

ДИНАМИКА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТОПОЛОГИИ (АНАЛИЗ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ). МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Темирбеков Е.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева,
Астана, Казахстан

Бұл жұмыста рычақты механизмдер динамикасының кеңістіктік топологиясы қарастырылған. Моделдеу.

Space arrangement of lever mechanism dynamics and elastic vibrations analysis is considered in this article. Modeling.

В [1] получены уравнения модели рычажного механизма (PM):

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R, \quad (1)$$

где M , C и K - соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости; R - вектор внешней узловой нагрузки; U , \dot{U} и \ddot{U} - векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений конечно-элементной модели

Выражение (1) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, и в принципе ее решение может быть получено с помощью стандартных процедур решения дифференциальных уравнений [1-3]. Однако эти процедуры становятся неэффективными при больших порядках матриц.

Алгоритмы, используемые для практических динамических расчетов методом конечных элементов (МКЭ), делятся на две группы: разложения по собственным формам и прямого интегрирования. Прямое численное интегрирование основано на двух идеях. Во-первых, удовлетворение условий равновесия требуется не в любой момент времени t , а только в дискретных точках временного интервала. Во-вторых, учитывается изменение

перемещений, скоростей и ускорений внутри каждого временного интервала Δt . Термин "прямое" означает, что перед интегрированием не производится никаких преобразований уравнений. Количество арифметических операций при прямом интегрировании прямо пропорционально количеству временных шагов, порядку и ширине полуленты матриц K , M и C . С помощью оптимальной нумерации узлов конечно-элементной модели можно уменьшить ширину ленты только до определенных пределов.

Метод разложения по собственным формам позволяет уменьшить количество операций путем предварительного приведения уравнений равновесия (1) к более эффективной для интегрирования форме. Основная идея метода заключается в получении новых матриц \tilde{K} , \tilde{M} и \tilde{C} (имеющих меньшую ширину ленты, чем K , M и C) и переходе от перемещений U к обобщенным координатам X с помощью матрицы преобразования P . Эффективная матрица преобразования определяется через решение общей проблемы собственных значений

$$K\varphi = \omega^2 M\varphi, \quad (2)$$

имеющей n решений (ω_i^2, φ_i) , $i=1, \dots, n$. Здесь φ_i - вектор порядка n , называемый вектором i -ой собственной формы, а ω_i - соответствующее собственное значение. Уравнения (2) получают из уравнений свободных колебаний без учета демпфирования

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (3)$$

путем подстановки решения уравнений (3) в форме $U = \varphi \sin \omega(t-t_0)$, где ω - частота собственных колебаний, t_0 - начальная фаза. После решения (2) из векторов-столбцов φ_i составляется преобразующая матрица P .

Таким образом, основным отличием метода разложения по собственным формам от прямого интегрирования является необходимость смены базиса перед временным интегрированием, т.е. перехода от базиса координат конечных элементов к базису векторов проблемы (2). Так как математически n собственных векторов и n узловых перемещений конечных элементов являются базисами одного пространства, то оба метода дают одинаковые результаты. Следовательно, выбор метода определяется лишь соображениями эффективности.

Здесь объектами исследования являются стержневые системы конечных элементов, имеющие относительно небольшой порядок основной системы уравнений (1). Следовательно, упрощение процедуры расчета в данном случае более выгодно, чем сокращение количества арифметических операций. Поэтому здесь используем метод прямого интегрирования.

При прямом интегрировании предполагается, что векторы перемещений U_0 , скоростей \dot{U}_0 и ускорений \ddot{U}_0 в момент времени $t=0$ известны и необходимо найти решение (1) на интервале от 0 до T . Временной отрезок T разбивается на n равных интервалов $\Delta t = T/n$ и решения ищутся в моменты времени $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, T$. Причем решение в каждый последующий момент вычисляется с использованием решений, полученных на предыдущих шагах.

не требует выполнения специальной начальной процедуры, т.к. перемещения, скорости и ускорения для момента $t+\Delta t$ выражаются через те же самые величины, вычисленные для момента t .

Выражая $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ из второго уравнения (8) и подставляя в первое, получаем уравнения для $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ и $\dot{U}_{t+\Delta t}$ через неизвестный вектор перемещений $U_{t+\Delta t}$.

Уравнение равновесия (1) для момента $t+\Delta t$ имеет вид

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t}. \quad (9)$$

Выражения для $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ и $\dot{U}_{t+\Delta t}$ подставляются в (9) для нахождения $U_{t+\Delta t}$, после чего можно определить $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ и $\dot{U}_{t+\Delta t}$, используя (8). Ниже приводится пошаговое описание процедуры.

Алгоритм схемы Ньюмарка.

А. Начальные вычисления.

1. Формируются матрицы жесткости, масс и демпфирования. 2. Задаются начальные значения U_0 , \dot{U}_0 и \ddot{U}_0 . 3. Выбирается шаг Δt , α и β и вычисляются постоянные: $\delta \geq 0,5$; $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$;

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t.$$

4. Формируется эффективная матрица жесткости \hat{K} : $\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C$.

5. Матрица \hat{K} приводится к треугольному виду: $\hat{K} = LDL^T$.

Б. Для каждого временного шага: 1. Вычисляется эффективная нагрузка для момента $t+\Delta t$:

$$\hat{R}_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t) + C(a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t).$$

2. Находятся перемещения в момент $t+\Delta t$: $LDL^T U_{t+\Delta t} = \hat{R}_{t+\Delta t}$. 3.

Вычисляются ускорения и скорости для момента $t+\Delta t$: $\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0(U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t$, $\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_{t+\Delta t}$.

Конечно-элементная модель механизма. РМ IV класса (рис.1) с внешней поступательной парой пространственной топологии, моделируется КСЭ. Они связаны между собой жестко и вращательными парами. Каждое звено рассматривается как несколько последовательно соединенных КСЭ, имеющих одинаковое поперечное сечение по длине. Кривошип рассматривается как равномерно поворачиваемая консольная балка. Однако надо заметить, что это допущение сделано только для упрощения расчетов. Кинематика рассматриваемого механизма не выводится аналитически и поэтому не может быть напрямую учтена при выводе системы дифференциальных уравнений упругих колебаний конечно-элементной модели обычным путем - то есть учетом геометрических связей непосредственно в выражениях кинетической, потенциальной энергий и вектора обобщенной силы. Поэтому на каждом шаге

по времени предварительно решается кинематическая задача анализа положений, перемещений, скоростей и ускорений РМ с жесткими звеньями.

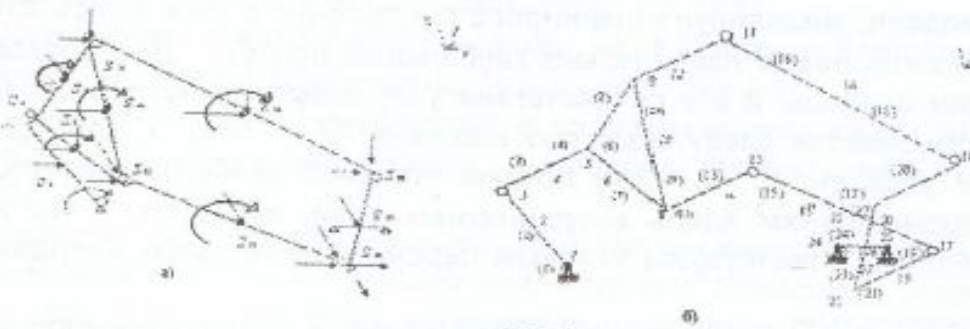


Рис.1

Зададим $\omega_1=100\text{с}^{-1}$ и $\varepsilon_1=0\text{с}^{-2}$ соответственно. Координаты стойки крепления кривошипа: $X_0=0.0, Y_0=0.0, Z_0=0.0$. Длины звеньев $L_{1-3}=0.17\text{м}$, $L_{5-8}=0.17\text{м}$, $L_{8-9}=0.20\text{м}$, $L_{8-9}=0.258\text{м}$, $L_{13-17}=0.39\text{м}$, $L_{14-18}=0.50\text{м}$, $L_{21-23}=0.10\text{м}$, $L_{22-23}=0.10\text{м}$, $L_{23-24}=0.05\text{м}$, $L_{24-24}=0.05\text{м}$. Звенья движутся в плоскостях, параллельных глобальной плоскости OXZ. Длины осей, соединяющих звенья $L_{3-5}=0.02\text{м}$, $L_{8-13}=0.02\text{м}$, $L_{9-14}=0.02\text{м}$, $L_{17-21}=0.02\text{м}$, $L_{18-22}=0.02\text{м}$. Ориентация осей вращательных пар - параллельно оси OY. Обозначение L_{i-j} означает звено, ось или их часть и соответственно длину с началом в узле i и концом в узле j .

Для каждого расчетного положения механизма проводим анализ перемещений, скоростей и ускорений узлов конечно-элементной модели (КЭМ). Сечения всех звеньев и осей примем прямоугольными и равными по ширине 0.01м и по высоте 0.02м . В

сосредоточении масс приложены также силы веса и инерции [6,7] звеньев и осей вращения.

КЭМ состоит из 26-ти конечных стержневых элементов (КСЭ), соединенных 25-ю узлами. Упругие характеристики $E=2 \cdot 10^{11}$ [Па], $\mu=0.3$, $\rho=7850$ [кг/м³] и соответствуют стали. Шаг по времени равен $\Delta t=0.0005235\text{с}$. Соответствие номеров узлов и КСЭ модели: КСЭ 1: узлы 1 и 2, КСЭ 2: узлы 2 и 3, КСЭ 3: узлы 3 и 4, КСЭ 4: узлы 4 и 5, КСЭ 5: узлы 5 и 6, КСЭ 6: узлы 5 и 7, КСЭ 7: узлы 6 и 8, КСЭ 8: узлы 7 и 9, КСЭ 9: узлы 8 и 10, КСЭ 10: узлы 9 и 10, КСЭ 11: узлы 8 и 11, КСЭ 12: узлы 9 и 12, КСЭ 13: узлы 11 и 13, КСЭ 14: узлы 12 и 14, КСЭ 15: узлы 13 и 15, КСЭ 16: узлы 14 и 16, КСЭ 17: узлы 15 и 17, КСЭ 18: узлы 16 и 18, КСЭ 19: узлы 17 и 19, КСЭ 20: узлы 18 и 20, КСЭ 21: узлы 19 и 21, КСЭ 22: узлы 20 и 22, КСЭ 23: узлы 21 и 23, КСЭ 24: узлы 22 и 23, КСЭ 25: узлы 23 и 24, КСЭ 26: узлы 23 и 25.

На рис.1б глобальные перемещения КЭМ пронумерованы так, чтобы описать деформацию механизма и обеспечить совместность между КСЭ в узлах с учетом наличия в некоторых из них вращательных пар. Например, для узла 3 глобальные степени свободы U_{13} , U_{14} , U_{15} используются для описания глобальных узловых линейных смещений. Два других независимых перемещения U_{16} , U_{18} необходимы в узле 3 для описания его угловых перемещений (углов поворота) относительно глобальных осей OX и OZ.

Угловое перемещение U_{17} в узле 3 относительно глобальной оси OY отсутствует. Его исключение из общего числа степеней свободы конечно-элементной модели, моделирует шарнирное соединение в узле 3, ось которого постоянно ориентирована параллельно глобальной оси OY . Для определения номера степени свободы и его соответствия узлу конечно-элементной модели механизма применяется следующее соотношение: $N_i = 6 * n_u - i$, ($i=0,1,2,3,4,5$), где n_u - номер узла; n_5, n_4, n_3 - эти номера степеней свободы соответствуют линейным перемещениям вдоль координатных осей; n_2, n_1, n_0 - эти номера степеней свободы соответствуют угловым перемещениям вдоль координатных осей.

На рис.2 показаны графики упругих линейных и угловых колебаний узлов 5,16 КЭМ механизма относительно положений, которые они занимали бы, если рассматривать модель механизма с жесткими звеньями.

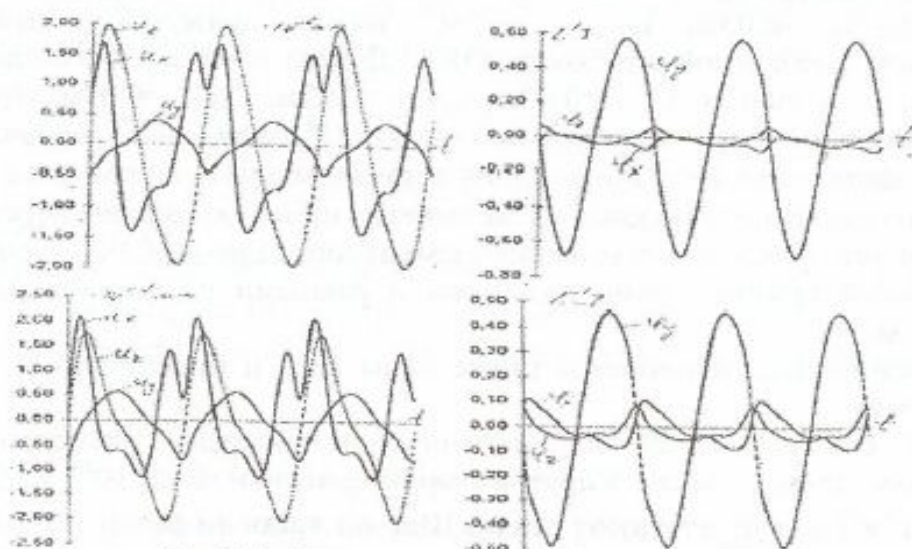


Рис.2 Глобальные упругие колебания узлов 15,16

Литература:

1. K.J.Bathe "Soluton Methods of Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering" Report UC SEM 71-20, Civil Engineering Departament, University of California
2. K.J.Bathe, L.Wilson "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis" ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 98, 1982, pp.1471-1485
3. K.J.Bathe, L.Wilson "Eigensoluton Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics" ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 99, 1983, pp.467-479

4. K.J.Bathe "Soluton Methods of Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering" Report UC SESM 71-20, Civil Engineering Departament, University of California, Berkeley, 1981
5. H.Rutishauser "Computational Aspekts of F.L.Bauer's Simultaneous Iteration Method" Numerical Mathematik, Vol.13, 1989, pp.4-13
6. Темирбеков Е.С. Кинематический и силовые исследования МВК с учетом упругости звеньев. Диссертация ... доктора технических наук. Алма-Ата, 1996г.
7. Темирбеков Е.С. Силовой и жесткостной анализ конструкций стержневых механизмов с учетом распределенной инерции. Доклады V Всероссийского семинара «Проблемы проектирования сооружений», СИБСТРИН, 7-8 апр 2005г. Новосибирск. С.362-366