ также выполняется (1): $[T]^T [T] = [T][T]^T = [E]$, или $[T]^T = [T]^{-1}$.
Основная система линейных уравнений МКЭ имеет вид:

$$[K]U = F. \tag{5}$$

Преобразуем уравнение (5) следующим образом: $[T]^T [K]U = [T]^T F$.

Очевидно, оно эквивалентно: $[T]^T [K][E]U = [T]^T F$ или $[T]^T [K][T][T]^T U = [T]^T F$.

Используя (4), последнее выражение можем записать в виде: $[T]^T [K][T] \hat{U} = \hat{F}$.

$[\hat{K}] = [T]^T [K][T]$ — матрица жесткости системы КЭМ в ЛСК узлов. Таким образом, (5)

эквивалентно уравнению

$$[\hat{K}] \hat{U} = \hat{F}, \tag{6}$$

которое является уравнением равновесия конструкции в ЛСК узлов, и вместо решения уравнения (5) нужно искать решение уравнения (6). Следовательно, предлагаемый подход рассмотрения основной системы МКЭ не в ГСК, а в ЛСК узлов является корректным.

Учет кинематических пар методикой «жестких» узлов

Обычно используется стандартный способ учета кинематических соединений. Он является апробированным подходом моделирования шарниров в МКЭ и пригоден для расчета стержневых систем с вращательными и поступательными парами с взаимно параллельными или перпендикулярными осями. В [3] предложен другой способ, названный методикой «жестких» узлов. Основная идея заключается в том, что шарнирные узлы моделируются в виде комбинации двух или более жестких узлов, расположенных в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы. При этом вводятся дополнительно новые неизвестные — в виде углов поворота торцевого сечения конечных стержневых элементов (КСЭ) относительно оси шарнира. Следовательно, порядок основной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) равновесия МКЭ увеличится на число этих дополнительных неизвестных, но зато значительно упростится схема учета шарнирных соединений. С точки зрения моделирования основной идеей является включение уравнений (8) в СЛАУ МКЭ как независимых и ее решение, порядок которой таким образом увеличен на число КСЭ, примыкающих к шарнирам.

Кратко приведем основные моменты этого подхода. Кроме жестких и шарнирных узлов вводятся так называемые жесткошарнирные узлы. На рис. 2 а, б показаны примеры жестких узлов, в, г — полных шарнирных узлов, а на рис. 2 д, е, ж, з — примеры жесткошарнирных

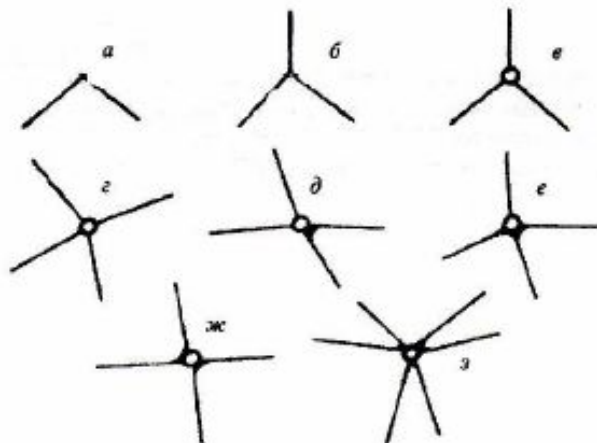


Рис. 2

узлов. Для таких узлов известные методы учета шарнирных соединений оказались на практике трудно применимыми. Например, в узле (рис. 2, ж) на концах элементов 1, 2 и 3, 4 соответственно возникают два разных по значению изгибающих момента и соответственно два угла поворота относительно оси вращения шарнира: общий угол поворота торцевых сечений жестко соединенных 1-го и 2-го КСЭ и общий угол поворота торцевых сечений 3-го и 4-го КСЭ. Узлы вида д, е, ж, з называются сложными шарнирами и определено для них число степеней свободы W . Очевидно, в общем случае сложные шарниры представляют собой категорию узлов, в которых шарнирно соединяются n групп стержней, каждая из которых состоит из $k_i, i = 1, \dots, n$ жестко связанных КСЭ. Тогда все остальные виды узловых соединений являются частными случаями сложного шарнира. Очевидно, внутри каждой группы в торцевых сечениях КСЭ возникают одинаковые изгибающие моменты и одинаковые угловые повороты вокруг оси шарнира. Т.е. по шарнирной степени свободы (вращение вокруг оси шарнира) каждая жесткая группа имеет свои компоненты перемещения узла и вектора реакций. Остальные пять компонент этих векторов одинаковы для всех групп, так как по этим степеням свободы передаются реакции между всеми стержнями, входящими в узел. Из данных рассуждений можем сделать вывод: любой шарнирный узел можно представить в виде комбинации нескольких жестких узлов, расположенных в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы. Число степеней свободы W сложного шарнира, соединяющего n жестких групп стержневых элементов:

$$W = 5 + n. \quad (7)$$

Учет дополнительных перемещений и усилий, возникающих в сложных узлах, естественно означает введение дополнительных неизвестных задачи. Остановимся на этом вопросе подробнее. Если применить формулу (7) для узлов, в которые шарнирно входит хотя бы два одиночных стержня, то получим «лишние» степени свободы — повороты торцевых сечений стержней. Например, узел на рис. 2, д получит не 5, а 8 степеней свободы. Обычно [2] в число неизвестных перемещений стержневой системы не вводятся углы поворота сечений стержней, примыкающих к шарнирным узлам, хотя эти угловые перемещения так же неизвестны, как и углы поворота жестких узлов. Во-первых, потому что это приведет к увеличению числа неизвестных и, следовательно, количества уравнений равновесия. Во-вторых, потому что это перемещение является линейно зависимым от остальных компонент перемещений данного стержневого элемента:

$$f_i = k_{i1} \delta_1 + \dots + k_{iN} \delta_N + \dots + k_{i,12} \delta_{12} = 0, \quad (8)$$

где f_i — реакция по рассматриваемой i -той степени свободы, т.е. изгибающий момент, равный нулю; k_{ij} — элементы i -той строки МЖ КСЭ; δ_j — компоненты перемещений КСЭ.

Предлагаемый подход означает включение указанных углов поворота в число неизвестных перемещений вследствие введения «лишних» степеней свободы шарниров. При этом все узлы КЭМ конструкции считаются жесткими. Т.е. вместо исключения линейно зависимых уравнений из основной СЛАУ эти «лишние» уравнения вводятся и решаются вместе со всеми.

Моделирование кинематических пар ПРМ

Для моделирования пространственных кинематических пар применим метод жестких узлов, изложенный выше. Согласно этому методу, кинематическая пара 5-го класса представляется в виде комбинации двух или более жестких узлов, находящихся в одной точке и имеющих 5 общих степеней свободы.

В общем случае для произвольной пространственной кинематической пары количество общих степеней свободы входящих в нее узлов, очевидно, равно числу накладываемых связей W' , т.е. классу кинематической пары. Будем рассматривать кинематические пары, для которых $3 \leq W' \leq 5$. Определим число степеней свободы W (в смысле МКЭ) кинематической пары, состоящей из k жестких узлов. Аналогично (7):

$$W = W' + k(6 - W'). \quad (9)$$

Тогда формулы для определения количества степеней свободы N всей конструкции ПМВК имеют вид:

$$N = 6n_{ж} + \sum_{i=1}^{n_{кп}} (6k_i - W'_i(k_i - 1)) - n_r, \quad (10)$$

где $n_{ж}$ — количество жестких узлов, $n_{кп}$ — количество кинематических пар; n_r — количество степеней

свободы, по которым отсутствуют перемещения, т.е. наложены граничные условия; k_i ($i = 1, \dots, n_w$) — количество жестких узлов, входящих в i -тую кинематическую пару; W_i' ($i = 1, \dots, n_w$) — класс i -той кинематической пары. Таким образом, при составлении КЭМ ПРМ любая кинематическая пара представляется в виде комбинации из k узлов, находящихся в одной точке и имеющих W' общих степеней свободы; где k — количество жестких групп стержневых элементов, соединенных в этом шарнире, а W' — класс кинематической пары. Для каждого положения ПРМ необходимо задать ориентацию всех кинематических пар с помощью углов α, β, γ между ЛСК, связанными с кинематическими осями и осями ГСК Ox, Oy, Oz .

Количество осей S кинематических пар зависит от вида пары: вращательная, поступательная и цилиндрическая имеют только одну ось S , совпадающую с направлением поступательного движения или с осью вращения элементов кинематической пары. Сферический шарнир не имеет оси, так как в нем отсутствуют изгибающие моменты относительно любой оси. Сферический шарнир с «пальцем» имеет две шарнирные оси — S_1 и S_2 , совпадающие с осью «пальца» и прямой, проходящей через центр шарнира перпендикулярно касательной к профилю направляющей прорези «пальца». Для каждого узла КЭМ ПРМ необходимо построить ЛСК $Oxuz$ с центром в этом узле. ЛСК одиночных узлов (т.е. не входящих в какой-либо шарнир) и узлов сферического шарнира можно выбрать произвольно, ввиду произвольной ориентации степеней свободы данных узлов. Поэтому оси ЛСК таких узлов направим параллельно осям ГСК $OXYZ$. ЛСК узлов, образующих кинематические пары 4-го и 5-го класса с одной кинематической осью S , построим таким образом, чтобы ось Ox совпадала с осью S , а оси Oy и Oz направим произвольно, разумеется, чтобы тройка $Oxuz$ была правой прямоугольной. Для узлов сферического шарнира с «пальцем» ось Ox направим по оси «пальца» S_1 , а ось Oy — по оси S_2 , проходящей через центр шарнира перпендикулярно касательной к профилю направляющей прорези. Очевидно, узлы одного шарнира имеют одну общую ЛСК, поэтому термин «ЛСК шарнира» означает ЛСК входящих в него жестких узлов. В таблице приведены виды кинематических пар, используемые в ПРМ, ориентация их ЛСК в пространстве, а также отсутствующие (нулевые) компоненты вектора реакций. Помимо координат шарнира и расположения шарнирных осей для каждой кинематической пары необходимо указать шарнирные степени свободы. Т.е. для узлов каждого шарнира нужно задать информацию о том, какие степени свободы в ЛСК узлов являются общими и какие шарнирными. Это осуществляется тем же способом, что и в методе жестких узлов, описанном в п. 5.2. Отличие состоит лишь в том, что каждая строка матрицы ID задается не в ГСК, а в ЛСК соответствующего узла. Т.е. элементы i -той строки описывают перемещения и углы поворота i -того узла в его ЛСК.

Особенности МКЭ при силовом анализе ПМВК. Принцип построения МЖС и порядок вычисления МЖС КСЭ, изложенный в [1], остаются без изменений. Алгоритм силового расчета дополняется лишь процедурой преобразования МЖС КСЭ $[K_r^s]$, $s = 1, \dots, n$ (n — количество стержневых элементов) из ГСК $OXYZ$ в ЛСК начального и конечного узлов КСЭ. Опишем эту процедуру более подробно. Вычисление МЖС s -того КСЭ $[K_r^s]$, $s = 1, \dots, n$ производится по известным формулам [1] в ЛСК s -того КСЭ. Затем МЖС $[K_r^s]$ преобразовывается в МЖС $[K_r^s]$ в ГСК $OXYZ$. Пусть i, j — номера начального и конечного узлов КСЭ s , $s = 1, \dots, n$. В этих узлах имеем местные ЛСК $O_i xuz$ и $O_j xuz$ с матрицами направляющих косинусов $[T_i^o]$ и $[T_j^o]$ вида (2). Построим матрицу $[T^s]$ вида:

$$[T^s] = \begin{bmatrix} T_i^o & O & O & O \\ O & T_j^o & O & O \\ O & O & T_i^o & O \\ O & O & O & T_j^o \end{bmatrix} \quad (11)$$

Очевидно, $[T^s]$ является матрицей преобразования для КСЭ из ГСК в ЛСК узлов i и j . Рассмотрим уравнение равновесия s -того КСЭ в ГСК:

$$[K_r^s] U^s = F^s, \quad (12)$$

где U^s и F^s — векторы перемещений и внешних усилий КСЭ s в ГСК:

$$\begin{aligned} U^s &= (U_i, U_j)^T = (u_1^i, \dots, u_6^i, u_1^j, \dots, u_6^j)^T; \\ F^s &= (F_i, F_j)^T = (f_1^i, \dots, f_6^i, f_1^j, \dots, f_6^j)^T, \end{aligned} \quad (13)$$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Название кинематической пары	Условные обозначения	Нулевые усилия	Направления осей ЛСК $OxOyOz$
Вращательная, 5-й класс		M_x	Ox — вдоль оси вращения Oy — перпендикулярно Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
Поступательная, 5-й класс		N_x	Ox — вдоль направления движения ползуна Oy — перпендикулярно Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
Цилиндрическая, 4-й класс		N_x M_x	Ox — вдоль оси вращения Oy — перпендикулярно Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
Сферическая с «пальцем», 4-й класс		M_x M_y	Ox — вдоль оси «пальца» Oy — перпендикулярно плоскости прорези Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
Сферическая, 3-й класс		M_x M_y M_z	Ox — произвольно Oy — перпендикулярно Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy

$[T^S]$ является ортогональной, поэтому для (12) можно произвести аналогичные (5) и (6) преобразования, в результате которых получим уравнение равновесия s -того элемента:

$$[K^S]U^S = F^S; \quad (14)$$

в местных системах координат i -того и j -того узлов, где

$$[K^S] = [T^S]^T [K_r^S] [T^S] - \text{МЖ } s\text{-того КСЭ в ЛСК } i\text{-того и } j\text{-того узлов.} \quad (15)$$

Таким образом, перевод МЖ КСЭ $[K_r^S]$, $s = 1, \dots, n$, в ЛСК узлов производится по формуле (15).

Построение МЖ КЭМ $[K]$ из полученных МЖ КСЭ $[K^S]$ выполняется известным способом [1]. Процедура решения системы уравнений равновесия также не меняется. Небольшое дополнение вносится на этапе вычисления усилий в КСЭ. После решения основной системы уравнений и определения узловых перемещений \bar{U} необходимо для каждого s -того КСЭ выполнить преобразование вектора перемещений U^S КСЭ из ЛСК узлов в ГСК:

$$U^S = [T^S] \bar{U}. \quad (16)$$

Показана эквивалентность рассмотрения основной разрешающей системы МКЭ в ГСК и ЛСК узлов. Эквивалентность рассмотрения основной разрешающей системы МКЭ в ГСК и ЛСК узлов позволила разработать методику анализа конструкций ПРМ с учетом упругости и особенностей кинематических пар для определения всех компонент реакций и реактивных моментов в кинематических парах различного класса ПРМ.

Литература

1. Шапошников Н.Н. и др. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. — М.: Машиностроение, 1991. — 333 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / под ред. А.Ф.Смирнова. — М.: Стройиздат, 1992. — 448 с.
3. Темирбеков Е.С. Некоторые аспекты анализа и синтеза механизмов высоких классов. — Астана: ЕНУ Ақмолинский ЦНТИ, 2006. — 299 с.

© Е.С. Темирбеков, 2007