У621.01

СИЛОВОЙ И ЖЕСТКОСТНОЙ АНАЛИЗ КОНСТРУКЦИЙ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Е.С.Темирбеков, д.т.н., проф. **(ЕНУ , г.Астана РК)**

В механике машин инерция движения стержневых звеньев учитывается обычно приведением к центру масс в виде главных векторов сил и моментов сил, а центр масс входит в конечно-элементную модель конструкции механизма в качестве узла [1]. Можно создать более точные конечно-элементные модели, аналитически учитывающие распределенную инерцию движения. Рассмотрим плоскопараллельное движение звена "k" в неподвижной системе OXY (рис.). В точке O введем систему координат $OX'Y'$, положение которой определяется углом θ_k. С началом в P_k, связывающее k-тое звено с ($k-1$)-ым, введем две локальные системы координат: $P_k X_k Y_k$, перемещающуюся вместе со связанным шарниром, и с осями остающимися соответственно параллельными к осям системы координат OXY, а также $P_k X'_k Y'_k$, жестко связанную со звеном k.

Пусть k-ое звено механизма с постоянным сечением движется плоскопараллельно относительно OXY. И пусть в каком-то мгновенном положении механизма известны θ_k, компоненты ускорения $\overline{w}_{kp}^x$ и $\overline{w}_{kp}^y$ точки P_k звена k относительно неподвижной системы координат OXY, $\overline{\omega}_k$, $\overline{\varepsilon}_k$ - угловые скорость и ускорение звена k с направлениями, как показано на рисунке. Тогда

$$\begin{Bmatrix} w_{kp}^{x'} \\ w_{kp}^{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x} \\ w_{kp}^{y} \end{Bmatrix}$$

Ускорение точки B k-го звена складывается из ускорения точки P_k и ускорения точки B в ее вращении вместе со звеном вокруг этого полюса. Вектор $\overline{w}_{kbp}^{y_k'}$ направлен перпендикулярно к оси звена, $\overline{w}_{kbp}^{x_k'}$ всегда направлен от точки B к полюсу P_k. Компоненты ускорения точки B относительно системы координат $OX'Y'$ в матричной форме имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} w_b^{x_k'} \\ w_b^{y_k'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x_k'} \\ w_{kp}^{y_k'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_{kbp}^{x_k'} \\ w_{kbp}^{y_k'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x} \\ w_{kp}^{y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -l_k\omega_k^2 \\ l_k\varepsilon_k \end{Bmatrix}$$

Если поперечные сечения вдоль звена постоянные, тогда действия сил собственного веса звена можно рассматривать как равномерно распределенную нагрузку (приведенная нагрузка к оси звена) по длине звена с интенсивностью $q_{cb}^{k} = \gamma_k A_k$, где γ_k - удельный вес материала звена k, A_k - площадь поперечного сечения звена k. Из-за необходимости дальнейшего расчета звена, эту нагрузку разложим по двум направлениям - по направлению оси звена и по направлению перпендикулярному к оси звена:

$$\begin{Bmatrix} q_{cb}^{x_k'} \\ q_{cb}^{y_k'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_{cb}^{k} \end{Bmatrix}$$

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки, действующей перпендикулярно к оси звена, возникающей от ускорения $\overline{w}_{kp}^{y_k'}$, равна $q_n^{y_k'} = -\dfrac{\gamma_k A_k}{g}\overline{w}_{kp}^{y_k'}$ и направлена противоположно к направлению $\overline{w}_{kp}^{y_k'}$. От угловой скорости $\overline{\omega}_k$ вращательного движения звена k вокруг полюса P_k возникают распределенные нагрузки треугольного вида с интенсивностью

$q_b^{x_k'} = \frac{\gamma_k A_k}{g} \omega_k^2 x_k'$, действующие вдоль оси звена, всегда направленные по оси x_k' от оси вращения. От углового ускорения вращательного движения звена k вокруг оси Z_k', проходящий через полюс P_k, возникают распределенные нагрузки треугольного вида с интенсивностью $q_b^{y_k'} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k x_k'$. Эти нагрузки всегда действуют перпендикулярно к оси звена и направлены противоположно к направлению вектора $\bar{\varepsilon}_k \times \bar{l}_k$.

Суммируя нагрузки, действующие по оси Y_k', видим, что интенсивность суммарной нагрузки меняется по длине звена по линейному закону и определяется с помощью следующего выражения: $q_k\left(x_k'\right) = a_{kq} + b_{kq} x_k'$; $a_{kq} = -\gamma_k A_k \cos\theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{y_k'}$, $b_{kq} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k$. Аналогично суммируя нагрузки, действующие вдоль оси звена (по X_k') видим, что их интенсивность также меняется вдоль звена по линейному закону и выражается с помощью следующего уравнения: $n_k\left(x_k'\right) = a_{kn} + b_{kn} x_k'$;

$a_{kn} = -\gamma_k A_k \sin\theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{x_k'}$, $b_{kn} = \frac{\gamma_k A_k}{g} \omega_k^2$.

Таким образом, интенсивности сил инерции и весов имеют вполне определенное аналитическое выражение. Тогда, используя их и метод конечных стержневых элементов (МКЭ), основанный на прямолинейном однородном стержне, можно получить более точные для исследования кинетостатики рычажных механизмов конечно-элементные модели, учитывающие распределенную инерцию плоскопараллельного движения. Покажем, какие соотношения МКЭ меняются при этом. Уравнения равновесия элемента стержня примут вид: $\frac{dN}{dx}+a_n+b_n x=0$,

$$\frac{dM}{dx}+m=0;\quad \frac{dQ_y}{dx}+a_q+b_q x=0;\quad \frac{dM_z}{dx}-Q_y=0;$$

$\frac{dQ_z}{dx}+q_z=0;\quad \frac{dM_y}{dx}-Q_z=0;$ Индекс "k" для удобства дальнейших записей не показан.

Опуская промежуточные преобразования, получаем основное соотношение равновесия МКЭ для прямолинейного однородного стержня:

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_\xi^{ij} \\ \vec{R}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{ij} & B_{12}^{ij} \\ B_{21}^{ij} & B_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}_\xi^{ij} \\ \vec{U}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{Q}^{ij} \\ \vec{Q}^{ji} \end{Bmatrix},$$

связывающее обобщенные реактивные силы $\vec{R}_\xi^{ij}$ и $\vec{R}_\xi^{ji}$, действующие в точках контакта стержневого элемента с узловыми, с обобщенными перемещениями $\vec{U}_\xi^{ij}$ и $\vec{U}_\xi^{ji}$ этих точек.

Квадратные подматрицы $\left[B_{rq}^{ij}\right], (r=1,2;\quad q=1,2)$ матрицы реакций $\left[B^{ij}\right]$ стержневого элемента не изменяются [2], а подвекторы $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$ получают вид (1).

Т.о., определены элементы подвекторов $\vec{Q}^{ij}$ и $\vec{Q}^{ji}$, учитывающие распределенную инерцию плоского движения звена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темирбеков Е.С. Кинематическое и силовое исследования механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев. Диссертация … доктора технических наук. Алматы. 1996г.

2. Шапошников Н.Н., Мяченков В.И. и др. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость-М.: Машиностроение, 1981, 333с.

$$\vec{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{a_n l}{2} - \dfrac{b_n l^2}{2} + EF\alpha\theta \\ \dfrac{a_q l}{2} - \dfrac{3b_q l^2}{20} \\ -\dfrac{q_z l}{2} \\ \dfrac{ml}{2} \\ -\dfrac{q_z l^2}{12} \\ \dfrac{a_q l^2}{12} + \dfrac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{a_n l}{2} - b_n l^2 \\ -\dfrac{a_q l}{2} - \dfrac{7}{20} b_q l^2 \\ -\dfrac{q_z l}{2} \\ -\dfrac{ml}{2} \\ \dfrac{q_z l^2}{12} \\ -\dfrac{a_q l^2}{12} - \dfrac{b_q l^3}{20} \end{Bmatrix} \quad (1)$$