Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.946

Қолжазба құқығында

АХМЕТКАЛИЕВА РАЯ ДҮЙСЕНБЕКҚЫЗЫ

Сингулярлы дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің коэрцитивті бағалаулары мен олардың қолданылулары

6D060100 – Математика

Философия докторы PhD
ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер
Қ.Н. Оспанов - ф.-м.ғ.д., профессор
Ларс-Ерик Перссон – профессор
Лулео технологиялық университеті, Швеция

Қазақстан Республикасы
Астана, 2013

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Тақырыптың өзектілігі. Диссертациялық жұмыс Лебег кеңістігінде берілген және коэффициенттері комплексті дифференциалдық теңдеулердің шешілу шарттарын, шешімдерінің сапалық қасиеттерін және жуықтау мүмкіндіктерін зерттеуге арналған.

Коэффициенттері айнымалы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу кезінде көңіл бөлетін басты мәселелерді келесі үш категорияның (санаттың) біріне жатқызуға болады. Олар - шешімнің табылуы, жалғыз болуы және сапалық қасиеттері. Бұлардың алғашқы екеуі теңдеудің нақты процеске математикалық модель ретінде сәйкес келуіне жауап берсе, үшінші мәселе процестің жүру сипаты (табиғаты) жайында ақпарат алу үшін қажет. Сондықтан, сызықты және сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің сапалық қасиеттерін зерттеу маңызды болып табылады. Шешімдерінің сапалық қасиеттерін зерттеу кезінде бізді келесі сұрақтар қызықтырады:

1) шешімдердің тегістігі;

2) шешімдердің әр түрлі салмақты кеңістіктердің нормаларындағы бағалаулары;

3) шешімдердің жуықталу мүмкіндіктері.

Эллиптикалық типті теңдеулердің шешімдерінің тегістігі мен шешімдерді әр түрлі нормаларда бағалау мәселелері олардың коэффициенттері регулярлы болып және теңдеу шенелген облыста берілген жағдайда терең зерттелген, зерттеу нәтижелері бірнеше монографияларда толығымен келтірілген. Мысалы, осыған қатысы бар жұмыстардың тізімін Н.Н. Уральцева және О.А. Ладыженская [1], Ж.-Л. Лионс және Э. Мадженес [2] монографияларынан табуға болады.

Дегенмен, бұл жағдайда жасалған әдістер шенелмеген облыста берілген дифференциалдық теңдеулерді (сингулярлы жағдай) зерттеуге жарамсыз. Сингулярлы Штурм-Лиувилль теңдеуін жаңа әдістермен зерттеуді ағылшын математиктері Б.Н. Эверитт және М. Гирц [3-8] бастады. Олар дифференциалдық операторлардың бөліктенуі деген тың ұғым енгізді. Мысалы $L_2 := L_2(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде берілген

$$Ly = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

Штурм-Лиувилль операторы үшін бөліктену ұғымы былай енгізілді. Егер $y \in D(L)$ және $Ly \in L_2$ қатынасынан $q(x)y,\ y'' \in L_2$ шығатын болса, онда L операторын $L_2 := L_2(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде бөліктенеді деп атады. Мұндағы $D(L)$ - L операторының анықталу облысы. L операторының бөліктенуі

$$\|y''\|_{L_2(R)} + \|qy\|_{L_2(R)} \le c\left(\|Ly\|_{L_2(R)} + \|y\|_{L_2(R)}\right),\ \ y \in D(L), \tag{2}$$

бағалауының орындалуына эквивалентті. [3-8] жұмыстарда авторлар L операторы бөліктену үшін $q(x)$ потенциалды функциясына қойылатын шарттарды анықтады. Бұл шарттар $q(x)$ функциясымен қатар оның туындыларына да шектеулер қояды. Нақтырақ айтатын болсақ, [3-8] жұмыстарында q функциясы $\inf q(x) > -\infty$ және

$$\left(q^{-\frac{1}{4}}(x)\right)'' q^{\frac{1}{4}}(x) \in L_1$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда L операторының бөліктенетіндігі көрсетілді, сонымен қатар, L операторы бөліктенетіндей тегіс емес q функциясының мысалдары келтірілді.

$$\left(q^{-\frac{1}{4}}(x)\right)'' q^{\frac{1}{4}}(x) \in L_1$$

түріндегі шарттан бір-біріне тәуелсіз М. Өтелбаев [9], Ф.В. Аткинсон [10], К.Х. Бойматов [11-12] және Д.Ж. Раимбеков [13] жұмыстары арылды. Бұл еңбектерде соңғы шарт әдетте резольвентаны бағалау кезінде қолданылатын белгілі Левитан – Титчмарш шартына (бұл шарттар туралы [14 - 17] жұмыстарынан қараңыз) жақын шарттармен (әр авторда әр түрлі) алмастырылды. [9] жұмысында бөліктену мәселесі L_p гильберт кеңістігінде ғана емес, сонымен қатар салмақты $L_{p,l}$ (мұндағы l үзіліссіз салмақты функция) кеңістігінде де зерттелді және Штурм-Лиувилль операторының бөліктенуі жылдам тербелетін потенциалдардың кең класы үшін де (мысалы, $q(x) = e^{|x|}\sin^2 e^{|x|^5}$) көрсетілген. Мұндағы $L_{p,l}$ - нормасы

$$\|f\|_{p,l} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)l(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1 \le p \le +\infty)$$

түрінде анықталған салмақты кеңістік. Кейіннен М. Өтелбаев дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің тегістігі туралы мәселелерді шешу үшін резольвентаны локальды бейнелеудің вариациялық деп атаған арнайы әдісін ұсынды. Көпөлшемді теңдеулер [18] жұмысында қарастырылған, К.Х. Бойматов [11] еңбегінде алынған нәтижелерді эллиптикалық операторлардың қандай да бір класына сөзбе-сөз көшіру арқылы көпөлшемді теңдеулер [18] жұмысында зерттелген.

$q(x)$ дифференциалданбайтын функция болған жағдайда L операторының $L_2 = L_2(-\infty, +\infty)$ және L_p $(1 < p < +\infty)$ кеңістіктерінде бөліктенуінің шарттары алғаш рет М. Өтелбаев пен К.Х. Бойматов еңбектерінде алынды және олардың шәкірттерінің жұмыстарында жалғасын тапты. Коэффициенттері айнымалы эллиптикалық операторларды зерттеуде жаңа әдістер алдымен Штурм-Лиувилль операторы үшін жасалады да, басқа операторларға таратылады. Жоғарыда аталған авторлар Штурм-Лиувилль операторымен қатар Шредингер типті көп өлшемді операторлардың да бөліктену шарттарын алды және алынған нәтижелерді осы операторлардың спектрлерінің қасиеттерін зерттеуге пайдаланды.

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің табылуы мен тегістігі мәселесін Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін шенелмеген облыста М.Б. Мұратбеков және М. Өтелбаев [19] зерттеді. Кейіннен бұл есеп Т.Т. Аманова [20], М.Б. Мұратбеков [21] жұмыстарында қарастырылды. Және [22] мақаласында авторлар сызықты емес

$$Ly = -y'' + q(x,y)y$$

Штурм-Лиувилль операторының $L_1(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде бөліктену шарттарын алды. [23 - 28] еңбектерінде коэффициенттері операторлар болатын

$$Ly = -\left(P(x)y'\right)' + Q(x)y, \qquad x \in (-\infty,+\infty),$$

түріндегі дифференциалдық операторлар зерттелді.

Сонымен, дифференциалдық теңдеудің коэффициенттері шенелмеген болып және теңдеу шексіз аймақта берілген жағдайда сәйкес дифференциалдық оператор үшін (2) түріндегі бөліктену теңсіздігін алу маңызды есеп болып табылады. L операторы үшін алынған (2) түріндегі баға біріншіден $Ly = f$ дифференциалдық теңдеуінің жалпыланған шешімі жататын функциялар класын дәл сипаттауға мүмкіндік береді, екіншіден L дифференциалдық операторының $D(L)$ анықталу облысының нақты сипатталуын қамтамасыз етеді. Мысалы бөліктенетін L Штурм-Лиувилль операторы үшін $D(L) = W_{2,q}^2(R)$, мұндағы $W_{2,q}^2(R)$ - нормасы $\left|y : W_{2,q}^2(R)\right| = \|y''\|_2 + \|q(\cdot)y\|_2$ болатын салмақты С.Л. Соболев кеңістігі. Осыдан (2) түріндегі бағалауының сингулярлы дифференциалдық теңдеу шешімдерінің сапалы қасиеттерін зерттеу үшін функционалдық кеңістіктердің қазіргі заманғы аппаратын қолдануға мүмкіндік беретіні көрінеді. Белгілі ғалым, КСРО ҒА академигі И.М. Гельфанд (2) түріндегі бағалауларды алу эллиптикалық теңдеулерді сызықты операторлардың жалпы теориясы тұрғысынан зерттеудегі негізгі мәселелердің бірі деп атаған ([1]).

[3-13; 15-50] мақалаларында сызықты эллиптикалық дифференциалдық операторлардың кең класы үшін бөліктену мәселелері шешілген және олардың негізінде эллиптикалық теңдеулер шешімдерінің маңызды тегістік және жуықталу қасиеттері алынған. Сол сияқты олармен байланысты сингулярлы дифференциалдық және интегралдық операторлардың спектрлік қасиеттері зерттелген. Аталған жұмыстардағы әдістер, жалпы алғанда, енгізу теориясының, операторлардың спектралдық теориясының терең деректеріне негізделді, сонымен бірге, бұл еңбектерде функционалдық кеңістіктердегі интегралдық операторлар теориясының жетістіктері және жалпыланған шешімнің локалді емес априорлы бағалаулары кеңінен қолданылады. Бұл зерттеулер сингулярлы дифференциалдық теңдеулер теориясының, операторлардың спектралдық теориясының, салмақты функционалдық кеңістіктер мен ондағы интегралдық операторлар теориясының дамуына айтарлықтай әсер етті.

Жоғарыда келтірілген зерттеулердің барлығы оң коэффициентті еркін мүшесі бар сызықты дифференциалдық операторларға арналған. Алайда, көптеген практикалық есептер қасиеттері ізделінді шешімнің аралық (ортаңғы) туындысы бар мүшесінен тәуелді болатын эллиптикалық теңдеулерге алып келеді. Мұндай теңдеулер әдебиетте нұқсанды дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Олардың қатарына, мысалы, аралық (ортанғы) мүшесі бар және потенциалы төменнен шенелмеген Шредингер теңдеуі, еркін мүшесінің коэффициенті ізделінді функцияның туындысынан тәуелді болатын Кортевег де Фриз типті теңдеулер, сол сияқты, кедергісі жылдамдыққа немесе үдеуге пропорционал ортадағы тербелістің дифференциалдық теңдеуі жатады ([51]). Сәйкес операторы симметриялы болған жағдайда нұқсанды дифференциалдық теңдеулер [52-55] мақалаларында зерттелген. Бұл жұмыстарда:

- оператордың өзіне-өзі түйіндестігі,
- оның меншікті мәндерін бағалау,
- оның спектрінің құрылымын анықтау

туралы есептер қарастырылған. Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімінде біз бұл жұмыстардан өзгеше жағдайды, атап айтқанда, симметриялы болмайтын нұқсанды дифференциалдық теңдеулерді зерттейміз. Бұл бөлімде, сонымен қатар, бір квазисызықты нұқсанды дифференциалдық теңдеудің шешілу есебі қарастырылады.

Жоғарыда келтірілген жұмыстардағы қолданылған әдістер жартылай шенелмеген, яғни энергетикалық кеңістіктері Соболев кластарына енбейтін дифференциалдық операторларды зерттеуге мүмкіндік береді. Жартылай шенелмеген операторларға барлық тақ ретті дифференциалдық операторлар жатады. Тақ ретті сызықты және сызықты емес дифференциалдық операторлардың бөліктенуі, спектрлік және аппроксимативтік қасиеттері М. Өтелбаев, М.Б. Мұратбеков, Ж.Ж Айтқожа, К.Н. Оспанов, А. Біргебаев, Т.Т. Аманова, А.Ж. Тогучуев, Б. Алиев және Д. Зейналов, Л. Шустер және М. Сапенов [56-66] мақалаларында зерттелген.

Дегенмен бұл жұмыстардың Ж.Ж Айтқожа және М.Б. Мұратбеков [60], А. Біргебаев және М. Өтелбаев [63], М.Б. Мұратбеков, М.М. Мұратбеков және Қ.Н. Оспанов [64] еңбектерінен басқасы коэффициенттері нақты жағдайға арналған, ал [60; 63] жұмыстарында Гильберт кеңістігі жағдайы қарастырылады. Коэффициенттері комплексмәнді тақ ретті сингулярлы дифференциалдық теңдеулер банах кеңістігінде жүйелі түрде әлі зерттелген жоқ. Мұндай теңдеулер проекциялық әдістерді, соның ішінде Фурьенің айнымалыларды ажырату әдісін көп өлшемді теңдеулерге қолдану кезінде пайда болады.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде біз жоғарғы коэффициенттері айнымалы үшінші ретті сингулярлы дифференциалдық теңдеулерді қарастырып, олардың шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы мәселелерін зерттейміз, сонымен қатар табылған шешім үшін коэрцитивті бағалаудың орындалуын қамтамасыз ететін шарттарды көрсетеміз. Жоғарыда аталған жұмыстарда негізінен

$$Ly = -y''' + q(x)y = f(x)$$

түріндегі теңдеулер қарастырылған, мұндағы $f \in L_p(R),\ R = (-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$.

Жоғарыда айтылғандар бірлесе отырып диссертациялық жұмыстың өзектілігін көрсетеді.

Жұмыстың мақсаты. Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты - шексіз аймақта берілген екінші ретті нұқсанды сингулярлы дифференциалдық операторлардың бөліктенуін және жуықталу қасиеттерін зерттеу. Сонымен қатар, жұмыс коэффициенттері комплексмәнді сингулярлы үшінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің табылуы мен жалғыздығы мәселесін зерттеуге, ол шешім үшін коэрцитивті бағалау орындалатындай шарттарды алуға арналған.

Зерттеу объектісі. Нұқсанды дифференциалдық операторлар, жоғарғы коэффициенті тұрақты емес үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер.

Зерттеу әдістері. Коэффициенттері комплексті екінші және үшінші ретті дифференциалдық теңдеулердің коэрцитивті шешілуі, шешімдердің жатықтығы мен олардың жуықталу қасиеттерін зерттеу кезінде локализация әдісі және функционалдық кеңістіктер теориясының әдістері қолданылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыстың нәтижелері жаңа және келесідей:

- сызықты емес екінші ретті нұқсанды дифференциалдық

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x)$$

теңдеуінің шешілу шарттары табылды;

- коэффициенттері комплексмәнді екінші ретті нұқсанды дифференциалдық

$$ly = -y'' + r(x)y' + s(x)\overline{y}' \qquad (3)$$

операторының қайтарымдылық және бөліктену шарттары алынды;

- Осы (3) операторының резольвентасы үшін Фредгольмдік радиусының екі жақты бағалары және компактылы болу шарты алынды;
- (3) операторының анықталу облысымен байланысты

$$M = \{y \in L_2 : \|ly\|_2 \le 1\}$$

жиынының Колмогоров бойынша көлденеңдерінің екіжақты бағалаулары алынды;

- Жоғарғы коэффициенттері айнымалы комплексмәнді үшінші ретті бір дифференциалдық теңдеулердің $L_p = L_p(-\infty,+\infty)$, $1 < p < \infty$ кеңістігінде бірмәнді және коэрцитивті шешілу шарттары келтірілді.

Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңыздылығы. Алынған нәтижелер теориялық маңызға ие. Олар дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясында, сонымен қатар студенттер, магистранттар мен докоранттарға дифференциалдық операторлар бойынша арнайы курстар оқу кезінде қолданылуы мүмкін.

Алынған нәтижелерді аппробациялау. Жұмыс нәтижелері «Ломоносов - 2011» студенттер, магистранттар және жас ғылымдарға арналған халықаралық ғылыми конференциясында (Астана қ., 8 – 9 сәуір, 2011 ж.), Түркі әлемді математикалық қоғамының 4-Конгресінде (Баку, 1 – 3 шілде, 2011 ж.), Математика, механика және информатика бойынша IV республикалық студенттік ғылыми-практикалық конференцияда (Астана қ., 5 – 6 сәуір, 2012 ж.), «Ломоносов - 2012» атты студенттер, магистранттар және жас ғылымдарға арналған халықаралық ғылыми конференцияда (Астана қ., 13 – 14 сәуір, 2012 ж.), ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаевтың 70 жылдық мерейтойына арналған «Функционалдық анализ және оның қолданылулары» халықаралық ғылыми конференциясында (Астана қ., 2 – 5 қазан, 2012 ж.), Лулео технологиялық университетінің Математика департаменті отырысында (Лулео қ., Швеция, 20 наурыз, 2013 ж.) және ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаев, ф.-м.ғ.д. Р. Ойнаров, ф.-м.ғ.д. Е.Д. Нұрсұлтанов, ф.-м.ғ.д. Қ.Н. Оспанов жетекшілігімен өтетін «Функционалдық анализ және оның қолданылуы» ғылыми семинарда (Астана қ.) баяндалып, талқыланды.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 14 жұмыс жарық көрді. Соның ішінде 7 жұмыс ғылыми конференциялардың еңбектері және тезистері жинағында, 7 мақала ғылыми журналдарда жарияланды. Бір жұмыс ISI импакт факторлы журналда басылып шықты. Жарияланымдар тізімі төмендегідей:

1 Ахметкалиева Р.Д. Об условиях разрешимости одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка // Ломоносов - 2011: Материалы международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. - Астана, 8-9 апреля, 2011. С.27-28

2 Akhmetkaliyeva R.D. About conditions for the solvability of a class of third-order differential equations // The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS). - Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011. C. 150

3 Ахметкалиева Р.Д., Шайбуйдакова Г.Е. Үшінші ретті дифференциалдық теңдеу жайлы // IV Республиканская студенческая научно-практическая

конференция по математике, механике и информатике: Сборник докладов. - Астана, 5-6 апреля, 2012. С. 41-42

4 Ахметкалиева Р.Д. Об условиях обратимости и разделимости вырожденного дифференциального оператора второго порядка // Ломоносов - 2011: Материалы международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. - Астана, 13-14 апреля, 2012. С.27-29

5 Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space // Centre de Recerca Matematica. UAB, Barcelona, Spain. Preprint num.1080. December 2011. -P.1-12

6 Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2012, No. 66, 1-12; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

7 Akhmetkaliyeva R.D., Ospanov K.N., Persson L.-E., Wall P. Some new results concerning a class of third order differential equations // Research Report 5, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Lulea University of Technology, Lulea 2012

8 Akhmetkaliyeva R.D. Coercive estimates for solutions of one class of third order differential equations // Функциональный анализ и его приложения: Материалы международной научной конференции. – Астана, 2-5 октября, 2012. С.214-215

9 Akhmetkaliyeva R.D. About conditions for the solvability of a class of third-order differential equations // Research Report 7, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Lulea University of Technology, Lulea 2012

10 Ахметкалиева Р.Д. Коэрцитивные оценки решения одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник КарГУ им. Е.А. Букетова. №2(70)-2013. С. 28-35.

11 Оспанов К.Н., Ахметкалиева Р.Д. О разделимости вырожденного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Вестник КарГУ им. Е.А. Букетова. №2(70)-2013. С. 132-142.

12 Ахметкалиева Р.Д. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения третьего порядка с комплекснозначными коэффициентами // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. № 4(95) – 2013. С. 355-361.

13 Оспанов К.Н., Ахметкалиева Р.Д. О компактности резольвенты вырожденного дифференциального оператора второго порядка // Тез. докл. межд. конф. «Актуальные пробл. теории управления топологии и операт. уравнений». - Бишкек, 2013. - С. 108-109.

14 Ахметкалиева Р.Д. Коэффициенттері комплексмәнді үшінші ретті дифференциалдық теңдеудің коэрцитивті шешілуі // Сб. докладов межд. научно-практ. конф. «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт» – Тараз, 27-28 сентября, 2013. С. 99-100

Диссертацияның құрылымы. Диссертация кіріспеден, екі бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерге бөлінген), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Жұмыстың бірінші бөлімде біз келесі түрдегі сызықты емес дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x), \tag{4}$$

мұндағы $x \in R$, r - нақты мәнді функция, ал $f \in L_2$.

Мұнда (4) теңдеуінің шешілімділік шарттары қарастырылып, төмендегі 0.1 теорема дәлелденді.

Анықтама 0.1. Егер $y \in L_2$ функциясы үшін екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылып кез келген $\theta \in C_0^{\infty}(R)$ үшін $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|\theta(y_n - y)\|_2 \to 0$, $\|\theta(Ly_n - f)\|_2 \to 0$ қатыстары орындалса, онда y (4) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Теорема 0.1. Айталық r функциясы екі аргументі бойынша да үзіліссіз дифференциалданатын болсын және

$$r \ge \delta_0\sqrt{1+x^2} \quad (\delta_0 > 0), \quad \sup_{x,\eta \in R: |x-\eta| \le 1} \ \sup_{A>0} \ \sup_{|C_1| \le A, |C_2| \le A, |C_1 - C_2| \le A} \frac{r(x,C_1)}{r(\eta, C_2)} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда (4) теңдеуінің y шешімі бар болады және

$$\|y''\|_2 + \|[r(\cdot, y)]y'\|_2 < \infty$$

орындалады.

Сонымен қатар, бұл бөлімнің үшінші бөлімшесінде коэффициенттері комплекс мәнді екінші ретті нұқсанды дифференциалдық операторды қарастырамыз.

Айталық, l - шексіз дифференциалданатын және тұғыры компакт функциялардың $C_0^{\infty}(R)$ жиынында анықталған $l_0 y = -y'' + r(x)y' + s(x)\overline{y}'$ өрнегінің L_2 кеңістігіндегі тұйықталуы болсын. Мұндағы, r және s - комплекс мәнді функциялар, ал $\overline{y}$ - y-ке түйіндес функция.

Төмендегідей белгілеулер енгіземіз:

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)} \quad (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)} \quad (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h}=\max\left(\sup_{t>0}\alpha_{g,h}(t),\sup_{\tau<0}\beta_{g,h}(\tau)\right),$$

мұндағы g және h - берілген функциялар.

$C_{loc}^{(1)}(R)$ арқылы барлық $\psi\in C_0^{\infty}(R)$ функциялары үшін $\psi f\in C^{(1)}(R)$ болатындай f функцияларының жиынын белгілейміз.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижелері төмендегідей:

Теорема 0.2. Айталық r және s функциялары

$$r,s\in C_{loc}^{(1)}(R),\ \operatorname{Re}r-|s|\geq\delta>0,\ \gamma_{1,\operatorname{Re}r}<\infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда l операторы қайтарымды және оған кері оператор l^{-1} барлық L_2 кеңістігінде анықталған.

Сонымен егер теорема шарттары орындалса, онда $ly=f$ теңдеуі бірмәнді шешіледі.

Егер

$$\|y''\|_2+\|ry'\|_2+\|s\bar{y}'\|_2\leq c\left(\|ly\|_2+\|y\|_2\right)$$

теңсіздігі әрбір $y\in D(l)$ үшін орындалатын болса, онда l операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді деп аталады. Мұндағы $\|\cdot\|_2$ - L_2 кеңістігінің нормасы.

Келесі тұжырым l операторының L_2 кеңістігінде бөліктену шартын береді.

Теорема 0.3. Айталық, r және s функциялары

$$\begin{cases} r,s\in C_{loc}^{(1)}(R),\ \ \operatorname{Re}r-\rho\left[|\operatorname{Im}r|+|s|\right]\geq\delta>0,\ \gamma_{1,\operatorname{Re}r}<\infty,\ \ 1<\rho<2, \\ c^{-1}\leq\dfrac{\operatorname{Re}r(x)}{\operatorname{Re}r(\eta)}\leq c\quad at\quad |x-\eta|\leq 1,\ \ c>1. \end{cases}\tag{5}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y\in D(l)$ үшін

$$\|y''\|_2+\|ry'\|_2+\|s\bar{y}'\|_2\leq c_l\|ly\|_2,$$

бағалауы орындалады, басқаша айтқанда l операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді.

Теорема 0.4. r және s функциялары (5) шарттарын қанағаттандырсын және $\lim_{t\to+\infty}\alpha_{1,\mathrm{Re}\,r}(t)=0$, $\lim_{\tau\to-\infty}\beta_{1,\mathrm{Re}\,r}(\tau)=0$ теңдіктері орындалсын. Онда l^{-1} операторы L_2 кеңістігінде компактылы болады.

Келесі теореманы келтіру үшін бізге мынадай мағлұматтар қажет.

0.4 теоремасының шарттары орындалсын. $M=\{y\in L_2 : \|ly\|_2\le 1\}$ жиынын қарастырамыз. Айталық $d_k=\inf_{\Sigma\subset\{\Sigma\}}\sup_{y\in M}\inf_{w\in\Sigma}\|y-w\|_2$ $(k=0,1,2,\ldots)$ - M жиынының L_2 кеңістігіндегі Колмогоров бойынша k-көлденеңдері болсын, мұндағы $\{\Sigma_k\}$ - L_2 кеңістігіндегі өлшемі k - дан аспайтын барлық Σ_k ішкі кеңістіктердің жиыны. $N_2(\lambda)$ арқылы берілген λ оң санынан кіші емес d_k көлденеңдердің санын белгілейміз.

Көлденеңдердің $N_2(\lambda)$ үлестірім функциясының бағалауы $ly=f$ теңдеуінің шешімдерінің жуықтау мәселелерінде маңызды рөл атқарады.
Келесі тұжырым орынды.

Теорема 0.5. Айталық, 0.4 теорема шарттары орындалсын және q функциясы $\gamma_{q,\mathrm{Re}\,r}<\infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда келесі екі жақты бағалаулар

$$c_1\lambda^{-2}\mu\left\{x:|q(x)|\le c_2^{-1}\lambda^{-1}\right\}\le N_2(\lambda)\le c_3\lambda^{-2}\mu\left\{x:|q(x)|\le c_2\lambda^{-1}\right\}$$

орындалады, мұндағы μ - Лебег өлшемі.

Атап өтетін нәрсе, мұнда, егер λ шектеусіз өссе, онда дәлелденген теңсіздіктердің оң және сол жақтары нөлге бірдей жылдамдықпен ұмтылады. Мұндай теңсіздіктер

$$-y''+r(x)y'+s(x)\bar{y}'=f$$

теңдеуінің шешімін жуықтап табу есептерінде қолданыс табуы мүмкін.

Бірінші бөлімнің төртінші бөлімшесінде осы l операторының ρ_L Фредгольм радиусының бағалаулары алынады.

Теорема 0.6. Айталық, r және s үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын және

$$\begin{cases} \operatorname{Re} r - \rho\left[|\operatorname{Im} r| + |s|\right] \geq \delta > 0, \quad 1 < \rho < 2, \\ \gamma_{\operatorname{Re} r} < \infty, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\operatorname{Re} r(x)}{\operatorname{Re} r(\eta)} \leq c \quad \text{при} \quad |x-y| \leq 1, \end{cases}$$

шартын қанағаттандырсын. Онда l^{-1} операторының $\rho_{l^{-1}}$ Фредгольм радиусы үшін

$$c_2^{-1} \leq \rho_{l^{-1}}\gamma_0 \leq c_2$$

бағалаулары орындалады, мұндағы

$$\gamma_0 = \max\left(\overline{\lim_{\tau\to-\infty}}\beta_{\operatorname{Re} r}(\tau), \overline{\lim_{t\to+\infty}}\alpha_{\operatorname{Re} r}(t)\right).$$

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде біз жоғарғы коэффициенттері тұрақты болмайтын үшінші ретті дифференциалдық

$$(L+\lambda E)y \equiv -m_1(x)\left(m_2(x)(m_3(x)y')'\right)' + [q(x)+ir(x)+\lambda]y = f(x) \tag{6}$$

теңдеуін қарастырып, оның шешімінің бар болуы және жалғыздығы мәселелерін зерттейміз, мұндағы $f \in L_p$, $\lambda \geq 0$.

Сонымен қатар y шешім үшін

$$\left\|m_1(x)\left(m_2(x)(m_3y')'\right)'\right\|_p^p + \|(q(x)+ir(x)+\lambda)y\|_p^p \leq c_0\|f(x)\|_p^p \tag{7}$$

бағалуының орындалуын қамтамасыз ететін шарттарды қарастырамыз.

Анықтама 0.2. Егер $y(x) \in L_p(R)$ функциясы үшін n шексіздікке ұмтылғанда $\|y_n - y\|_p \to 0$, $\|(L+\lambda E)y_n - f\|_p \to 0$ болатындай үзіліссіз және шексіз дифференциалданатын финитті функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылса, онда y функциясы (6) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Төмендегідей нәтижелер алынды.

Теорема 0.7. Айталық, $q(x)$, $r(x)$, $m_1(x)$ функциялары R - де үзіліссіз, $m_2 \in C_{loc}^{(1)}(R)$ $m_3 \in C_{loc}^{(2)}(R)$ және төмендегі шарттар орындалсын

$$m_1(x) \geq 1, \; m_2(x) \geq 1, \; m_3(x) \geq 1, \; \frac{q(x)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k^2(x)} \geq 1, \quad r(x) \geq 1, \tag{8}$$

$$c^{-1} \leq \frac{m_k(x)}{m_k(\eta)}, \frac{q(x)}{q(\eta)}, \frac{r(x)}{r(\eta)} \leq c, \; (k = 1,2,3) \;\; x,\eta \in R, \quad |x - \eta| \leq 1, \tag{9}$$

$$|m_2'(x)| \leq c m_2(x), \quad |m_3^{(j)}(x)| \leq c m_3(x) \;\; j = 1,2, \; x \in R, \tag{10}$$

$$\sup_{|x-\eta|\leq 1} \frac{|W_\lambda(x) - W_\lambda(\eta)|}{|W_\lambda(x)|^{\nu} |x - \eta|^{\mu}} < +\infty, \quad 0 < \nu < \frac{\mu}{3} + 1, \quad \mu \in (0,1], \quad \lambda \geq 0, \tag{11}$$

мұндағы

$$W_\lambda(x) := \frac{|q(x) + \lambda + ir(x)|}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}.$$

Онда барлық $\lambda \geq \lambda_0$ үшін (6) теңдеудің y шешімі бар болатындай $\lambda_0 \geq 0$ саны табылады.

Теорема 0.8. Айталық, $q(x)$, $r(x)$ функциялары R - де үзіліссіз, $m_1 \in C_{loc}^{(3)}(R)$, $m_2 \in C_{loc}^{(2)}(R)$, $m_3 \in C_{loc}^{(2)}(R)$ болсын, және (8), (9), (11) шарттарын және

$$|m_1^{(j)}(x)| \leq c m_1(x), \quad j = \overline{1,3}, \quad |m_k^{(i)}(x)| \leq c m_k(x), \quad k = 2,3, \quad i = 1,2, \; x \in R$$

шартын қанағаттандырсын. Онда (6) теңдеудің шешімі y жалғыз және ол үшін (7) бағалауы орындалады.

Қорытынды бөлімде алынған нәтижелер жалпыланған.