УДК 621.01+621.9.06-529

Е.С. Темирбеков
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

РАВНОВЕСИЕ КОНЕЧНОГО СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

В механике машин инерция движения стержневых звеньев учитывается обычно приведением к центру масс в виде главного вектора сил и главного момента пар сил, а центр масс входит в конечно-элементную модель конструкции механизма в качестве узла [1]. Можно создать более точные конечно-элементные модели, аналитически учитывающие распределенную инерцию движения.

Рассмотрим сначала плоскопараллельное движение звена k в неподвижной системе $OXYZ$ (рис. 1). В точке O введем подвижную систему координат $OX'Y'Z'$, положение которой определяется углом θ_k. Сначала в P_k, связывающее k-тое звено с ($k-1$)-м, введем две локальные системы координат $P_kX_kY_kZ_k$, перемещающиеся вместе со связанным шарниром и с осями, остающимися соответственно параллельными к осям системы координат $OXYZ$, а также $P_kX'_kY'_kZ'_k$, жестко связанную со звеном k.

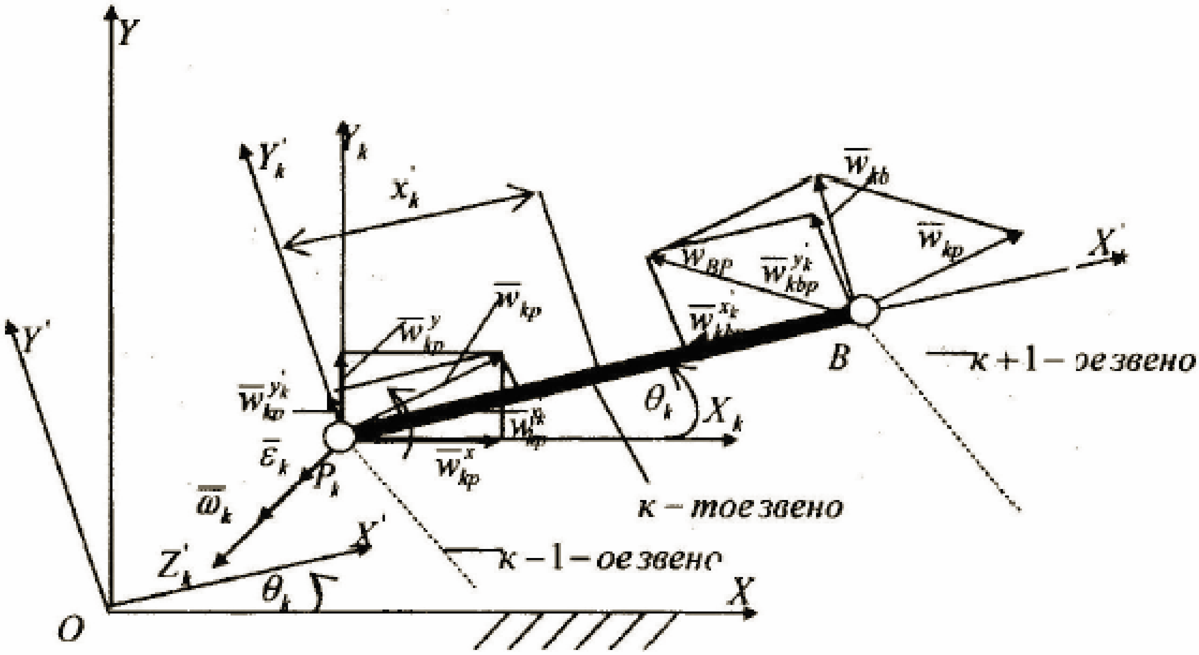

Рис. 1

Пусть k-тое звено механизма с постоянным сечением движется плоскопараллельно относительно OXY. И пусть в каком-то мгновенном положении механизма известны θ_k, компоненты ускорения $\overline{w}_{kp}^{x}$ и $\overline{w}_{kp}^{y}$ точки P_k звена k относительно неподвижной системы координат OXY, $\overline{\omega}_k$, $\overline{\varepsilon}_k$ – угловые скорость и ускорение звена k с направлениями, как показано на рисунке. Тогда

$$\begin{Bmatrix} w_{kp}^{x'} \\ w_{kp}^{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x} \\ w_{kp}^{y} \end{Bmatrix}.$$

Ускорение точки B k-го звена складывается из ускорения точки P_k и ускорения точки B в ее вращении вместе со звеном вокруг этого полюса. Вектор $\overline{w}_{kbp}^{y_k}$ направлен перпендикулярно к оси звена, $\overline{w}_{kbp}^{x_k}$ всегда направлен от точки B к полюсу P_k. Компоненты ускорения точки B относительно системы координат $OX'Y'$ в матричной форме имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} w_b^{x_k'} \\ w_b^{y_k'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x_k'} \\ w_{kp}^{y_k'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_{kbp}^{x_k'} \\ w_{kbp}^{y_k'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x} \\ w_{kp}^{y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -l_k\omega_k^2 \\ l_k\varepsilon_k \end{Bmatrix}.$$

Если поперечные сечения вдоль звена постоянные, тогда силу тяжести звена можно рассматривать как равномерно распределенную нагрузку по длине звена с интенсивностью $q_{cb}^{k}=\gamma_k A_k$, где γ_k – удельный вес материала, A_k – площадь поперечного сечения звена k. Из-за необходимости дальнейшего расчета звена эту нагрузку разложим по двум направлениям:

$$\begin{Bmatrix} q_{cb}^{x_k^{'}} \\ q_{cb}^{y_k^{'}} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -q_{cb}^{k} \end{Bmatrix}.$$

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки, действующей перпендикулярно к оси звена, возникающей от ускорения $\overline{w}_{kp}^{y_k^{'}}$, равна $q_n^{y_k^{'}}=-\dfrac{\gamma_k A_k}{g}\overline{w}_{kp}^{y_k^{'}}$ и направлена противоположно направлению $\overline{w}_{kp}^{y_k^{'}}$. От угловой скорости $\overline{\omega}_k$ вращательного движения звена k вокруг полюса P_k возникают распределенные нагрузки треугольного вида с интенсивностью $q_b^{x_k^{'}}=\dfrac{\gamma_k A_k}{g}\omega_k^2 x_k^{'}$, действующие вдоль оси звена, всегда направленные по оси $x_k^{'}$ от оси вращения. От углового ускорения вращательного движения звена k вокруг оси $Z_k^{'}$ возникают распределенные нагрузки треугольного вида с интенсивностью $q_b^{y_k^{'}}=-\dfrac{\gamma_k A_k}{g}\varepsilon_k x_k^{'}$. Эти нагрузки всегда действуют перпендикулярно к оси звена и направлены противоположно к направлению вектора $\overline{\varepsilon}_k\times\overline{l}_k$.

Суммируя нагрузки, действующие по оси $Y_k^{'}$, видим, что интенсивность суммарной нагрузки меняется по длине звена по линейному закону:

$$q_y\left(x_k^{'}\right)=a_{kq}+b_{kq}x_k^{'};$$

где $a_{kq}=-\gamma_k A_k\cos\theta_k-\dfrac{\gamma_k A_k}{g}w_{kp}^{y_k^{'}}$, $\quad b_{kq}=-\dfrac{\gamma_k A_k}{g}\varepsilon$

Аналогично суммируя нагрузки, действующие вдоль оси звена (по $X_k^{'}$), видно, что их интенсивность также меняется вдоль звена по линейному закону и выражается с помощью следующего уравнения:

$$q_x\left(x_k^{'}\right)=a_{kn}+b_{kn}x_k^{'};\ a_{kn}=-\gamma_k A_k\sin\theta_k-\frac{\gamma_k A_k}{g}w_{kp}^{x_k^{'}},\ b_{kn}=\frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_k^2.$$

Таким образом, интенсивности сил инерции и тяжести звена имеют вполне определенное аналитическое выражение. Используя их и метод конечных стержневых элементов (МКЭ), основанный на прямолинейном однородном стержне [1–3], получим более точные для исследования кинетостатики рычажных механизмов конечно-элементные модели, аналитически учитывающие распределенную инерцию плоскопараллельного движения. Уравнения равновесия элемента стержня МКСЭ (рис. 2):

$$\frac{dN}{dx}+q_x=\frac{dN}{dx}+a_n+b_nx=0,$$
$$\frac{dQ_y}{dx}+q_y=\frac{dQ_y}{dx}+a_q+b_qx=0;\quad \frac{dM_z}{dx}-Q_y=0;$$
$$\frac{dQ_z}{dx}=0;\quad \frac{dM_y}{dx}-Q_z=0\qquad \frac{dM}{dx}=0 \tag{1}$$

Учитывая положительные направления внешних и внутренних геометрических и силовых факторов (рис. 2 и 3):

$$\varphi_{y0}=-\varphi_2^{ij};\quad \varphi_{yl}=-\varphi_2^{ji};$$
$$N_0=-R_{1N\xi}^{ij};\quad Q_{y0}=-R_{2N\xi}^{ij};\quad Q_{z0}=-R_{3N\xi}^{ij}; \tag{2}$$
$$M_0=-R_{1M\xi}^{ij};\quad M_{y0}=-R_{2M\xi}^{ij};\quad M_{z0}=-R_{3M\xi}^{ij};$$

а направления остальных факторов совпадают и, опуская промежуточные преобразования, получаем основные соотношения равновесия МКЭ для прямолинейного однородного стержневого элемента (рис. 3),

$$\begin{Bmatrix}\vec{R}_\xi^{ij}\\ \vec{R}_\xi^{ji}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}^{ij} & B_{12}^{ij}\\ B_{21}^{ij} & B_{22}^{ij}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{U}_\xi^{ij}\\ \vec{U}_\xi^{ji}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\vec{Q}^{ij}\\ \vec{Q}^{ji}\end{Bmatrix} \tag{3}$$

связывающие обобщенные реактивные силы $\vec{R}_\xi{}^{ij}=\left[R_{1N\xi}^{ij}R_{2N\xi}^{ij}R_{3N\xi}^{ij}R_{1M\xi}^{ij}R_{2M\xi}^{ij}R_{3M\xi}^{ij}\right]^T$, $\vec{R}_\xi{}^{ji}=\left[R_{1N\xi}^{ji}R_{2N\xi}^{ji}R_{3N\xi}^{ji}R_{1M\xi}^{ji}R_{2M\xi}^{ji}R_{3M\xi}^{ji}\right]^T$, действующие в узлах стержня с узловыми обобщенными перемещениями $\vec{U}_\xi^{ij}=\left[u_1^{ij}u_2^{ij}u_3^{ij}\varphi_1^{ij}\varphi_2^{ij}\varphi_3^{ij}\right]^T$ и $\vec{U}_\xi^{ji}=\left[u_1^{ji}u_2^{ji}u_3^{ji}\varphi_1^{ji}\varphi_2^{ji}\varphi_3^{ji}\right]^T$. Квадратные подматрицы $\left[B_{rq}^{ij}\right]$, $(r=1,2;\quad q=1,2)$ матрицы жесткости $\left[B^{ij}\right]$ стержневого элемента не изменяются [2, 3], а подвекторы $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$ получают вид (4). Таким образом, определены элементы (4) подвекторов $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$, аналитически учитывающие не только вес, но и распределенную инерцию плоскопараллельного движения звена стержневого механизма:

$$\vec{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{a_n l}{2} - \dfrac{b_n l^2}{2} \\ -\dfrac{a_q l}{2} - \dfrac{3b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{a_q l^2}{12} - \dfrac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{a_n l}{2} - \dfrac{b_n l^2}{2} \\ -\dfrac{a_q l}{2} - \dfrac{7b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{a_q l^2}{12} + \dfrac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

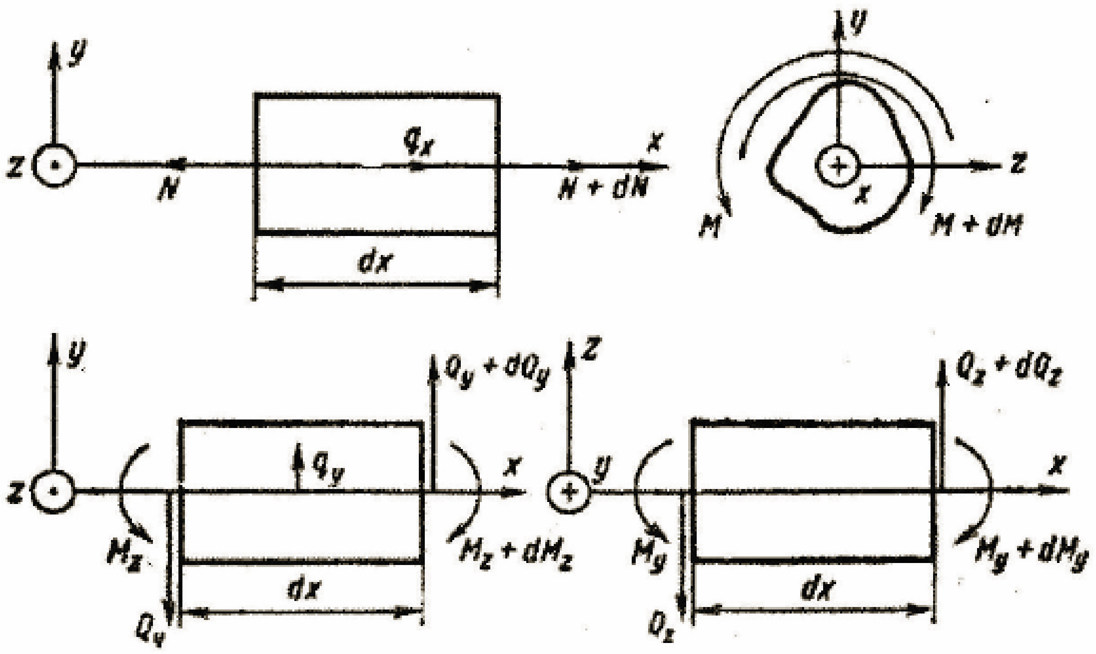

Рис. 2. Правило знаков для силовых воздействий

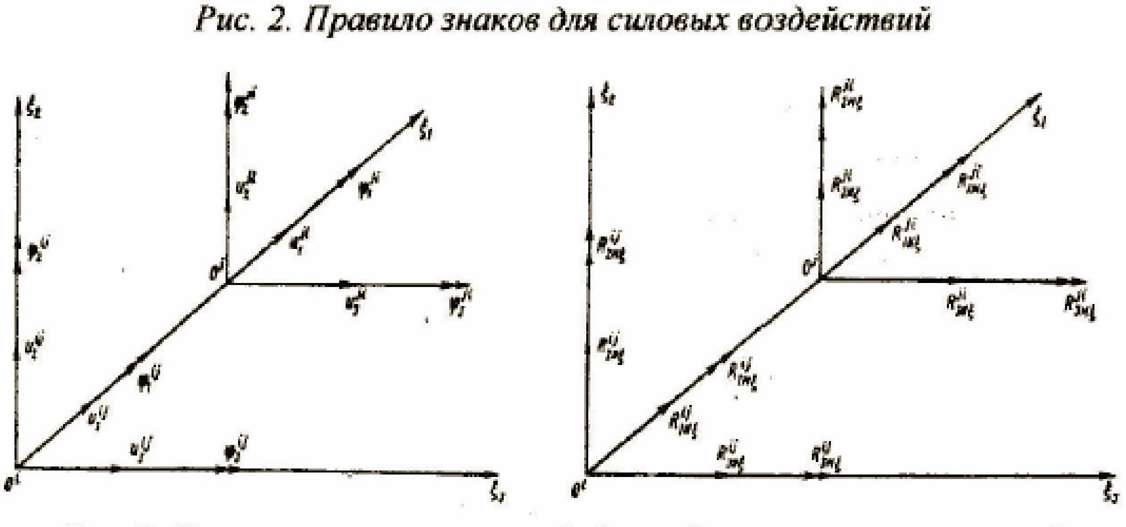

Рис. 3. Компоненты силовых воздействий и упругих перемещений стержневого конечного элемента

Теперь рассмотрим пространственное движение k-го звена механизма относительно неподвижной системы координат $OXYZ$. По теореме Шаля всякое перемещение свободного тела из одного положения в другое может быть получено посредством поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Тогда ускорение любой точки М свободного твердого тела в проекциях на подвижные оси $P_kX'_k\,Y'_k\,Z'_k$ имеет вид

$$\begin{cases} w_{x_k} = w_{P_{xk}} + \dfrac{d\omega_{y_k}}{dt} z_k - \dfrac{d\omega_{z_k}}{dt} y_k + \omega_{x_k}\left(\omega_{x_k} x_k + \omega_{y_k} y_k + \omega_{z_k} z_k\right) - \omega_k^2 x_k \\ w_{y_k} = w_{P_{yk}} + \dfrac{d\omega_{z_k}}{dt} x_k - \dfrac{d\omega_{x_k}}{dt} z_k + \omega_{y_k}\left(\omega_{x_k} x_k + \omega_{y_k} y_k + \omega_{z_k} z_k\right) - \omega_k^2 y_k \\ w_{z_k} = w_{P_{zk}} + \dfrac{d\omega_{x_k}}{dt} y_k - \dfrac{d\omega_{y_k}}{dt} x_k + \omega_{z_k}\left(\omega_{x_k} x_k + \omega_{y_k} y_k + \omega_{z_k} z_k\right) - \omega_k^2 z_k \end{cases}$$

где $w_{P_{xk}}, w_{P_{yk}}, w_{P_{zk}}$ – проекции ускорения $\overline{w}_{P_k}$ полюса P_k в системе координат $P_kX'_k\,Y'_k\,Z'_k$ (рис. 1). В рассматриваемом случае центры тяжести сечений звена расположены по оси $P_kX'_k$, следовательно, координаты точки М равны $x_k=x'_k$, $y_k=z_k=0$, тогда

$$\begin{cases} w_{x_k} = w_{P_{xk}} + \omega_{x_k}^2 x_k - \omega_k^2 x_k \\ w_{y_k} = w_{P_{yk}} + \dfrac{d\omega_{z_k}}{dt} x_k + \omega_{y_k}\omega_{x_k} x_k \\ w_{z_k} = w_{P_{zk}} - \dfrac{d\omega_{y_k}}{dt} x_k + \omega_{x_k} x_k \omega_{z_k} \end{cases}$$

От ускорений w_{x_k} по оси P_kX_k появляются распределенные инерционные силы, интенсивность суммарной нагрузки меняется по длине звена по линейному закону и определяется с помощью следующего выражения:

$$n_k\left(x_k\right) = a_{kn} + b_{kn} x_k\,,$$

где $a_{kn} = -\gamma_k A_k \sin\theta_k - \dfrac{\gamma_k A_k}{g} w_{P_{xk}}$, $b_{kn} = -\dfrac{\gamma_k A_k}{g}\omega_{x_k}^2 + \dfrac{\gamma_k A_k}{g}\omega_k^2$

Алгебраически суммируя все нагрузки, действующие к звену в плоскости $P_kX_kY_k$, получим, что интенсивность суммарной нагрузки меняется по длине звена по линейному закону и определяется с помощью следующего выражения:

$$q_k^y(x_k) = a_{kq}^y + b_{kq}^y x_k,$$

где $$b_{kq}^y = -\frac{\gamma_k A_k}{g}\frac{d\omega_{zk}}{dt}x_k - \frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_{y_k}\omega_{x_k}x_k,$$

$$a_{kq}^y = -\gamma_k A_k \cos\theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{P_{yk}},$$

где θ_k – угол наклона звена k в плоскости OXY.

Алгебраически суммируя все нагрузки, действующие к звену в плоскости $P_kX_kZ_k$, получим, что интенсивность суммарной нагрузки меняется по длине звена по линейному закону и определяется с помощью следующего выражения:

$$q_k^z(x_k) = a_{kq}^z + b_{kq}^z x_k,$$

где $a_{kq}^z = -\frac{\gamma_k A_k}{g} w_{P_{zk}}$, $b_{kq}^z = \frac{\gamma_k A_k}{g}\frac{d\omega_{yk}}{dt}x_k - \frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_{zk}\omega_{x_k}x_k$.

Равновесия элемента стержня МКЭ (рис. 4) в пространственном случае будет:

$$\frac{dN}{dx} + q_x = \frac{dN}{dx} + a_n + b_n x = 0, \quad \frac{dM}{dx} + m = 0;$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + q_y = \frac{dQ_y}{dx} + a_q + b_q x = 0; \quad \frac{dM_z}{dx} - Q_y = 0;$$

$$\frac{dQ_z}{dx} + q_z = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - Q_z = 0. \qquad (5)$$

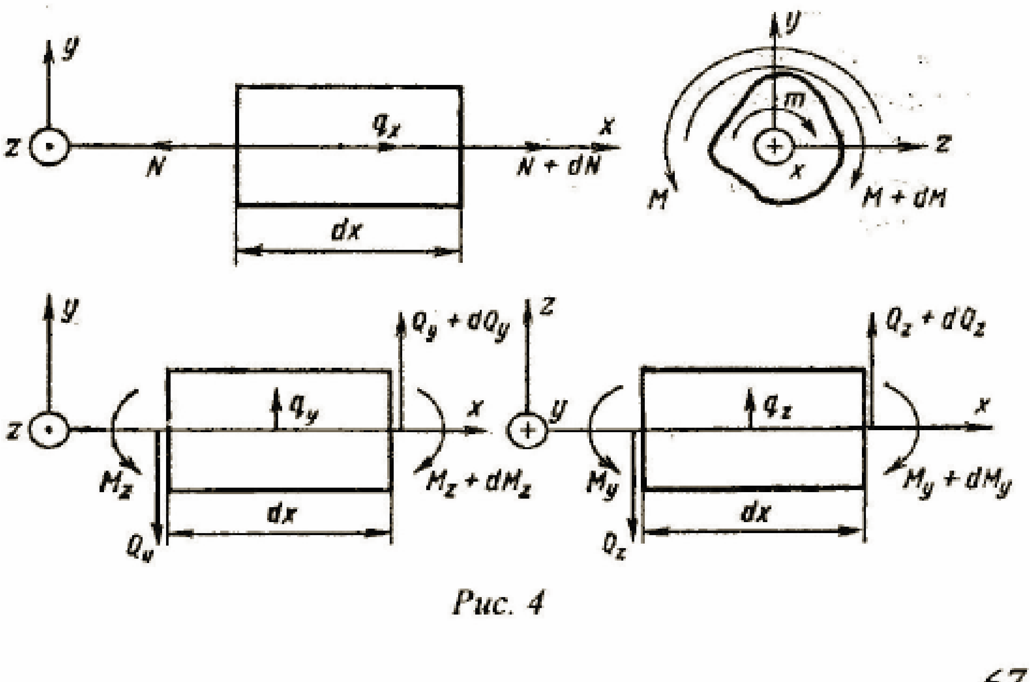

Рис. 4

Тогда, с учетом (2), подвекторы $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$ уравнения равновесия МКЭ для прямолинейного однородного стержневого элемента (3), аналитически учитывающие не только вес, но и распределенную инерцию пространственного движения (5) звена k, получают вид:

$$\vec{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_{kn} l}{2} - \frac{b_{kn} l^2}{2} \\ -\frac{a_{kq}^y l}{2} - \frac{3 b_{kq}^y l^2}{20} \\ -\frac{a_{kq}^z l}{2} - \frac{3 b_{kq}^z l^2}{20} \\ \frac{ml}{2} \\ \frac{a_{kq}^z l^2}{12} + \frac{b_{kq}^z l^3}{30} \\ -\frac{a_{kq}^y l^2}{12} - \frac{b_{kq}^y l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_{kn} l}{2} - \frac{b_{kn} l^2}{2} \\ -\frac{a_{kq}^y l}{2} - \frac{7 b_{kq}^y l^2}{20} \\ -\frac{a_{kq}^z l}{2} - \frac{7 b_{kq}^z l^2}{20} \\ -\frac{ml}{2} \\ -\frac{a_{kq}^z l^2}{12} - \frac{b_{kq}^z l^3}{30} \\ \frac{a_{kq}^y l^2}{12} + \frac{b_{kq}^y l^3}{30} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

Таким образом, определены элементы (6) подвекторов $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$, аналитически учитывающие вес и распределенную инерцию пространственного движения звена стержневого механизма.

Литература

1. *Темирбеков Е.С.* Кинематическое и силовое исследования механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев: Дисс. … докт. техн. наук. – Алматы, 1996.
2. *Шапошников Н.Н., Тарабасов Н.Д., Петров В.Б., Мяченков В.И.* Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. – М.: Машиностроение, 1981. – 333 с.
3. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

- Электрическую энергию, выработанную на малой ГЭС, можно использовать для подпитки энергетической системы сельских линий, имеющих малую мощность.
- Привлечение государственных и частных инвесторов позволит реализовать программы по освоению энергии горных водотоков.
- Для дальнейшего изучения гидроэнергоресурсов республики необходимо проведение научно-исследовательских и проектно-изыскательских работ.

Литература

1. *Беляков Ю.П., Рахимов К.Р.* Изучение и использование гидроэнергетических ресурсов Кыргызстана. – Бишкек, 1996.
2. *Токомбаев К.А., Виноградов Ю.П.* Отчет по выполнению научно-исследовательского проекта “Разработка научных основ использования местных энергоресурсов горных районов Кыргызстана с целью решения социальных и экономических задач. – Бишкек, 1998.