Е.С. Темирбеков

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УЗЛОВЫЕ СИЛЫ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ СТЕРЖНЯ

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева

Сделать узловые силы статически эквивалентными дейсвующим распределенным нагрузкам состоит в задании виртуального узлового перемещения и приравнивании внешней и внутренней работ. Отсюда получают зависимость, являющуюся одной из основных характеристик конечного элемента:

$$\{F\}=\left(\int[B]^T[D][B]dV\right)\{\delta\}^T-\int[B]^T[D][B]dV \quad (1)$$

$[K]^e=\int[B]^T[D][B]dV$ - матрица жесткости КСЭ,

$\{F\}_p^e=-\int[B]^T[D][B]dV$ - узловые силы, обусловленные распределенными нагрузками.

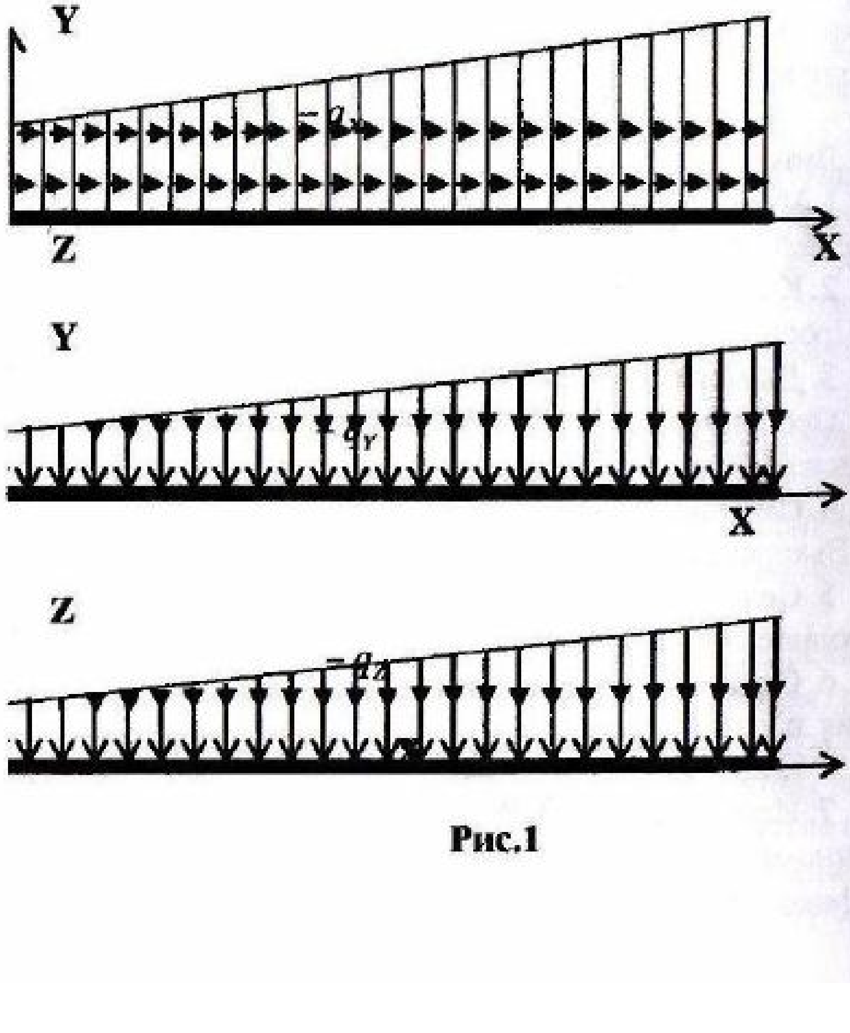

Рис.1

Пусть на стержневой конечный элемент (КСЭ) в пространстве действует распределенная нагрузка трапециидального вида (рис.1):

$$q_x(x) = a_x + b_x x; \quad q_y(x) = a_y + b_y x; \quad q_z(x) = a_z + b_z x;$$

Уравнения равновесия элемента КСЭ длиной dx при пространственном движении (рис.2):

$$\frac{dN}{dx} + q_x = \frac{dN}{dx} + a_n + b_n x = 0, \quad \frac{dM}{dx} + m = 0;$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + q_y = \frac{dQ_y}{dx} + a_y + b_y x = 0; \quad \frac{dM_z}{dx} - Q_y = 0;$$

$$\frac{dQ_z}{dx} + q_z = \frac{dQ_z}{dx} + a_z + b_z x = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - Q_z = 0$$

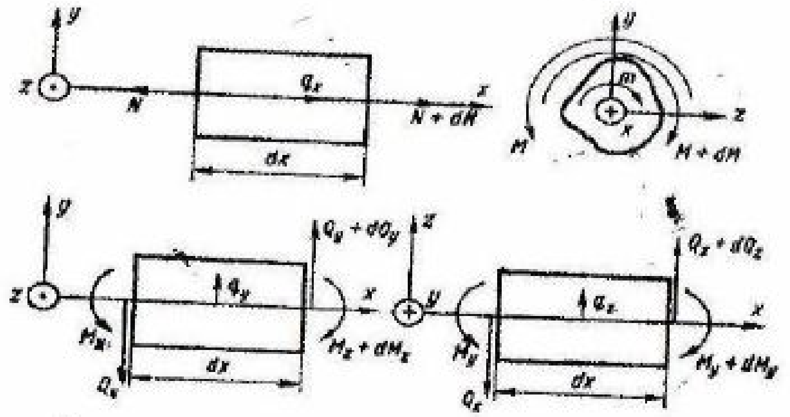

Рис.2

Если длина КСЭ равна l и заданы смещения $u_o, w_{yo}, w_{zo}, u_l, w_{yl}, w_{zl}$ и повороты $\varphi_o, \varphi_{yo}, \varphi_{zo}, \varphi_l, \varphi_{yl}, \varphi_{zl}$ в торцах КСЭ, то обобщенные перемещения равны:

$$u = u_o + (u_l - u_o)\frac{x}{l} + \frac{a_x x}{2EF}(x - l) - \frac{b_x x}{6EF}(x^2 - l^2),$$

$$\varphi = \varphi_o + (\varphi_l - \varphi_o)\frac{x}{l} + \frac{ml^2}{2GJ}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right);$$

$$w_z = \left(1 + \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2}\right)w_{z_o} + \frac{x^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{x}{l}\right)w_{zl} + x \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \varphi_{y_o} + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \cdot \frac{x^2}{l} \cdot \varphi_{yl}$$
$$+ \frac{a_z}{EJ_z} \cdot \frac{x^2}{24}(l - x)^2 + \frac{b_z}{EJ_z} \cdot \frac{x^2}{120} \cdot \left(2l^3 - 3l^2 x + x^3\right)$$

Тогда внутренние силовые факторы, возникающие в торцевых сечениях КСЭ, будут равны:

$$N_o = EF\left[\frac{u_l - u_o}{l} + \frac{a_n l}{2EF} + \frac{b_n l^2}{2EF}\right]$$

$$N_l = EF\left[\frac{u_l - u_o}{l} - \frac{a_n l}{2EF} - \frac{b_n l^2}{2EF}\right]$$

$$Q_{yo} = -\frac{6EJ_z}{l^3}(2w_{yo} + l\varphi_{zo} - 2w_{yl} + l\varphi_{zl}) + \frac{a_y l}{2EJ_z} + \frac{3b_y l^2}{20EJ_z}$$

$$Q_{yl} = -\frac{6EJ_z}{l^3}(2w_{yo} + l\varphi_{zo} - 2w_{yl} + l\varphi_{zl}) - \frac{a_y l}{2EJ_z} - \frac{7b_y l^2}{20EJ_z}$$

$$Q_{zo} = -\frac{6EJ_y}{l^3}(2w_{zo} + l\varphi_{yo} - 2w_{zl} + l\varphi_{yl}) + \frac{a_z l}{2EJ_y} + \frac{3b_z l^2}{20EJ_y}$$

$$Q_{zl} = -\frac{6EJ_y}{l^3}(2w_{zo} + l\varphi_{yo} - 2w_{zl} + l\varphi_{yl}) - \frac{a_z l}{2EJ_y} - \frac{7b_z l^2}{20EJ_y}$$

$$M_{z0} = \frac{EJ_z}{l^2}(6w_{yo} + 4l\varphi_{zo} - 6w_{yl} + 2l\varphi_{zl}) - \frac{a_y l^2}{12EJ_z} - \frac{b_y l^3}{30EJ_z}$$

$$M_{zl} = -\frac{EJ_z}{l^2}(6w_{yo} + 2l\varphi_{zo} - 6w_{yl} + 4l\varphi_{zl}) - \frac{a_y l^2}{12EJ_z} - \frac{b_y l^3}{20EJ_z}$$

$$M_{y0} = -\frac{EJ_y}{l^2}(-6w_{zo} + 4l\varphi_{yo} + 6w_{zl} + 2l\varphi_{zl}) - \frac{a_z l^2}{12EJ_y} - \frac{b_z l^3}{30EJ_y}$$

$$M_{yl} = -\frac{EJ_y}{l^2}(-6w_{zo} + 4l\varphi_{yo} + 6w_{zl} + 2l\varphi_{zl}) - \frac{a_z l^2}{12EJ_y} - \frac{b_z l^3}{20EJ_y}$$

$$M_o = \frac{GJ}{l}(\varphi_l - \varphi_o) + \frac{ml}{2} \quad M_l = \frac{GJ}{l}(\varphi_l - \varphi_o) - \frac{ml}{2}$$

Из сравнения внутренних и внешних силовых и геометрических факторов в КСЭ:

$$\varphi_{y0} = -\varphi_2^{ij}; \quad \varphi_{yl} = -\varphi_2^{ji};$$

$$N_0 = -R_{1N\xi}^{ij}; \quad Q_{y0} = -R_{2N\xi}^{ij}; \quad Q_{z0} = -R_{3N\xi}^{ij};$$

$$M_0 = -R_{1M\xi}^{ij}; \quad M_{y0} = -R_{2M\xi}^{ij}; \quad M_{zl} = -R_{3M\xi}^{ji};$$

остальные факторы совпадают.

Основное уравнение метода конечных элементов (МКЭ) для КСЭ:

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_\xi^{ij} \\ \vec{R}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{ij} & B_{12}^{ij} \\ B_{21}^{ij} & B_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}_\xi^{ij} \\ \vec{U}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{Q}^{ij} \\ \vec{Q}^{ji} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R}_\xi^{ij} = \left[R_{1N\xi}^{ij} R_{2N\xi}^{ij} R_{3N\xi}^{ij} R_{1M\xi}^{ij} R_{2M\xi}^{ij} R_{3M\xi}^{ij}\right]^T;$$

$$\vec{R}_\xi^{ji} = \left[R_{1N\xi}^{ji} R_{2N\xi}^{ji} R_{3N\xi}^{ji} R_{1M\xi}^{ji} R_{2M\xi}^{ji} R_{3M\xi}^{ji}\right]^T,$$

$$\vec{U}_\xi^{ij} = \left[u_1^{ij} u_2^{ij} u_3^{ij} \varphi_1^{ij} \varphi_2^{ij} \varphi_3^{ij}\right]^T \text{ и } \vec{U}_\xi^{ji} = \left[u_1^{ji} u_2^{ji} u_3^{ji} \varphi_1^{ji} \varphi_2^{ji} \varphi_3^{ji}\right]^T.$$

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix};$$

$$[B_{22}]=\begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}.$$

$$[B_{12}]=[B_{21}]^T=\begin{bmatrix} -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{E2I_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{E2I_z}{l} \end{bmatrix}.$$

Тогда из (1) видно, что вектор $[-\vec{Q}^{ij}-\vec{Q}^{ji}]$ – отвечает в эт векторном уравнении за эквивалентные узловые силы при распре ленной нагрузке КСЭ, где их найденные значения равны:

$$
\vec{Q}^{ij}=\begin{Bmatrix}
-\dfrac{a_n l}{2}-\dfrac{b_n l^2}{2}\\
-\dfrac{a_q^y l}{2}-\dfrac{3b_q^y l^2}{20}\\
-\dfrac{a_q^z l}{2}-\dfrac{3b_q^z l^2}{20}\\
\dfrac{ml}{2}\\
\dfrac{a_q^z l^2}{12}+\dfrac{b_q^z l^3}{30}\\
-\dfrac{a_q^y l^2}{12}-\dfrac{b_q^y l^3}{30}
\end{Bmatrix},\quad
\vec{Q}^{ji}=\begin{Bmatrix}
-\dfrac{a_n l}{2}-\dfrac{b_n l^2}{2}\\
-\dfrac{a_q^y l}{2}-\dfrac{7b_q^y l^2}{20}\\
-\dfrac{a_q^z l}{2}-\dfrac{7b_q^z l^2}{20}\\
-\dfrac{ml}{2}\\
-\dfrac{a_q^z l^2}{12}-\dfrac{b_q^z l^3}{30}\\
\dfrac{a_q^y l^2}{12}+\dfrac{b_q^y l^3}{30}
\end{Bmatrix}
$$

Подобным алгоритмом можно произвести эквивалентную замену и для часто встречающейся распределенной нагрузки параболического вида и вообще для распределенной нагрузки произвольного вида.