Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.946

Қолжазба құқығында

АХМЕТКАЛИЕВА РАЯ ДҮЙСЕНБЕКҚЫЗЫ

Сингулярлы дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің коэрцитивті бағалаулары мен олардың қолданылулары

6D060100 – Математика

Философия докторы PhD
ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер
Қ.Н. Оспанов - ф.-м.ғ.д., профессор
Ларс-Ерик Перссон – профессор
Лулео технологиялық университеті, Швеция

Қазақстан Республикасы
Астана, 2013

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ.. 3

1 ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ......................... 15

1.1 Кейбір қажетті белгілеулер, анықтамалар мен көмекші нәтижелер.. 15

1.2 Нұқсанды екінші ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеудің Гильберт кеңістігінде шешілімділігі..................................... 21

1.3 Бір нұқсанды дифференциалдық оператордың гильберт кеңістігіндегі бөліктенуі.. 39

1.4 Екінші ретті нұқсанды дифференциалдық оператордың резольвентасының Фредгольм радиусының бағалаулары..................... 54

2 ҮШІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ КОЭРЦИТИВТІ ШЕШІЛУІ.. 61

2.1 Негізгі нәтижелер.. 61

2.2 Көмекші тұжырымдар және олардың қолданылулары......................... 62

2.3 Негізгі тұжырымдарды дәлелдеу.. 84

ҚОРЫТЫНДЫ.. 86

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.. 87

КІРІСПЕ

Тақырыптың өзектілігі. Диссертациялық жұмыс Лебег кеңістігінде берілген және коэффициенттері комплексті дифференциалдық теңдеулердің шешілу шарттарын, шешімдерінің сапалық қасиеттерін және жуықтау мүмкіндіктерін зерттеуге арналған.

Коэффициенттері айнымалы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу кезінде көңіл бөлетін басты мәселелерді келесі үш категорияның (санаттың) біріне жатқызуға болады. Олар - шешімнің табылуы, жалғыз болуы және сапалық қасиеттері. Бұлардың алғашқы екеуі теңдеудің нақты процеске математикалық модель ретінде сәйкес келуіне жауап берсе, үшінші мәселе процестің жүру сипаты (табиғаты) жайында ақпарат алу үшін қажет. Сондықтан, сызықты және сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің сапалық қасиеттерін зерттеу маңызды болып табылады. Шешімдерінің сапалық қасиеттерін зерттеу кезінде бізді келесі сұрақтар қызықтырады:

1) шешімдердің тегістігі;

2) шешімдердің әр түрлі салмақты кеңістіктердің нормаларындағы бағалаулары;

3) шешімдердің жуықталу мүмкіндіктері.

Эллиптикалық типті теңдеулердің шешімдерінің тегістігі мен шешімдерді әр түрлі нормаларда бағалау мәселелері олардың коэффициенттері регулярлы болып және теңдеу шенелген облыста берілген жағдайда терең зерттелген, зерттеу нәтижелері бірнеше монографияларда толығымен келтірілген. Мысалы, осыған қатысы бар жұмыстардың тізімін Н.Н. Уральцева және О.А. Ладыженская [1], Ж.-Л. Лионс және Э. Мадженес [2] монографияларынан табуға болады.

Дегенмен, бұл жағдайда жасалған әдістер шенелмеген облыста берілген дифференциалдық теңдеулерді (сингулярлы жағдай) зерттеуге жарамсыз. Сингулярлы Штурм-Лиувилль теңдеуін жаңа әдістермен зерттеуді ағылшын математиктері Б.Н. Эверитт және М. Гирц [3-8] бастады. Олар дифференциалдық операторлардың бөліктенуі деген тың ұғым енгізді. Мысалы $L_2 := L_2(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде берілген

$$Ly = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

Штурм-Лиувилль операторы үшін бөліктену ұғымы былай енгізілді. Егер $y\in D(L)$ және $Ly\in L_2$ қатынасынан $q(x)y,\ y''\in L_2$ шығатын болса, онда L операторын $L_2 := L_2(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде бөліктенеді деп атады. Мұндағы $D(L)$ - L операторының анықталу облысы. L операторының бөліктенуі

$$\|y''\|_{L_2(R)} + \|qy\|_{L_2(R)} \le c\left(\|Ly\|_{L_2(R)} + \|y\|_{L_2(R)}\right),\ \ y\in D(L), \tag{2}$$

бағалауының орындалуына эквивалентті. [3-8] жұмыстарда авторлар L операторы бөліктену үшін $q(x)$ потенциалды функциясына қойылатын шарттарды анықтады. Бұл шарттар $q(x)$ функциясымен қатар оның туындыларына да шектеулер қояды. Нақтырақ айтатын болсақ, [3-8] жұмыстарында q функциясы $\inf q(x) > -\infty$ және

$$\left(q^{-\frac{1}{4}}(x)\right)'' q^{\frac{1}{4}}(x) \in L_1$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда L операторының бөліктенетіндігі көрсетілді, сонымен қатар, L операторы бөліктенетіндей тегіс емес q функциясының мысалдары келтірілді.

$$\left(q^{-\frac{1}{4}}(x)\right)'' q^{\frac{1}{4}}(x) \in L_1$$

түріндегі шарттан бір-біріне тәуелсіз М. Өтелбаев [9], Ф.В. Аткинсон [10], К.Х. Бойматов [11-12] және Д.Ж. Раимбеков [13] жұмыстары арылды. Бұл еңбектерде соңғы шарт әдетте резольвентаны бағалау кезінде қолданылатын белгілі Левитан – Титчмарш шартына (бұл шарттар туралы [14 - 17] жұмыстарынан қараңыз) жақын шарттармен (әр авторда әр түрлі) алмастырылды. [9] жұмысында бөліктену мәселесі L_p гильберт кеңістігінде ғана емес, сонымен қатар салмақты $L_{p,l}$ (мұндағы l үзіліссіз салмақты функция) кеңістігінде де зерттелді және Штурм-Лиувилль операторының бөліктенуі жылдам тербелетін потенциалдардың кең класы үшін де (мысалы, $q(x) = e^{|x|}\sin^2 e^{|x|^5}$) көрсетілген. Мұндағы $L_{p,l}$ - нормасы

$$\|f\|_{p,l} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)l(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1 \le p \le +\infty)$$

түрінде анықталған салмақты кеңістік. Кейіннен М. Өтелбаев дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің тегістігі туралы мәселелерді шешу үшін резольвентаны локальды бейнелеудің вариациялық деп атаған арнайы әдісін ұсынды. Көпөлшемді теңдеулер [18] жұмысында қарастырылған, К.Х. Бойматов [11] еңбегінде алынған нәтижелерді эллиптикалық операторлардың қандай да бір класына сөзбе-сөз көшіру арқылы көпөлшемді теңдеулер [18] жұмысында зерттелген.

$q(x)$ дифференциалданбайтын функция болған жағдайда L операторының $L_2 = L_2(-\infty,+\infty)$ және L_p $(1 < p < +\infty)$ кеңістіктерінде бөліктенуінің шарттары алғаш рет М. Өтелбаев пен К.Х. Бойматов еңбектерінде алынды және олардың шәкірттерінің жұмыстарында жалғасын тапты. Коэффициенттері айнымалы эллиптикалық операторларды зерттеуде жаңа әдістер алдымен Штурм-Лиувилль операторы үшін жасалады да, басқа операторларға таратылады. Жоғарыда аталған авторлар Штурм-Лиувилль операторымен қатар Шредингер типті көп өлшемді операторлардың да бөліктену шарттарын алды және алынған нәтижелерді осы операторлардың спектрлерінің қасиеттерін зерттеуге пайдаланды.

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің табылуы мен тегістігі мәселесін Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін шенелмеген облыста М.Б. Мұратбеков және М. Өтелбаев [19] зерттеді. Кейіннен бұл есеп Т.Т. Аманова [20], М.Б. Мұратбеков [21] жұмыстарында қарастырылды. Және [22] мақаласында авторлар сызықты емес

$$Ly = -y'' + q(x,y)y$$

Штурм-Лиувилль операторының $L_1(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде бөліктену шарттарын алды. [23 - 28] еңбектерінде коэффициенттері операторлар болатын

$$Ly = -\left(P(x)y'\right)' + Q(x)y, \qquad x \in (-\infty,+\infty),$$

түріндегі дифференциалдық операторлар зерттелді.

Сонымен, дифференциалдық теңдеудің коэффициенттері шенелмеген болып және теңдеу шексіз аймақта берілген жағдайда сәйкес дифференциалдық оператор үшін (2) түріндегі бөліктену теңсіздігін алу маңызды есеп болып табылады. L операторы үшін алынған (2) түріндегі баға біріншіден $Ly = f$ дифференциалдық теңдеуінің жалпыланған шешімі жататын функциялар класын дәл сипаттауға мүмкіндік береді, екіншіден L дифференциалдық операторының $D(L)$ анықталу облысының нақты сипатталуын қамтамасыз етеді. Мысалы бөліктенетін L Штурм-Лиувилль операторы үшін $D(L) = W_{2,q}^2(R)$, мұндағы $W_{2,q}^2(R)$ - нормасы $\left|y : W_{2,q}^2(R)\right| = \|y''\|_2 + \|q(\cdot)y\|_2$ болатын салмақты С.Л. Соболев кеңістігі. Осыдан (2) түріндегі бағалауының сингулярлы дифференциалдық теңдеу шешімдерінің сапалы қасиеттерін зерттеу үшін функционалдық кеңістіктердің қазіргі заманғы аппаратын қолдануға мүмкіндік беретіні көрінеді. Белгілі ғалым, КСРО ҒА академигі И.М. Гельфанд (2) түріндегі бағалауларды алу эллиптикалық теңдеулерді сызықты операторлардың жалпы теориясы тұрғысынан зерттеудегі негізгі мәселелердің бірі деп атаған ([1]).

[3-13; 15-50] мақалаларында сызықты эллиптикалық дифференциалдық операторлардың кең класы үшін бөліктену мәселелері шешілген және олардың негізінде эллиптикалық теңдеулер шешімдерінің маңызды тегістік және жуықталу қасиеттері алынған. Сол сияқты олармен байланысты сингулярлы дифференциалдық және интегралдық операторлардың спектрлік қасиеттері зерттелген. Аталған жұмыстардағы әдістер, жалпы алғанда, енгізу теориясының, операторлардың спектралдық теориясының терең деректеріне негізделді, сонымен бірге, бұл еңбектерде функционалдық кеңістіктердегі интегралдық операторлар теориясының жетістіктері және жалпыланған шешімнің локалді емес априорлы бағалаулары кеңінен қолданылады. Бұл зерттеулер сингулярлы дифференциалдық теңдеулер теориясының, операторлардың спектралдық теориясының, салмақты функционалдық кеңістіктер мен ондағы интегралдық операторлар теориясының дамуына айтарлықтай әсер етті.

Жоғарыда келтірілген зерттеулердің барлығы оң коэффициентті еркін мүшесі бар сызықты дифференциалдық операторларға арналған. Алайда, көптеген практикалық есептер қасиеттері ізделінді шешімнің аралық (ортаңғы) туындысы бар мүшесінен тәуелді болатын эллиптикалық теңдеулерге алып келеді. Мұндай теңдеулер әдебиетте нұқсанды дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Олардың қатарына, мысалы, аралық (ортанғы) мүшесі бар және потенциалы төменнен шенелмеген Шредингер теңдеуі, еркін мүшесінің коэффициенті ізделінді функцияның туындысынан тәуелді болатын Кортевег де Фриз типті теңдеулер, сол сияқты, кедергісі жылдамдыққа немесе үдеуге пропорционал ортадағы тербелістің дифференциалдық теңдеуі жатады ([51]). Сәйкес операторы симметриялы болған жағдайда нұқсанды дифференциалдық теңдеулер [52-55] мақалаларында зерттелген. Бұл жұмыстарда:

- оператордың өзіне-өзі түйіндестігі,
- оның меншікті мәндерін бағалау,
- оның спектрінің құрылымын анықтау

туралы есептер қарастырылған. Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімінде біз бұл жұмыстардан өзгеше жағдайды, атап айтқанда, симметриялы болмайтын нұқсанды дифференциалдық теңдеулерді зерттейміз. Бұл бөлімде, сонымен қатар, бір квазисызықты нұқсанды дифференциалдық теңдеудің шешілу есебі қарастырылады.

Жоғарыда келтірілген жұмыстардағы қолданылған әдістер жартылай шенелмеген, яғни энергетикалық кеңістіктері Соболев кластарына енбейтін дифференциалдық операторларды зерттеуге мүмкіндік береді. Жартылай шенелмеген операторларға барлық тақ ретті дифференциалдық операторлар жатады. Тақ ретті сызықты және сызықты емес дифференциалдық операторлардың бөліктенуі, спектрлік және аппроксимативтік қасиеттері М. Өтелбаев, М.Б. Мұратбеков, Ж.Ж Айтқожа, К.Н. Оспанов, А. Біргебаев, Т.Т. Аманова, А.Ж. Тогучуев, Б. Алиев және Д. Зейналов, Л. Шустер және М. Сапенов [56-66] мақалаларында зерттелген.

Дегенмен бұл жұмыстардың Ж.Ж Айтқожа және М.Б. Мұратбеков [60], А. Біргебаев және М. Өтелбаев [63], М.Б. Мұратбеков, М.М. Мұратбеков және Қ.Н. Оспанов [64] еңбектерінен басқасы коэффициенттері нақты жағдайға арналған, ал [60; 63] жұмыстарында Гильберт кеңістігі жағдайы қарастырылады. Коэффициенттері комплексмәнді тақ ретті сингулярлы дифференциалдық теңдеулер банах кеңістігінде жүйелі түрде әлі зерттелген жоқ. Мұндай теңдеулер проекциялық әдістерді, соның ішінде Фурьенің айнымалыларды ажырату әдісін көп өлшемді теңдеулерге қолдану кезінде пайда болады.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде біз жоғарғы коэффициенттері айнымалы үшінші ретті сингулярлы дифференциалдық теңдеулерді қарастырып, олардың шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы мәселелерін зерттейміз, сонымен қатар табылған шешім үшін коэрцитивті бағалаудың орындалуын қамтамасыз ететін шарттарды көрсетеміз. Жоғарыда аталған жұмыстарда негізінен

$$Ly = -y''' + q(x)y = f(x)$$

түріндегі теңдеулер қарастырылған, мұндағы $f \in L_p(R),\ R = (-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$.

Жоғарыда айтылғандар бірлесе отырып диссертациялық жұмыстың өзектілігін көрсетеді.

Жұмыстың мақсаты. Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты - шексіз аймақта берілген екінші ретті нұқсанды сингулярлы дифференциалдық операторлардың бөліктенуін және жуықталу қасиеттерін зерттеу. Сонымен қатар, жұмыс коэффициенттері комплексмәнді сингулярлы үшінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің табылуы мен жалғыздығы мәселесін зерттеуге, ол шешім үшін коэрцитивті бағалау орындалатындай шарттарды алуға арналған.

Зерттеу объектісі. Нұқсанды дифференциалдық операторлар, жоғарғы коэффициенті тұрақты емес үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер.

Зерттеу әдістері. Коэффициенттері комплексті екінші және үшінші ретті дифференциалдық теңдеулердің коэрцитивті шешілуі, шешімдердің жатықтығы мен олардың жуықталу қасиеттерін зерттеу кезінде локализация әдісі және функционалдық кеңістіктер теориясының әдістері қолданылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыстың нәтижелері жаңа және келесідей:

- сызықты емес екінші ретті нұқсанды дифференциалдық

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x)$$

теңдеуінің шешілу шарттары табылды;

- коэффициенттері комплексмәнді екінші ретті нұқсанды дифференциалдық

$$ly = -y'' + r(x)y' + s(x)\overline{y}' \qquad (3)$$

операторының қайтарымдылық және бөліктену шарттары алынды;

- Осы (3) операторының резольвентасы үшін Фредгольмдік радиусының екі жақты бағалары және компактылы болу шарты алынды;
- (3) операторының анықталу облысымен байланысты

$$M = \{ y \in L_2 : \|ly\|_2 \le 1 \}$$

жиынының Колмогоров бойынша көлденеңдерінің екіжақты бағалаулары алынды;

- Жоғарғы коэффициенттері айнымалы комплексмәнді үшінші ретті бір дифференциалдық теңдеулердің $L_p = L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < \infty$ кеңістігінде бірмәнді және коэрцитивті шешілу шарттары келтірілді.

Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңыздылығы. Алынған нәтижелер теориялық маңызға ие. Олар дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясында, сонымен қатар студенттер, магистранттар мен докоранттарға дифференциалдық операторлар бойынша арнайы курстар оқу кезінде қолданылуы мүмкін.

Алынған нәтижелерді аппробациялау. Жұмыс нәтижелері «Ломоносов - 2011» студенттер, магистранттар және жас ғылымдарға арналған халықаралық ғылыми конференциясында (Астана қ., 8 – 9 сәуір, 2011 ж.), Түркі әлемді математикалық қоғамының 4-Конгресінде (Баку, 1 – 3 шілде, 2011 ж.), Математика, механика және информатика бойынша IV республикалық студенттік ғылыми-практикалық конференцияда (Астана қ., 5 – 6 сәуір, 2012 ж.), «Ломоносов - 2012» атты студенттер, магистранттар және жас ғылымдарға арналған халықаралық ғылыми конференцияда (Астана қ., 13 – 14 сәуір, 2012 ж.), ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаевтың 70 жылдық мерейтойына арналған «Функционалдық анализ және оның қолданылулары» халықаралық ғылыми конференциясында (Астана қ., 2 – 5 қазан, 2012 ж.), Лулео технологиялық университетінің Математика департаменті отырысында (Лулео қ., Швеция, 20 наурыз, 2013 ж.) және ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаев, ф.-м.ғ.д. Р. Ойнаров, ф.-м.ғ.д. Е.Д. Нұрсұлтанов, ф.-м.ғ.д. Қ.Н. Оспанов жетекшілігімен өтетін «Функционалдық анализ және оның қолданылуы» ғылыми семинарда (Астана қ.) баяндалып, талқыланды.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 14 жұмыс жарық көрді. Соның ішінде 7 жұмыс ғылыми конференциялардың еңбектері және тезистері жинағында, 7 мақала ғылыми журналдарда жарияланды. Бір жұмыс ISI импакт факторлы журналда басылып шықты. Жарияланымдар тізімі төмендегідей:

1 Ахметкалиева Р.Д. Об условиях разрешимости одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка // Ломоносов - 2011: Материалы международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. - Астана, 8-9 апреля, 2011. С.27-28

2 Akhmetkaliyeva R.D. About conditions for the solvability of a class of third-order differential equations // The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS). - Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011. C. 150

3 Ахметкалиева Р.Д., Шайбуйдакова Г.Е. Үшінші ретті дифференциалдық теңдеу жайлы // IV Республиканская студенческая научно-практическая

конференция по математике, механике и информатике: Сборник докладов. - Астана, 5-6 апреля, 2012. С. 41-42

4 Ахметкалиева Р.Д. Об условиях обратимости и разделимости вырожденного дифференциального оператора второго порядка // Ломоносов - 2011: Материалы международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. - Астана, 13-14 апреля, 2012. С.27-29

5 Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space // Centre de Recerca Matematica. UAB, Barcelona, Spain. Preprint num.1080. December 2011. -P.1-12

6 Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2012, No. 66, 1-12; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

7 Akhmetkaliyeva R.D., Ospanov K.N., Persson L.-E., Wall P. Some new results concerning a class of third order differential equations // Research Report 5, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Lulea University of Technology, Lulea 2012

8 Akhmetkaliyeva R.D. Coercive estimates for solutions of one class of third order differential equations // Функциональный анализ и его приложения: Материалы международной научной конференции. – Астана, 2-5 октября, 2012. С.214-215

9 Akhmetkaliyeva R.D. About conditions for the solvability of a class of third-order differential equations // Research Report 7, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Lulea University of Technology, Lulea 2012

10 Ахметкалиева Р.Д. Коэрцитивные оценки решения одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник КарГУ им. Е.А. Букетова. №2(70)-2013. С. 28-35.

11 Оспанов К.Н., Ахметкалиева Р.Д. О разделимости вырожденного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Вестник КарГУ им. Е.А. Букетова. №2(70)-2013. С. 132-142.

12 Ахметкалиева Р.Д. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения третьего порядка с комплекснозначными коэффициентами // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. № 4(95) – 2013. С. 355-361.

13 Оспанов К.Н., Ахметкалиева Р.Д. О компактности резольвенты вырожденного дифференциального оператора второго порядка // Тез. докл. межд. конф. «Актуальные пробл. теории управления топологии и операт. уравнений». - Бишкек, 2013. - С. 108-109.

14 Ахметкалиева Р.Д. Коэффициенттері комплексмәнді үшінші ретті дифференциалдық теңдеудің коэрцитивті шешілуі // Сб. докладов межд. научно-практ. конф. «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт» – Тараз, 27-28 сентября, 2013. С. 99-100

Диссертацияның құрылымы. Диссертация кіріспеден, екі бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерге бөлінген), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Жұмыстың бірінші бөлімде біз келесі түрдегі сызықты емес дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x), \tag{4}$$

мұндағы $x \in R$, r - нақты мәнді функция, ал $f \in L_2$.

Мұнда (4) теңдеуінің шешілімділік шарттары қарастырылып, төмендегі 0.1 теорема дәлелденді.

Анықтама 0.1. Егер $y \in L_2$ функциясы үшін екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылып кез келген $\theta \in C_0^{\infty}(R)$ үшін $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|\theta(y_n - y)\|_2 \to 0$, $\|\theta(Ly_n - f)\|_2 \to 0$ қатыстары орындалса, онда y (4) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Теорема 0.1. Айталық r функциясы екі аргументі бойынша да үзіліссіз дифференциалданатын болсын және

$$r \geq \delta_0 \sqrt{1 + x^2} \quad (\delta_0 > 0), \quad \sup_{x,\eta \in R: |x-\eta| \leq 1} \ \sup_{A > 0} \ \sup_{|C_1| \leq A, |C_2| \leq A, |C_1 - C_2| \leq A} \frac{r(x, C_1)}{r(\eta, C_2)} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда (4) теңдеуінің y шешімі бар болады және

$$\|y''\|_2 + \|[r(\cdot, y)]y'\|_2 < \infty$$

орындалады.

Сонымен қатар, бұл бөлімнің үшінші бөлімшесінде коэффициенттері комплекс мәнді екінші ретті нұқсанды дифференциалдық операторды қарастырамыз.

Айталық, l - шексіз дифференциалданатын және тұғыры компакт функциялардың $C_0^{\infty}(R)$ жиынында анықталған $l_0 y = -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}'$ өрнегінің L_2 кеңістігіндегі тұйықталуы болсын. Мұндағы, r және s - комплекс мәнді функциялар, ал $\bar{y}$ - y-ке түйіндес функция.

Төмендегідей белгілеулер енгіземіз:

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)} \quad (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)} \quad (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau) \right),$$

мұндағы g және h - берілген функциялар.

$C_{loc}^{(1)}(R)$ арқылы барлық $\psi \in C_0^{\infty}(R)$ функциялары үшін $\psi f \in C^{(1)}(R)$ болатындай f функцияларының жиынын белгілейміз.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижелері төмендегідей:

Теорема 0.2. Айталық r және s функциялары

$$r, s \in C_{loc}^{(1)}(R), \ \mathrm{Re}\, r - |s| \geq \delta > 0, \ \gamma_{1,\mathrm{Re}\, r} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда l операторы қайтарымды және оған кері оператор l^{-1} барлық L_2 кеңістігінде анықталған.

Сонымен егер теорема шарттары орындалса, онда $ly = f$ теңдеуі бірмәнді шешіледі.

Егер

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 \leq c\left(\|ly\|_2 + \|y\|_2\right)$$

теңсіздігі әрбір $y \in D(l)$ үшін орындалатын болса, онда l операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді деп аталады. Мұндағы $\|\cdot\|_2$ - L_2 кеңістігінің нормасы.

Келесі тұжырым l операторының L_2 кеңістігінде бөліктену шартын береді.

Теорема 0.3. Айталық, r және s функциялары

$$\begin{cases} r, s \in C_{loc}^{(1)}(R), \ \ \mathrm{Re}\, r - \rho\,[|\mathrm{Im}\, r| + |s|] \geq \delta > 0, \ \gamma_{1,\mathrm{Re}\, r} < \infty, \ 1 < \rho < 2, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\mathrm{Re}\, r(x)}{\mathrm{Re}\, r(\eta)} \leq c \quad at \quad |x - \eta| \leq 1, \ c > 1. \end{cases} \tag{5}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in D(l)$ үшін

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 \leq c_l \|ly\|_2,$$

бағалауы орындалады, басқаша айтқанда l операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді.

Теорема 0.4. r және s функциялары (5) шарттарын қанағаттандырсын және $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha_{1,\mathrm{Re}\,r}(t)=0$, $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\beta_{1,\mathrm{Re}\,r}(\tau)=0$ теңдіктері орындалсын. Онда l^{-1} операторы L_2 кеңістігінде компактылы болады.

Келесі теореманы келтіру үшін бізге мынадай мағлұматтар қажет.

0.4 теоремасының шарттары орындалсын. $M=\{y\in L_2:\|ly\|_2\le 1\}$ жиынын қарастырамыз. Айталық $d_k=\inf\limits_{\Sigma\subset\{\Sigma\}}\sup\limits_{y\in M}\inf\limits_{w\in\Sigma}\|y-w\|_2$ ($k=0,1,2,...$) - M жиынының L_2 кеңістігіндегі Колмогоров бойынша k-көлденеңдері болсын, мұндағы $\{\Sigma_k\}$ - L_2 кеңістігіндегі өлшемі k - дан аспайтын барлық Σ_k ішкі кеңістіктердің жиыны. $N_2(\lambda)$ арқылы берілген λ оң санынан кіші емес d_k көлденеңдердің санын белгілейміз.

Көлденеңдердің $N_2(\lambda)$ үлестірім функциясының бағалауы $ly=f$ теңдеуінің шешімдерінің жуықтау мәселелерінде маңызды рөл атқарады.
Келесі тұжырым орынды.

Теорема 0.5. Айталық, 0.4 теорема шарттары орындалсын және q функциясы $\gamma_{q,\mathrm{Re}\,r}<\infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда келесі екі жақты бағалаулар

$$c_1\lambda^{-2}\mu\left\{x:|q(x)|\le c_2^{-1}\lambda^{-1}\right\}\le N_2(\lambda)\le c_3\lambda^{-2}\mu\left\{x:|q(x)|\le c_2\lambda^{-1}\right\}$$

орындалады, мұндағы μ - Лебег өлшемі.

Атап өтетін нәрсе, мұнда, егер λ шектеусіз өссе, онда дәлелденген теңсіздіктердің оң және сол жақтары нөлге бірдей жылдамдықпен ұмтылады. Мұндай теңсіздіктер

$$-y''+r(x)y'+s(x)\overline{y}'=f$$

теңдеуінің шешімін жуықтап табу есептерінде қолданыс табуы мүмкін.

Бірінші бөлімнің төртінші бөлімшесінде осы l операторының ρ_L Фредгольм радиусының бағалаулары алынады.

Теорема 0.6. Айталық, r және s үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын және

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, r - \rho \left[|\mathrm{Im}\, r| + |s| \right] \geq \delta > 0, \quad 1 < \rho < 2, \\ \gamma_{\mathrm{Re}\, r} < \infty, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\mathrm{Re}\, r(x)}{\mathrm{Re}\, r(\eta)} \leq c \quad \text{при} \quad |x - y| \leq 1, \end{cases}$$

шартын қанағаттандырсын. Онда l^{-1} операторының $\rho_{l^{-1}}$ Фредгольм радиусы үшін

$$c_2^{-1} \leq \rho_{l^{-1}} \gamma_0 \leq c_2$$

бағалаулары орындалады, мұндағы

$$\gamma_0 = \max\left(\overline{\lim_{\tau \to -\infty}} \beta_{\mathrm{Re}\, r}(\tau), \overline{\lim_{t \to +\infty}} \alpha_{\mathrm{Re}\, r}(t) \right).$$

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде біз жоғарғы коэффициенттері тұрақты болмайтын үшінші ретті дифференциалдық

$$(L + \lambda E) y \equiv -m_1(x) \left(m_2(x) \left(m_3(x) y' \right)' \right)' + [q(x) + ir(x) + \lambda] y = f(x) \tag{6}$$

теңдеуін қарастырып, оның шешімінің бар болуы және жалғыздығы мәселелерін зерттейміз, мұндағы $f \in L_p$, $\lambda \geq 0$.

Сонымен қатар y шешім үшін

$$\left\| m_1(x) \left(m_2(x) \left(m_3 y' \right)' \right)' \right\|_p^p + \left\| (q(x) + ir(x) + \lambda) y \right\|_p^p \leq c_0 \| f(x) \|_p^p \tag{7}$$

бағалуының орындалуын қамтамасыз ететін шарттарды қарастырамыз.

Анықтама 0.2. Егер $y(x) \in L_p(R)$ функциясы үшін n шексіздікке ұмтылғанда $\|y_n - y\|_p \to 0$, $\|(L + \lambda E) y_n - f\|_p \to 0$ болатындай үзіліссіз және шексіз дифференциалданатын финитті функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылса, онда y функциясы (6) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Төмендегідей нәтижелер алынды.

Теорема 0.7. Айталық, $q(x)$, $r(x)$, $m_1(x)$ функциялары R - де үзіліссіз, $m_2 \in C^{(1)}_{loc}(R)$ $m_3 \in C^{(2)}_{loc}(R)$ және төмендегі шарттар орындалсын

$$m_1(x) \geq 1,\ m_2(x) \geq 1,\ m_3(x) \geq 1,\ \frac{q(x)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k^2(x)} \geq 1, \quad r(x) \geq 1, \tag{8}$$

$$c^{-1} \leq \frac{m_k(x)}{m_k(\eta)}, \frac{q(x)}{q(\eta)}, \frac{r(x)}{r(\eta)} \leq c,\ (k = 1,2,3)\ \ x,\eta \in R, \quad |x-\eta| \leq 1, \tag{9}$$

$$|m_2'(x)| \leq cm_2(x), \quad \left|m_3^{(j)}(x)\right| \leq cm_3(x) \quad j = 1,2,\ x \in R, \tag{10}$$

$$\sup_{|x-\eta|\leq 1} \frac{|W_\lambda(x) - W_\lambda(\eta)|}{|W_\lambda(x)|^\nu |x-\eta|^\mu} < +\infty, \quad 0 < \nu < \frac{\mu}{3} + 1, \quad \mu \in (0,1], \quad \lambda \geq 0, \tag{11}$$

мұндағы

$$W_\lambda(x) := \frac{|q(x) + \lambda + ir(x)|}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}.$$

Онда барлық $\lambda \geq \lambda_0$ үшін (6) теңдеудің y шешімі бар болатындай $\lambda_0 \geq 0$ саны табылады.

Теорема 0.8. Айталық, $q(x)$, $r(x)$ функциялары R - де үзіліссіз, $m_1 \in C^{(3)}_{loc}(R)$, $m_2 \in C^{(2)}_{loc}(R)$, $m_3 \in C^{(2)}_{loc}(R)$ болсын, және (8), (9), (11) шарттарын және

$$\left|m_1^{(j)}(x)\right| \leq cm_1(x), \quad j = \overline{1,3}, \quad \left|m_k^{(i)}(x)\right| \leq cm_k(x), \quad k = 2,3, \quad i = 1,2,\ x \in R$$

шартын қанағаттандырсын. Онда (6) теңдеудің шешімі y жалғыз және ол үшін (7) бағалауы орындалады.

Қорытынды бөлімде алынған нәтижелер жалпыланған.

1 ЕКІНШІ РЕТТІ НҰҚСАНДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАР

1.1 Кейбір қажетті белгілеулер, анықтамалар мен көмекші нәтижелер

R^n - n өлшемді нақты евклид кеңістігі, дербес $n=2$ жағдайында екі өлшемді $z=(x,y)$ нүктелерінің евклид кеңістігін аламыз, мұндағы $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$.

Ω - R^n кеңістігіндегі ашық облыс, ал $\overline{\Omega}$ арқылы Ω жиынының тұйықтамасын белгілейік;

Айталық, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ болсын, мұндағы $\alpha_j\geq 0$ - бүтін сандар. Және $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ деп алайық.

$C^l(\overline{\Omega})$, $l=0,1,2,...$ - $\overline{\Omega}$ аймағында l - ге дейінгі үзіліссіз дербес

$$D^{\alpha}u:=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2...\partial^{\alpha_n}x_n},\ \text{мұндағы}\ |\alpha|\leq l$$

туындылары бар үзіліссіз функциялар жиыны.

$C^{\infty}(\overline{\Omega})$ - $\overline{\Omega}$ аймағында шексіз дифференциалданатын функциялар жиыны;

Анықтама 1.1.1. $\overline{\Omega}$ жиынында анықталған u функциясының тұғыры деп $\{x\in\Omega:u(x)\neq 0\}$ жиынын айтамыз және supp$u$ арқылы белгілейміз.

Анықтама 1.1.2. $\overline{\Omega}$ жиынында үзіліссіз және тұғыры supp$u\subseteq\Omega$ болатын u функциясы $\overline{\Omega}$ жиынында финитті деп аталады.

$C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$ - $\overline{\Omega}$ жиынында шексіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиыны.

L_2 - Ω жиынында Лебег бойынша өлшемді және

$$\|u\|_{2,\Omega}=\left[\int_{\Omega}|u|^2\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

нормасы ақырлы болатын функциялардың гильберт кеңістігі;

$W_2^k(\Omega)$ - $k\geq 1$ реттіге дейінгі ($k\geq 1$ реттіні қоса) Соболев бойынша барлық жалпыланған туындылары бар, сонымен қатар

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)}=\left[\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\Omega}|D^{\alpha}f|^2\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

нормасымен $L_2(\Omega)$ кеңістігінде жататын $L_2(\Omega)$ - дағы функциялар кеңістігі.

Егер A - қандай да бір оператор болса, онда оның анықталу облысы $D(A)$ арқылы, ал мәндер облысы $R(A)$ арқылы белгіленеді.

Анықтама 1.1.3. Егер оператордың анықталу облысындағы кез келген x_1 және x_2 үшін $x_1 \neq x_2$ қатынасынан $y_1 = Ax_1 \neq y_2 = Ax_2$ шықса, онда A операторы өзара бірмәнді деп аталады.

Егер A операторы $D(A)$ анықталу облысын $R(A)$ мәндер облысына өзара бірмәнді бейнелейтін болса, онда $R(A)$ - ны $D(A)$ - ға бейнелейтін кері бейнелеу немесе кері A^{-1} операторы бар болады.

Анықтама 1.1.4. Егер кез келген $\{x_n\} \subset D(A)$ тізбегі үшін $x_n \to x_0$ және $Ax_n \to y_0$ қатыстарынан $x_0 \in D(A)$ және $y_0 = Ax_0$ шығатын болса, онда A операторы тұйық деп аталады.

Егер A операторы тұйық болмаса, онда ол тұйық операторға дейін кеңейтілуі мүмкін. Бұл операция тұйықтау операциясы деп аталады.

Оператордың тұйықталу критерийі: A тұйықталатын оператор болу үшін $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to 0$ және $Ax_n \to y$ қатыстарынан $y = 0$ теңдігі шығуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама 1.1.5. Егер A операторы кез-келген шенелген жиынды компакт жиынға бейнелейтін болса немесе $D(A)$ облысының элементтерінен тұратын әрбір шенелген $\{x_n\}$ тізбегінен жинақталатын тізбекше бөліп алу мүмкін болса, онда A операторы компактылы (жеткілікті үзіліссіз) деп аталады.

Айталық, X және Y - нормаланған кеңістіктер және A X кеңістігін Y кеңістігіне бейнелейтін шенелген оператор болсын. φ функционалын келесі түрде анықтайық:

$$\varphi(x) = (x, \varphi) = (Ax, f), \quad x \in X, \quad f \in Y^* \tag{1.1}$$

мұндағы Y^* - Y кеңістігіне түйіндес кеңістік.

φ функционалының сызықтылығын және $D(\varphi) = X$ екенін тексеру қиын емес. Сонымен, әрбір $f \in Y^*$ элементіне (1.1) формула бойынша $\varphi \in X^*$ элементі сәйкес қойылады, мұндағы X^* - X кеңістігіне түйіндес кеңістік. Яғни, сызықты үзіліссіз $\varphi = A^* f$ операторы берілген. A^* операторы A операторына түйіндес деп аталады.

Анықтама 1.1.6. Егер A $L_2(\Omega)$ гильберт кеңістігінде әрекет ететін оператор болып, кез-келген $u,\upsilon \in D(A)$ үшін $\langle Au,\upsilon\rangle = \langle u, A\upsilon\rangle$ теңдігі орындалса, онда A симметриялы оператор делінеді. Ал егерде A симметриялы оператор болып $\langle Au,\upsilon\rangle = \langle u,w\rangle$ теңдігінен, мұндағы υ және w бекітілген, ал u - $D(A)$ облысындағы кез-келген элемент, $\upsilon \in D(A)$ және $w = A\upsilon$ екені шығатын болса, онда A өзіне - өзі түйіндес оператор деп аталады.

Енді Колмогоров бойынша k-көлденеңдер ұғымының анықтамасы мен олардың қасиеттерін келтірейік.

Айталық, M - H гильберт кеңістігінің центрлі-симметриялық (яғни $M = -M$) ішкі жиыны болсын.

$$d_k = \inf_{\{G_k\}} \sup_{u\in M} \inf_{\upsilon\in G_k} \|u-\upsilon\|, \quad k = 0,1,2,...$$

шамасы M жиынының Колмогоров бойынша k-көлденеңдері деп аталады, мұндағы G_k өлшемі k-ға тең ішкі кеңістіктер.

d_k $(k = 1,2,...)$ көлденеңдердің төмендегідей қасиеттері бар:

1) $d_0 \le d_1 \le d_2 \le ...$;

2) $d_k(\widetilde{M}) \le d_k(M)$, $\widetilde{M} \subset M$, $k = 1,2,3,...$;

3) $d_k(nM) = nd_k(M)$, $n > 0$, $nM = \{x' = nx, x \in M\}$.

Айталық, $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, q)$ - $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігінің

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{l}{2}}u\right\|_{L_p(\Omega)}^p + \int_\Omega q(t)\,|u(t)|^p\,dt, \; l > 0,\; 1 \le p < \infty,$$

нормасы бойынша толықтырылуы болсын, мұндағы $q(t)$ - теріс емес функция, Ω - R^n - дегі ашық (шенелген немесе шенелмеген) жиын. $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, q)$ кеңістігі дифференциалдық теңдеулерді зерттеу кезінде жалғыз түрде пайда болады. М. Өтелбаев енгізген $q^*(x)$ функциясы былайша анықталады:

$$q^*(x) = \inf_{Q_d(x)\subseteq\Omega}\left(d^{-1} : d^{-pl+n} \ge \int_{Q_d(x)} q(t)dt\right), \qquad pl > n,$$

мұндағы $Q_d(x)$ - центрі $x \in \Omega$ нүктесінде болатын және қабырғалары d-ға тең текше (куб).

Анықтама 1.1.7. Айталық, B_1 және B_2 - банах кеңістіктері болсын. Егер B_1 кеңістігі B_2 кеңістігінің ішкі кеңістігі болса және барлық $x \in B_1$ үшін

$$\|x\|_{B_2} \le c\|x\|_{B_1}$$

теңсіздігі орындалатындай $c > 0$ тұрақтысы табылса, онда B_1 кеңістігі B_2 кеңістігіне енгізілген деп аталады және $B_1 \subset B_2$ деп жазылады.

Анықтама 1.1.7$^/$. Айталық, B_1 және B_2 - банах кеңістіктері болсын. Онда B_1 кеңістігінің әрбір x элементін B_2 кеңістігінің сол элементіне бейнелейтін E бейнелеуі B_1-ді B_2-ге енгізу операторы деп аталады және $E : B_1 \to B_2$ деп белгіленеді.

Теорема 1.1.1. [46]. $E : \overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, q) \subset L_p$ енгізу операторы компактылы болуы үшін

$$q^*(x) \to \infty, \quad |x| \to \infty$$

теңдігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Айталық B_1 және B_2 - банах кеңістіктері және $B_1 \subset B_2$ болсын.

Анықтама 1.1.8. $B_1 \subset B_2$ енгізуінің k - көлденеңдері деп B_2-дегі B_1 кеңістігіндегі бірлік шардың Колмогоров бойынша k - көлденеңдерін айтады.

Берілген $\lambda > 0$ санынан үлкен d_k көлденеңдердің санын $N(\lambda) = \sum_{d_k > \lambda} 1$ деп белгілейміз, оны басқаша $B_1 \subset B_2$ енгізуінің көлденеңдерінің үлестірім функциясы деп те атайды.

k - көлденеңдер шамасы олардың үлестірім функциясы арқылы

$$d_k = \inf\{\lambda > 0 : N(\lambda) \le k\}, \ k > 0,$$

формуласымен есептеледі. Бұл бағалаудан d_k көлденеңдері бағалауының орнына олардың үлестірім функцияларының бағалауларын зерттеумен айналысуға болатындығы шығады.

Айталық $N(\lambda)$ функциясы

$$\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, q) \subset L_p$$

енгізуі көлденеңдерінің үлестірім функциясы болсын.

Теорема 1.1.2. [43-47]. Айталық $pl > n$ болсын. Онда

$$c^{-1}\lambda^{-\frac{n}{l}}\mu\left(x\in\Omega : q^*(x)\le\lambda^{-\frac{1}{l}}\right)\le N(\lambda)\le c\lambda^{-\frac{n}{l}}\mu\left(x\in\Omega : q^*(x)\le\lambda^{-\frac{1}{l}}\right)$$

бағалаулары орындалады, мұндағы $\mu(\cdot)$ - Лебег өлшемі, c - тек p,l,n параметрлерінен тәуелді.

Егер $d = 1$ және

$$\sup_{\substack{|x-y|\le 1\\ x,y\in R^n}}\frac{q(x)}{q(y)}\le c \tag{1.2}$$

шарты орындалса, онда

$$c_0^{-1}q^{pl-n}(x)\le q^*(x)\le c_0q^{pl-n}(x)$$

бағалауы орынды, мұндағы $c_0 > 1$. Сонымен, 1.1.1 және 1.1.2 теоремаларын $q(x)$ функциясы терминінде келесі түрде жазуға болады:

Теорема 1.1.3. Айталық $pl > n$ болсын және оң $q(x)$ функциясы үшін (1.2) шарты орындалсын. Онда $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, q)\subset L_p$ енгізу операторы компактылы болуы үшін $|x|\to +\infty$ ұмтылғанда $q(x)\to +\infty$ қатысы орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 1.1.4. Айталық $pl > n$ болсын және (1.2) шарты орындалсын. Онда

$$c^{-1}\lambda^{-\frac{n}{l}}\mu\left(x\in\Omega : q(x)\le\lambda^{-\frac{1}{l(pl-n)}}\right)\le N(\lambda)\le c\lambda^{-\frac{n}{l}}\mu\left(x\in\Omega : q(x)\le\lambda^{-\frac{1}{l(pl-n)}}\right)$$

бағалаулары орындалады.

Теорема 1.1.5. (Шаудер) Айталық D - X банах кеңістігіндегі бос емес тұйық шенелген дөңес ішкі жиын болсын және $A: X\to X$ операторы компактылы болып, D жиынын өз-өзіне бейнелесін. Онда A операторының D жиынында жылжымайтын нүктесі бар.

$R_+ = (0,+\infty)$ деп белгілейік.

Теорема 1.1.6. ([29]) Айталық, $1 < p < \infty$ болсын. Онда:
а) егер

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x |\rho(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty t^{(k-1)p'}V^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} = 0$$

болса, онда

$$F = \left\{\rho(t)f(t):\ f(t)\in \dot{C}^\infty(R_+),\quad \int_0^\infty \left|V(t)f^{(k)}(t)\right|^p dt \le 1\right\}$$

жиыны $L_p(R_+)$ кеңістігінде салыстырмалы компактылы болады,
б) егер F жиыны $L_p(R_+)$ кеңістігінде салыстырмалы компактылы болса, онда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x |\rho(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty (t-x)^{(k-1)p'}V^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} = 0$$

теңдігі орындалады.

Лемма 1.1.1. $Ly = -y'' + q(x)y$ операторы L_2 кеңістігінде бөліктенуі үшін қандай да бір $\lambda\in R$ мәнінде $L+\lambda E$ операторы L_2 кеңістігінде бөліктенуі қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі:* Айталық, L операторы бөліктенетін болсын. Анықтама бойынша L бөліктенетін болса, онда $y\in L_2$ және $Ly\in L_2$ қатыстарынан $y'', q(x)y\in L_2$ шығады. Бұдан, егер $y, Ly\in L_2$ болса, онда $(L+\lambda E)y\in L_2$ және $y'', q(x)y\in L_2$, яғни $L+\lambda E$ операторы бөліктенеді.

Жеткіліктілігі: Айталық, $L+\lambda E$ операторы бөліктенетін болсын. Онда $y\in L_2$ және $(L+\lambda E)y\in L_2$ қатыстарынан $y'', (q(x)+\lambda)y\in L_2$ шығады. Сәйкесінше, $y\in L_2$, $(L+\lambda E)y\in L_2$ қатыстарынан $Ly\in L_2$ шығады, бұдан және $y'', (q(x)+\lambda)y\in L_2$ екендігінен L операторының бөліктенетіндігін аламыз.

Келесі тұжырым [67] жұмысынан алынды. Ол $p=2$ жағдайында [68] жұмысында алғаш рет дәлелденген.

Лемма 1.1.2. Егер $1\le p\le\infty$ болса, онда тек

$$M = \sup_{t>0}\left\{\int_0^t |g(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_t^\infty |h(x)|^{-p'} dx\right\}^{\frac{1}{p'}} < \infty, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1,$$

шарты орындалғанда ғана

$$\left\{\int_0^\infty \left|g(x)\int_x^\infty y(t)dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le C\left\{\int_0^\infty |h(x)y(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{1.3}$$

теңсіздігі орындалатындай ақырлы C тұрақтысы табылады. Сонымен қатар, егер C (1.3) теңсіздігі ақиқат болатындай ең кіші тұрақты болса, онда ол

$$M \le C \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} M$$

теңсіздіктерін қанағаттандырады.

1.2 Нұқсанды екінші ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеудің Гильберт кеңістігінде шешілімділігі

Диссертациялық жұмыстың бұл бөлімінде сызықты емес екінші ретті дифференциалдық

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x), \tag{1.4}$$

теңдеуінің шешілу шарттары табылады, мұндағы $x \in R$, r - нақты функция, $f \in L_2$.

Анықтама 1.2.1. Егер $y \in L_2$ функциясы үшін екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ тізбегі табылып, кез-келген $\theta \in C_0^\infty(R)$ үшін $n \to \infty$ жағдайында $\|\theta(y_n - y)\|_2 \to 0$, $\|\theta(Ly_n - f)\|_2 \to 0$ қатыстары орындалса, онда y функциясы (1.4) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі төмендегідей:

Теорема 1.2.1. Айталық r функциясы екі аргументі бойынша да үзіліссіз дифференциалданып,

$$r \ge \delta_0(1+x^2) \quad (\delta_0 > 0), \tag{1.5}$$

және әрбір оң A саны үшін

$$\sup_{|x-y|\le 1}\ \sup_{|C_1|\le A, |C_2|\le A, |C_1-C_2|\le A} \frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)} < \infty \qquad (1.6)$$

теңсіздіктері орындалсын. Онда (1.4) теңдеуінің y шешімі бар және

$$\|y''\|_2 + \|[r(\cdot,y)]y'\|_2 < \infty \qquad (1.7)$$

болады.

Мысалдар.

1. $r(x,y) = 3 + 2x^4 + e^{5x} + y^2$ функциясы (1.5), (1.6) шарттарын қанағаттандырады. Шынында да

$$r(x,y) \ge 3 + x^4 \ge 1 + 2(1 + x^4) \ge 2 + x^2 \ge 1 + x^2 (\delta_0 = 1),$$

және егер c_1, c_2, A сандары $|c_1 - c_2| \le A, |c_1| \le A, |c_2| \le A$ шарттарын қанағаттандырса, онда

$$\sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{r(x,c_1)}{r(\eta,c_2)} = \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{3 + 2x^4 + e^{5x} + c_1^2}{3 + 2\eta^4 + e^{5\eta} + c_2^2} \le$$

$$\le \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{2 + 2x^4}{3 + 2\eta^4} + \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{e^{5x}}{e^{5\eta}} + \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{3 + c_1^2}{3 + c_2^2} \le$$

$$\le \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{2 + 2(|x-\eta| + |\eta|)^4}{3 + 2\eta^4} + \sup_{|x-\eta|\le 1} e^{5|x-\eta|} + \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{3 + (|c_1 - c_2| + |c_2|)^2}{3 + c_2^2} \le$$

$$\le \sup_{\eta\in R} \frac{2 + 8(1 + \eta^4)}{3 + 2\eta^4} + e^5 + \sup \frac{3 + 2c_2^2 + A^2}{3 + c_2^2} \le 4 + e^5 + 2 + \frac{1}{3}A^2.$$

2. (1.5), (1.6) шарттарын

$$r(x,y) = 2 + x^2 + e^y$$

функциясы да қанағаттандырады. Себебі

$$r \ge 1 + x^2,$$

және егер $A > 0$ саны беріліп c_1, c_2 мына $|c_i| \le A$ $(i = 1,2)$, $|c_1 - c_2| \le A$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын болса, онда

$$\sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{r(x,c_1)}{r(\eta, c_2)} = \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{2 + x^2 + e^{c_1}}{2 + \eta^2 + e^{c_2}} \le \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{2 + x^2}{2 + \eta^2} + \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{e^{c_1}}{2 + \eta^2 + e^{c_2}} \le$$

$$\le \sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{2 + 2\left(1 + \eta^2\right)}{2 + \eta^2} + e^{|c_1 - c_2|} \le 2 + e^A .$$

Жоғарыдағы 1.2.1 теореманы дәлелдеу үшін төмендегі көмекші леммаларды дәлелдейміз:

Алдымен келесі түрдегі қажетті белгілеулерді енгізейік:

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_2(t,+\infty)} \ (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_2(-\infty,\tau)} \ (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau) \right),$$

мұндағы g және h - берілген функциялар.

Келесі тұжырым 1.1.2 леммасының салдары болып табылады.

Лемма 1.2.1. Айталық, g, h функциялары $\gamma_{g,h} < \infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда $y \in C_0^\infty(R)$ үшін

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)y(x)|^2 dx \le C \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)y'(x)|^2 dx \qquad (1.8)$$

теңсіздігі орындалады. Сонымен қатар, егер C тұрақтысы (1.8) теңсіздігі орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда ол $\gamma_{g,h} \le C \le 2\gamma_{g,h}$ теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Дәлелдеу. Айталық, $y \in C_0^\infty(R)$ болсын. $R_- = (-\infty, 0)$, $R_+ = (0, +\infty)$ деп белгілейік. Және $z(x) = y(-x)$, $x < 0$ деп ұйғарайық. Онда y финитті функция болғандықтан, 1.2.0 леммасында $y(x) = \int_x^{+\infty} u(t)dt$ деп алып

$$\int_0^{+\infty} |q(x)y(x)|^2 dx \leq c^2 \int_0^{+\infty} |r(x)y'(x)|^2 dx, \quad y \in C_0^\infty(R_+) \tag{1.9}$$

теңсіздігіне келеміз. Және, егер c тұрақтысы (1.9) бағалауы орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$\sup_{t>0} \alpha_{q,r}(t) \leq c \leq \sup_{t>0} 2\alpha_{q,r}(t)$$

теңсіздіктері орындалады, мұндағы

$$\alpha_{q,r}(t) = \left(\int_0^t |q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{+\infty} |r(x)|^{-2} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Енді, айталық $y \in C_0^\infty(R_-)$ болсын. Онда айнымалыға $x = -t$ формуласымен алмастыру жасап,

$$\int_{-\infty}^0 |q(x)y(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |q(-t)y(-t)|^2 dt$$

теңдігін аламыз. Бұл жерде $y(-t) = z(t)$ және $q(-t) = q_1(t)$ деп белгілеп,

$$\int_0^{+\infty} |q(-t)y(-t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |q_1(t)z(t)|^2 dt$$

қатысына келеміз. (1.9) теңсіздігін пайдаланып, қарапайым алмастырулар жасау арқылы төмендегі өрнекті аламыз:

$$\int_0^{+\infty} |q_1(t)z(t)|^2 dt \leq c_1^2 \int_0^{+\infty} |r_1(t)z'(t)|^2 dt =$$

$$= -c_1^2 \int_0^{+\infty} |r_1(-x_1)z'(-x_1)|^2 d(-x_1) = c_1^2 \int_{-\infty}^0 |r_1(x)z'(x)|^2 dx \tag{1.10}$$

және

$$M_1 = \sup_{t>0}\left(\int_0^t |q_1(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{+\infty}|r_1(x)|^{-2}dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q_1(-z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r_1(-z)|^{-2}dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Айталық, $r_1(-z) = r(z)$ болсын, мұндағы $z \in (-\infty, 0)$. Онда жоғарыдағы теңдіктен

$$\sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q_1(-z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r_1(-z)|^{-2}dz\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r(z)|^{-2}dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

екенін аламыз. Осыдан $-t = \tau$ алмастыруын жасап

$$\sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q_1(-z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r_1(-z)|^{-2}dz\right)^{\frac{1}{2}} := \sup_{\tau<0}\beta_{q,r}(\tau)$$

екенін байқаймыз. Мұндағы

$$\beta_{q,r}(\tau) = \left(\int_{\tau}^{0}|q(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\tau}|r(x)|^{-2}dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сонымен қатар, 1.2.0 леммасы бойынша егер c_1 (1.10) теңсіздігі орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$\sup_{\tau<0}\beta_{q,r}(\tau) \le c_1 \le 2\sup_{\tau<0}\beta_{q,r}(\tau)$$

теңсіздіктері орынды.

(1.9) және (1.10) теңсіздіктерін пайдаланып

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|q(x)y(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0}|q(x)y(x)|^2 dx + \int_{0}^{+\infty}|q(x)y(x)|^2 dx \le$$

$$\le c_1^2\int_{-\infty}^{0}|r(x)y'(x)|^2 dx + c^2\int_{0}^{+\infty}|r(x)y'(x)|^2 dx \qquad (1.11)$$

теңсіздігін аламыз, мұндағы $y \in C_0^{\infty}(R)$. Бұл алынған (1.11) теңсіздігінен

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|q(x)y(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \max(c_1,c)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|r(x)y'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

бағалауы шығады. Сонымен қатар, егер c_1, c тұрақтылары сәйкес (1.9) және (1.10) теңсіздіктері орындалатындай ең кіші тұрақтылар болса, онда

$$\sup_{t>0}\alpha_{q,r}(t) \le c \le 2\sup_{t>0}\alpha_{q,r}(t),$$

$$\sup_{\tau<0}\beta_{q,r}(\tau) \le c_1 \le 2\sup_{\tau<0}\beta_{q,r}(\tau).$$

Сондықтан, $\max(c_1,c) \le 2\gamma_{q,r}$ және $\gamma_{q,r} \le \max(c_1,c)$. Лемма дәлелденді.

Келесі 1.2.2 лемма жоғарыда 1.1 бөлімшеде келтірілген 1.1.6 теоремасының $\rho(t)=1$, $p=2$, $k=1$ кезіндегі дербес жағдайы болып табылады.

Лемма 1.2.2. Айталық, берілген r функциясы

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left\|r^{-1}\right\|_{L_2(x,+\infty)} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\int_x^{\infty} r^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.13)$$

және

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\left\|r^{-1}\right\|_{L_2(-\infty,x)} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\left(\int_{-\infty}^{x} r^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (14)$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда

$$F_K = \left\{ y: y\in C_0^{\infty}(R), \int_{-\infty}^{+\infty}|r(t)y'(t)|^2 dt \le K \right\},\ K>0$$

жиыны $L_2(R)$ кеңістігінде салыстырмалы компактылы.

Дәлелдеу. $r(x)$ функциясын $r = r_- + r_+$ түрінде жазайық, мұндағы

$$r_-(x) = \begin{cases} r(x), & x\in(-\infty,0], \\ 0, & x\in(0,+\infty), \end{cases}$$

$$r_+(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0],\\ r(x), & x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

Және $\|r\|_{L_2(R)}=\|r_-\|_{L_2(R_-)}+\|r_+\|_{L_2(R_+)}$ теңдігі орындалады. Жоғарыдағы

$$F_K=\left\{y: y\in C_0^\infty(R), \int_{-\infty}^{+\infty}|r(t)y'(t)|^2\,dt\le K\right\},\ K>0$$

жиынын

$$F_{K_1}^+=\left\{y: y\in C_0^\infty(R_+), \int_0^{+\infty}|r_+(t)y'(t)|^2\,dt\le K_1\right\},\ K_1>0,$$

және

$$F_{K_2}^-=\left\{y: y\in C_0^\infty(R_-), \int_{-\infty}^{0}|r_-(t)y'(t)|^2\,dt\le K_2\right\},\ K_2>0,$$

жиындарының бірігуі түрінде жазсақ, онда F_K жиынының компактылығын көрсету үшін $F_{K_1}^+$ және $F_{K_2}^-$ жиындарының компактылы екенін көрсету жеткілікті.

Егер (1.13) шарты орындалса, онда

$$\sup_{x>0}\sqrt{x}\left(\int_x^\infty r^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

орындалады. Онда 1.2.1 лемма бойынша $F_{K_1}^+$ жиыны $L_2(R_+)$ кеңістігінде шенелген. Сәйкесінше, Фреше-Колмогоров теоремасы бойынша кез келген $\varepsilon_1>0$ үшін

$$\int_{N_1}^\infty |y|^2dt\le\varepsilon_1,\qquad y\in F_{K_1}^+,\qquad N_1\ge N_{\varepsilon_1}\tag{1.15}$$

теңсіздігі орындалатындай $N_{\varepsilon_1}>0$ саны табылатынын дәлелдеу жеткілікті. Кац-Крейн теоремасы [66] бойынша

$$\int_N^\infty |y(t)|^2 dt = \int_0^\infty |y(t+N)|^2 dt \le c\sup_{x>0} x\left(\int_x^\infty r^{-2}(t+N)dt\right)\int_0^\infty |r(t+N)y'(t+N)|^2 dt \le$$

$$\le c\sup_{x>0} x\left(\int_{x+N}^\infty r^{-2}(t)dt\right)\int_0^\infty |r(t)y'(t)|^2 dt \le c\sup_{x>N} x\int_x^\infty r^{-2}(t)dt$$

теңсіздіктері орындалады. Бұдан және (1.13) шартынан кез келген $\varepsilon_1 > 0$ үшін (1.15) орындалатындай $N_{\varepsilon_1} > 0$ саны табылатындығын көреміз. Сәйкесінше (1.14) шартын пайдаланып $F^-_{K_2}$ жиынының компактылығын көрсетуге болады. Лемма дәлелденді.

$\mathscr{L}$ арқылы $C_0^\infty(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық

$$\mathscr{L}_o z = -z' + rz \tag{1.16}$$

өрнегінің L_2 кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейміз.

Лемма 1.2.3. Айталық, r функциясы

$$r \in C_{loc}^{(1)}(R), \quad r \ge \delta > 0, \ \gamma_{1,r} < \infty \ , \tag{1.17}$$

$$c^{-1} \le \frac{r(x)}{r(\eta)} \le c, \quad |x-\eta| \le 1, \ c > 1, \tag{1.18}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $\mathscr{L}$ операторы қайтарымды және L_2 кеңістігінде бөліктенеді. Сонымен қатар, $z \in D(\mathscr{L})$ үшін келесі бағалау орындалады

$$\|z'\|_2 + \|rz\|_2 \le c\|\mathscr{L} z\|_2 . \tag{1.19}$$

Дәлелдеу. Айталық $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$, $\lambda \ge 0$ болсын. 1.1 пунктіндегі 1.1.1 лемма бойынша $\mathscr{L}$ және $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$ операторлары бір уақытта бөліктенеді, немесе бөліктенбейді. Егер z үзіліссіз дифференциалданатын финитті функция болса, онда бөліктеп интегралдап

$$(\mathscr{L}_\lambda z, z) = -\int_R z'\bar{z}\,dx + \int_R [r(x)+\lambda]|z|^2 dx \tag{1.20}$$

екенін көреміз. Және

$$T = -\int_R z'\bar{z}\,dx = \int_R z\,\bar{z}'\,dx = -\overline{T}\ .$$

Сондықтан $\operatorname{Re}T = 0$. Онда (1.20) теңдігінен

$$\operatorname{Re}(\mathscr{L}_\lambda z, z) = \int_R \left[r(x) + \lambda\right]|z|^2 dx \tag{1.21}$$

шығады. Гельдер теңсіздігін пайдаланып (1.21) теңдігінің сол жағындағы өрнекті жоғарыдан бағалаймыз. Нәтижесінде

$$\left\|\sqrt{r(x) + \lambda}\ z\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{\sqrt{r(x) + \lambda}}\mathscr{L}_\lambda z\right\|_2 \tag{1.22}$$

теңсіздігі шығады. Анықтаманы пайдаланып (1.22) бағалауының $\mathscr{L}$ операторының анықталу облысында жататын әрбір z үшін де орынды екенін аламыз.

Айталық $\Delta_j = (j-1, j+1)\ (j \in Z)$, ал $\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $C_0^\infty(\Delta_j)$ жиынынан алынған және

$$0 \le \varphi_j \le 1,\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j(x) \le 1$$

болатындай функциялардың тізбегі болсын. $r(x)$ функциясын Δ_j аралығынан R-ге оның $r_j(x)$ жалғастыруы периоды 2-ге тең шенелген периодты функция болатындай етіп жалғастырамыз. $C_0^\infty(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық $-z' + [r_j(x) + \lambda]z$ операторының $L_2(R)$ кеңістігі нормасындағы тұйықталуын $\mathscr{L}_{\lambda,j}$ арқылы белгілейміз. Жоғарыдағы (1.22) бағалауы сияқты

$$\left\|(r_j + \lambda)^{\frac{1}{2}} z\right\|_2 \le \left\|(r_j + \lambda)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\lambda,j} z\right\|_2,\ \ z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}), \tag{1.23}$$

теңсіздігі дәлелденеді. (1.22), (1.23) бағалауларынан және бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясынан $\mathscr{L}_\lambda$, $\mathscr{L}_{\lambda,j}$

$(j\in Z)$ операторларының қайтарымдылығы және оларға кері $\mathscr{L}_{\lambda}^{-1}$, $\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}$ операторларының барлық $L_2(R)$ кеңістігінде анықталғандығы шығады. (1.23) бағалауынан (1.17) шартын пайдаланып

$$\left\|\mathscr{L}_{\lambda,j}z\right\|_2\geq c\sup_{x\in\Delta_j}[r_j(x)+\lambda]\|z\|_2,\quad z\in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}) \tag{1.24}$$

теңсіздігін аламыз.

B_λ, M_λ операторларын

$$B_\lambda f=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi'_j(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f,\quad M_\lambda f=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f$$

түрінде енгізейік.

Әртүрлі $j\in Z$ мәндерінде φ_j функциясы нөлден ерекше болатын Δ_j жиындарының ішіндегі өзара қиылысатындарының саны 2-ден артық емес. Сондықтан әрбір $x\in R$ нүктесінде бұл өрнектердің оң жағындағы қосылғыштардың саны екіден аспайды, сондықтан B_λ және M_λ операторлары барлық $L_2(R)$ кеңістігінде анықталған, сонымен қатар

$$\mathscr{L}_\lambda M_\lambda=E+B_\lambda \tag{1.25}$$

теңдігінің орындалатындығын көру қиын емес. (1.24) бағалауын және φ_j $(j\in Z)$ функцияларының қасиеттерін пайдаланып

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\|B_\lambda\|=0$$

теңдігін аламыз. Шындығында да, B_λ операторының нормасына бағалау жасасақ

$$\|B_\lambda f\|^2=\left\|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi'_j(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi'_j(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f\right|^2dx=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{j-1}^{j+1}\left|\sum_{j-1}^{j+1}\varphi'_j(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f\right|^2dy.$$

Мұнда біз $\Delta_j=(j-1,j+1)$ $(j\in Z)$ аралығында тек φ_{j-1},φ_j және φ_{j+1} функцияларының ғана нөлден өзгеше болатынын пайдаландық.

Осыдан

$$\left\| |a| + |b| + |c| \right\|^2 \le 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

теңсіздігін ескеріп

$$\|B_\lambda f\|^2 \le 3C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\|\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\|_{L_2(\Delta_j)}^2 \|\varphi_j f\|_{L_2(\Delta_j)}^2 \right) \le c_1 \sup_{j\in N} \|\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\|^2 \int_R \left(\sum \varphi_j^2\right) |f|^2 dx =$$

$$= c_1 \sup_{j\in N} \|\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\|_{L_2(\Delta_j)\to L_2(\Delta_j)} \|f\|_{L_2}$$

бағалауын аламыз. (1.24) теңсіздігін

$$\|\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\|_{L_2(\Delta_j)\to L_2(\Delta_j)} \le \frac{1}{\sup\limits_{x\in\Delta_j}\left[r_j(x)+\lambda\right]}.$$

Осыдан жеткілікті үлкен λ - лар үшін $\|B_\lambda\| = 0$ теңдігінің орындалатындығын көреміз. Олай болса, барлық $\lambda \ge \lambda_0$ үшін $\|B_\lambda\| \le \frac{1}{2}$ теңсіздігі орындалатындай λ_0 саны табылады. Онда (1.25) теңдігіндегі $E + B_\lambda$ $(\lambda \ge \lambda_0)$ операторы қайтарымды және

$$\mathscr{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda (E + B_\lambda)^{-1}, \ \lambda \ge \lambda_0, \tag{1.26}$$

орындалады. (1.26) теңдігін және φ_j $(j \in Z)$ функцияларының қасиеттерін тағы да пайдалансақ

$$\|(r+\lambda)\mathscr{L}_\lambda^{-1} f\|_2 \le c_1 \sup_{j\in Z} \|(r+\lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\|_{L_2(\Delta_j)} \|f\|_2 \tag{1.27}$$

бағалауы шығады. (1.17) шартын ескеріп, (1.24) теңсіздігінен

$$\sup_{j\in Z} \|(r+\lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} F\|_{L_2(\Delta_j)} \le \frac{\sup\limits_{x\in\Delta_j}\left[r(x)+\lambda\right]}{\inf\limits_{x\in\Delta_j}\left[r(x)+\lambda\right]} \|F\|_{L_2(\Delta_j)} \le$$

$$\leq \sup_{|x-z|\leq 2} \frac{r(x)+\lambda}{r(z)+\lambda} \|F\|_{L_2(\Delta_j)} \leq c_2 \|F\|_{L_2(\Delta_j)}$$

екенін аламыз. Онда (1.27) теңсіздігінен $\|(r+\lambda)z\|_2 \leq c_3 \|\mathscr{L}_\lambda z\|_2, \ z \in D(\mathscr{L}_\lambda)$, шығады. Сондықтан $\|z'\|_2 + \|(r+\lambda)z\|_2 \leq (1+2c_3)\|\mathscr{L}_\lambda z\|_2$ орындалады. Осыдан (1.22) теңсіздігін ескерсек, (1.19) бағалауы шығады. Лемма дәлелденді.

L арқылы $C_0^\infty(R)$ жиынында анықталған

$$L_0 y = -y'' + r(x)y'$$

дифференциалдық өрнегінің L_2 кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейміз. Келесі тұжырым орынды.

Лемма 1.2.4. Айталық r функциясы (1.17) шартын қанағаттандырсын. Онда $y \in D(L)$ үшін

$$\|\sqrt{r}y'\|_2 + \|y\|_2 \leq c\|Ly\|_2 \qquad (1.28)$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. $y \in C_0^\infty(R)$ функциясын алайық. Бөліктеп интегралдау арқылы

$$\left(Ly, y'\right) = -\int_R y'' \overline{y}' dx + \int_R r(x)\left|y'\right|^2 dx \qquad (1.29)$$

теңдігін аламыз. Және

$$A = -\int_R y'' \overline{y}' dx = \int_R y' \overline{y}'' dx = -\overline{A}$$

екенін ескеріп $\operatorname{Re} A = 0$ болатынын көреміз. Сондықтан (1.29) теңдігінен

$$\operatorname{Re}\left(Ly, y'\right) = \int_R r(x)\left|y'\right|^2 dx$$

шығады. Осыдан Гельдер теңсіздігін қолданып

$$\left|\operatorname{Re}\left(Ly, y'\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{r}}Ly, \sqrt{r}y'\right)\right| \le \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}Ly\right\|_2 \left\|\sqrt{r}y'\right\|_2$$

бағалауын аламыз. Бұл теңсіздіктен

$$\int_R r(x)\left|y'\right|^2 dx = \left\|\sqrt{r}y'\right\|_2^2$$

екенін ескеріп, және (1.17) шартын пайдаланып

$$c_0\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2 \le \|Ly\|_2 \qquad (1.30)$$

өрнегіне келеміз. (1.16) - дегі $\gamma_{1,\sqrt{r}} < \infty$ шартынан 1.2.1 лемма бойынша $y \in C_0^\infty(R)$ үшін

$$\int_R |y(x)|^2 dx \le C\int_R \left|\sqrt{r(x)}y'(x)\right|^2 dx,$$

яғни $\|y\|_2 \le \sqrt{C}\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2$ бағалауын аламыз. Осы теңсіздікті ескеріп, мынаған келеміз:

$$\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2 + \|y\|_2 \le \left(1+\sqrt{C}\right)\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2.$$

Бұл жерде (1.30) теңсіздігін пайдаланып әрбір $y \in C_0^\infty(R)$ үшін (1.28) бағалауын аламыз. Енді, айталық, y L операторының анықталу облысындағы кез-келген элемент болсын. Тұйық оператордың анықтамасына сәйкес онда n шексіз өскенде $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|Ly_n - Ly\|_2 \to 0$ болатындай функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R)$ тізбегі табылады. Ал, y_n үшін (1.28) бағалауы орындалады, осы теңсіздікте $n \to \infty$ ұмтылдырып шекке көшіп, y үшін де осындай бағалау аламыз. Лемма дәлелденді.

Ескерту 1.2.1. Егер $r(x)$ функциясы комплексмәнді функция болып, (1.17) шартының орнына

$$\operatorname{Re} r \ge \delta > 0, \quad \gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty \qquad (1.31)$$

шарты орындалса, онда 1.2.1 леммасының тұжырымы сақталады.

1.2.1 леммасынан r функциясына 1.2.4 леммада қойылған шарттардың табиғи екендігі шығады.

Келесі түрдегі

$$Ly \equiv -y'' + r(x)y' = f, \qquad f \in L_2 \tag{1.32}$$

дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз. Егер $y(x) \in L_2(R)$ функциясы үшін n шексіздікке ұмтылғанда $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|Ly_n - f\|_2 \to 0$ болатындай үзіліссіз және шексіз дифференциалданатын финитті функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылса, онда y функциясы (1.32) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Мынадай тұжырым орынды:

Лемма 1.2.5. Егер r функциясы (1.17) шартын қанағаттандырса, онда (1.32) теңдеуінің шешімі бар және ол жалғыз. Егер, сонымен қатар, (1.18) шарты орындалса, онда (1.32) теңдеуінің y шешімі үшін

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 \le c_L \|Ly\|_2$$

бағалауы орындалады, яғни L операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді.

Дәлелдеу. (1.28) бағалауына сәйкес (1.32) теңдеуінің y шешімі жалғыз және ол $W_2^1(R)$ Соболев кеңістігінде жатады. (1.32) теңдеуінің шешілімділігін дәлелдейік. Кері жориық, айталық $R(L) \ne L_2$ болсын. Онда $z_0 \perp R(L)$ болатындай нөлдік емес $z_0 \in L_2$ элементі табылады және операторлардың жалпы теориясына сәйкес бұл z_0 элементі

$$L^* y \equiv -y'' + [r(x)y]' = 0 \text{ немесе } -z_0' + r(x)z_0 = C$$

теңдеуінің жалпыланған шешімі болады. $C = 1$ деп алуға болады. Онда

$$z_0 = c_0 \exp\left[-\int_a^x r(t)dt\right] + \int_a^x \exp\left[-\int_a^t r(\tau)d\tau\right]dt = z_1 + z_2. \tag{1.33}$$

Осы теңдіктен егер $c_0 > 0$ болса, онда $x > a$ кезінде $z_0 \ge c_0$ болатыны шығады. Егер $c_0 \le 0$ болса, онда (1.33) теңдігінде $x \to -\infty$ болғанда $z_1 \to 0$, ал $x << a$ болғанда $|z_2(x)| \ge c_1 \exp[-\delta_0 x]$ $(0 < \delta_0 < \delta)$ болады. Ендеше $z_0 \notin L_2$. Сонымен бір мезгілде $z_0 \in L_2$ және $z_0 \notin L_2$. Қайшылық алынды. Ол (1.33) теңдеуінің шешімінің бар екенін көрсетеді.

Егер $y' = z$ деп алсақ,

$$Ly = \mathscr{L} z = -z' + r(x)z.$$

Осылайша $\mathscr{L}$ операторын анықтайық. (1.28) теңсіздігінен $\mathscr{L}$ L_2 кеңістігінде анықталған оператор екені шығады. $\mathscr{L}$ операторының L_2 кеңістігінде бөліктенетіндігі 1.2.3 леммадан шығады. Онда құрылуы бойынша L_2 кеңістігінде L операторы да бөліктенеді, демек леммадағы теңсіздік орындалады. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.2.6. Айталық r функциясы (1.17), (1.18), $\gamma_{1,r} < \infty$ және

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \left\| r^{-1} \right\|_{L_2(t,+\infty)} = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} \sqrt{|t|} \left\| r^{-1} \right\|_{L_2(-\infty,t)} = 0 \tag{1.34}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда L операторына кері L^{-1} операторы L_2 кеңістігінде компактылы болады.

Дәлелдеу. 1.2.5 леммадан L^{-1} операторының табылатындығы және L_2 кеңістігін нормасы $\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|y\|_2$ болатын $W_{2,r}^2(R)$ кеңістігіне бейнелейтіндігі шығады. 1.2.2 леммаға сәйкес (1.34) шарты орындалғанда $W_{2,r}^2(R)$ кеңістігі L_2 кеңістігіне компактылы енгізілген. Сәйкесінше L^{-1} операторы L_2 кеңістігінде компактылы. Теорема дәлелденді.

Лемма 1.2.7. Айталық r функциясы қандай да бір $\theta \in (0,1)$ үшін (1.17), (1.18), $\gamma_{1,r} < \infty$ және

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \left\| r^{-\theta} \right\|_{L_2(t,+\infty)} = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} \sqrt{|t|} \left\| r^{-\theta} \right\|_{L_2(-\infty,t)} = 0$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда L операторына кері L^{-1} операторы $W_2^1(R)$ кеңістігінде компактылы.

Лемманың дәлелдеуі 1.2.6 лемманың дәлелдеуіне сәйкес $W_2^1(R)$ С.Л. Соболев кеңістігінде жиындардың компактылығының Колмогоров-Фреше белгісін тікелей тексеру арқылы жүргізіледі.

1.2.1 теореманың дәлелдеуі. Айталық ε, A- оң сандар болсын. $S_A = \left\{ z \in W_2^1(R) : \|z\|_{W_2^1(R)} \le A \right\}$ жиынын қарастырамыз. $v \in S_A$ функциясын алып және сызықты «қобалжыған»

$$l_{0,v,\varepsilon}\, y \equiv -y'' + \left[r(x, v(x)) + \varepsilon \left(1 + x^2\right)^2 \right] y' = f(x) \tag{1.35}$$

теңдеуін қарастырамыз, мұндағы $\varepsilon > 0$. Дифференциалдық $l_{0,v,\varepsilon}y$ өрнегінен жасалған L_2 кеңістігіндегі минимальді тұйық операторды $l_{v,\varepsilon}$ арқылы белгілейміз. Және $r_\varepsilon(x) := r(x, v(x)) + \varepsilon\left(1+x^2\right)^2 \geq 1 + \varepsilon\left(1+x^2\right)^2$ болғандықтан, $r_\varepsilon(x)$ функциясы үшін (1.17) шарты орындалады.

Ары қарай, $v \in S_A$ үшін $|x-\eta| \leq 1$ кезінде

$$\left|v(x) - v(\eta)\right| \leq |x-\eta| \|v'\|_p \leq |x-\eta| \|v\|_{W_2^1} \leq A \qquad (1.36)$$

бағалауын аламыз.

$$\sup_{|x-\eta|\leq 1} \frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+\eta^2\right)^2} \leq 3$$

теңсіздігінің орындалатындығын көру қиын емес. Онда $v(x) = C_1$, $v(\eta) = C_2$ деп алып (1.5), (1.6) шарттарын және (1.36) теңсіздігін ескеріп

$$\sup_{|x-\eta|\leq 1} \frac{r_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon(\eta)} \leq \sup_{|x-\eta|\leq 1} \ \sup_{|C_1|\leq A, |C_2|\leq A, |C_1 - C_2|\leq A} \frac{r(x, C_1)}{r(\eta, C_2)} + 3 < \infty$$

аламыз. Сонымен, (1.35) теңдеуінің $r_\varepsilon(x)$ коэффициенті 1.2.5 лемманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Онда (1.35) теңдеуінің y шешімі бар және ол жалғыз болады, ал $l_{v,\varepsilon}$ операторы бөліктенеді, яғни y шешімі үшін

$$\left\|y''\right\|_2 + \left\|\left[r(\cdot, v(\cdot)) + \varepsilon(1+x^2)^2\right] y'\right\|_2 \leq C_3 \|f\|_2 \qquad (1.37)$$

бағалауы орындалады. (1.5), (1.6) шарттары және (1.8) теңсіздігі бойынша

$$\|y\|_2 \leq C_0 \left\|r y'\right\|_2, \ \left\|\left(1+x^2\right) y\right\|_2 \leq C_4 \left\|\left(1+x^2\right)^2 y'\right\|_2 \qquad (1.38)$$

бағалаулары алынады. Бұл теңсіздіктерді ескеріп (1.37) бағалауынан

$$\|y''\|_2 + \frac{1}{2}\left\|(1+x^2) y'\right\|_2 + \frac{1}{2C_0}\|y\|_2 + \frac{\varepsilon}{C_4}\left\|(1+x^2) y\right\|_2 \leq C_3 \|f\|_2$$

теңсіздігін аламыз, бұдан қандай да бір $C_5 > 0$ үшін

$$\|y\|_W := \|y''\|_2 + \|(1+x^2)y'\|_2 + \|[1+\varepsilon(1+x^2)]y\|_2 \le C_5\|f\|_2 \tag{1.39}$$

бағалауы шығады. S_A шарының A радиусын $C_5\|f\|_2$ - ке тең деп таңдап аламыз. Және $P(v,\varepsilon) := L_{v,\varepsilon}^{-1} f$ белгілеуін енгіземіз. (1.39) бағалауына сәйкес $P(v,\varepsilon)$ операторы S_A шарын өз-өзіне бейнелейді. Сонымен қатар, $P(v,\varepsilon)$ операторы S_A шарын $Q_A = \left\{ y : \|y''\|_2 + \left\|\left(1+x^2\right)y'\right\|_2 + \varepsilon\left\|\left[1+\varepsilon\left(1+x^2\right)\right]y'\right\|_2 \le C_5\|f\|_2 \right\}$ жиынына бейнелейді. Q_A жиыны $W_2^1(R)$ С.Л. Соболев кеңістігінде компактылы болады. Шындығында да, егер $y \in Q_A$, $h \ne 0$ және $N > 0$ болса, онда келесі екі қатынастар тізбегі орындалады:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[|y'(t+h) - y'(t)|^2 + |y(t+h) - y(t)|^2 \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| \int_t^{t+h} y''(\eta)\,d\eta \right|^2 + \left| \int_t^{t+h} y'(\eta)\,d\eta \right|^2 \right] dt \le |h| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| \int_t^{t+h} y''(\eta)\,d\eta \right| + \left| \int_t^{t+h} y'(\eta)\,d\eta \right| \right] dt =$$

$$= |h|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|y''(\eta)|^2 + |y'(\eta)|^2 \right] d\eta \le C_5 \|f\|_2 |h|^2, \tag{1.40}$$

және

$$\int_{|\eta| \ge N} \left[|y'(\eta)|^2 + |y(\eta)|^2 \right] d\eta \le$$

$$\int_{|\eta| \ge N} (1+\eta^2)^{-2} \left[|y''(\eta)|^2 + (1+\eta^2)^2 |y'(\eta)|^2 + (1+\eta^2)^2 |y(\eta)|^2 \right] d\eta \le$$

$$\le C_5^2 \|f\|_2^2 (1+N^2)^{-2}. \tag{1.41}$$

(1.40) және (1.41) теңсіздіктерінің оң жағындағы өрнектері сәйкесінше $h \to 0$ ұмтылғанда және $N \to +\infty$ ұмтылғанда нөлге ұмтылады. Онда Колмогоров-Фреше критерийі бойынша Q_A жиыны $W_2^1(R)$ С.Л. Соболев кеңістігінде компактылы болады. Сәйкесінше $P(v,\varepsilon)$ - компактылы оператор болады.

$P(v,\varepsilon)$ операторының $v \in S_A$ бойынша үзіліссіз болатынын көрсетейік. Айталық $\{v_n\} \subset S_A$ тізбегі $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|v_n - v\|_{W_2^1} \to 0$ болатындай тізбек болсын. Және y_n мен y сәйкесінше $L_{v,\varepsilon}^{-1} y = f$, $L_{v_n,\varepsilon}^{-1} y_n = f$ теңдеулерін қанағаттандырсын. Онда $P(v,\varepsilon)$ операторының анықтамасы бойынша $\{y_n\}$ тізбегінің $W_2^1(R)$ кеңістігі нормасында $n \to \infty$ жағдайында y-ке жинақталатындығын көрсетсек жеткілікті. Келесі

$$P(v_n,\varepsilon) - P(v,\varepsilon) = y_n - y = L_{v_n,\varepsilon}^{-1}\left[r(x,v_n(x)) - r(x,v(x))\right]y_n'$$

теңдігін аламыз. $v(x)$, $v_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ функциялары үзіліссіз, онда теорема шарты бойынша $r(x,v_n(x)) - r(x,v(x))$ функциясы да x бойынша үзіліссіз, сондықтан әрбір ақырлы $[-a,a]$, $a > 0$ аралығы үшін $n \to \infty$ ұмтылғанда

$$\|y_n - y\|_{W_2^1(-a,a)} \le c \max_{x\in[-a,a]} \left|r(x,v_n(x)) - r(x,v)\right| \cdot \|y_n'\|_{L_2(-a,a)} \to 0 \tag{1.42}$$

аламыз. Екінші жағынан 1.2.4 леммадан $\{y_n\} \in Q_A$, $\|y_n\|_W \le A$, $y \in Q_A$, $\|y\|_W \le A$ бағалаулары шығады. Жоғарыда біз Q_A жиынының $W_2^1(R)$ кеңістігінде компакт екенін көрсеттік. Сәйкесінше, $\{y_n\}$ тізбегі $W_2^1(R)$ кеңістігі нормасында жинақталады. Айталық, z оның шегі болсын. $W_2^1(R)$ кеңістігінің қасиеттері бойынша

$$\lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} z(x) = 0 \tag{1.43}$$

болады. (1.42) және (1.43) қатыстарынан $L_{v,\varepsilon}^{-1}$ операторының тұйықтығын ескеріп $y = z$ аламыз. Сондықтан $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|P(v_n,\varepsilon) - P(v,\varepsilon)\|_{W_2^1(R)} \to 0$ болады.

Сонымен, $P(v,\varepsilon)$ операторы $W_2^1(R)$ кеңістігінде жеткілікті үзіліссіз оператор және ол S_A шарын өз-өзіне бейнелейді, онда Шаудер теоремасы бойынша оның S_A шарында жылжымайтын $y : P(y,\varepsilon) = y$ нүктесі бар болады. Бұл y нүктесі

$$L_\varepsilon y := -y'' + \left[r(x,y) + \varepsilon(1+x^2)^2\right]y' = f(x)$$

теңдеуінің шешімі болады. (1.37) теңсіздігі бойынша y үшін $\|y''\|_2 + \left\|\left[r(\cdot,y) + \varepsilon(1+x^2)^2\right]y'\right\|_2 \le C_3\|f\|_2$ бағалауы орындалады.

Айталық, $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ - нөлге жинақталатын оң сандар тізбегі және $P(v,\varepsilon_j) := L_{v,\varepsilon_j}^{-1} f$ болсын. $P(v,\varepsilon_j)$ операторының жылжымайтын $y_j \in S_A$ нүктесі

$$L_{\varepsilon_j} y_j := -y_j'' + \left[r(x, y_j) + \varepsilon_j (1+x^2)^2\right] y_j' = f(x)$$

теңдеуінің шешімі болады. Ол үшін

$$\left\| y_j'' \right\|_2 + \left\| \left[r(\cdot, y_j(\cdot)) + \varepsilon \left(1+x^2\right)^2 \right] y_j' \right\|_2 \le C_3 \|f\|_2 \qquad (1.44)$$

бағалауы орындалады. Айталық, (a,b) - кездейсоқ таңдалған ақырлы аралық болсын. (1.44) теңсіздігінің күшімен $\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W_2^2(a,b)$ тізбегінен $j \to \infty$ ұмтылғанда $\left\| y_{\varepsilon_j} - y \right\|_{L_2[a,b]} \to 0$ болатындай $\{y_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^{\infty}$ тізбекшесін бөліп алуға болады. Тікелей тексеру арқылы y-тің (1.4) теңдеуінің 1.2.1 анықтама мағынасында шешімі екенін оңай көруге болады. (1.44) теңсіздігінде $j \to \infty$ ұмтылдырып шекке көшіп (1.7) аламыз. Теорема дәлелденді.

1.3 Бір нұқсанды дифференциалдық оператордың гильберт кеңістігіндегі бөліктенуі

Штурм-Лиувилль операторы үшін А. Молчановтың [69] келесідей нәтижелері белгілі. $Ly := -y'' + q(x)y$, $q \ge 1$, $x \in R$, операторының L^{-1} резольвентасы $L_2 := L_2(R)$ кеңістігінде компактылы болуы үшін

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_{x-d}^{x+d} q(t)dt = +\infty$$

теңдігі әрбір $d > 0$ үшін орындалуы қажетті және жеткілікті.

Осындай нәтиже [47,70] жұмыстарында Фридрихс бойынша кеңейтілулері бар болатын жартылай шенелген эллиптикалық операторлардың кең класы үшін алынған.

Өзіне-өзі түйіндес емес кейбір операторлар үшін мұндай нәтижелер зерттеліп отырылған операторға жақын келетін жартылай шенелген оператор үшін алынған белгілі нәтижелерді қолдану арқылы дәлелденген.

Төменде біз нұқсанды дифференциалдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттейміз. Мұндай операторлар табиғаты жартылай шенелген операторларға жақын бола бермейді, олардың қайтарымдылығы, оларға кері операторлардың компактылығы, сонымен қатар, спектрлерінің құрылымы туралы басқа да мәселелер бүгінгі күнге дейін зерттелмеген. Нұқсанды оператордың қарапайым мысалы -«аралық» коэффициенттері өспелі бір өлшемді

$$ly := -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}', \; x \in R$$

түріндегі дифференциалдық оператор. Мұнда бос мүшенің жоқ болуына байланысты $r\frac{d}{dx}$, $s\frac{\overline{d}}{dx}$ мүшелері $l_1 y \equiv -y''$ операторына бағынабайды, яғни l_1 операторының қандай да бір мағынада аз қобалжуы болып табылмайды.

Нұқсанды l операторының спектрінің құрылымы жайлы мәселенің маңызды практикалық қолданылулары бар. l операторының симметриялы болмауы басқа мәселелермен қатар l операторының қайтарымдылығы туралы сұрақты да көтереді.

Айталық, l шексіз дифференциалданатын және финитті функциялардың $C_0^\infty(R)$ жиынында анықталған $l_0 y = -y'' + r(x)y' + s(x)\overline{y}'$ өрнегінің L_2 кеңістігіндегі тұйықталуы болсын. Мұндағы r және s - комплекс мәнді функциялар, ал $\overline{y}$ - y-ке түйіндес функция.

Бұл бөлімшеде дифференциалдық l операторының алдымен қайтарымдылық және бөліктенуінің жеткілікті шарттары алынған. Бұл нәтижелер, кері l^{-1} операторы үшін спектралді және жуықтау мәселелерін шешуге қолданылады.

Егер

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\overline{y}'\|_2 \le c\left(\|ly\|_2 + \|y\|_2\right)$$

теңсіздігі әрбір $y \in D(l)$ үшін орындалатын болса, онда l операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді деп аталады. Мұндағы $\|\cdot\|_2$ - L_2 кеңістігінің нормасы.

Келесі түрдегі нұқсанды дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$ly = -y'' + r(x)y' + s(x)\overline{y}' = f\,. \tag{1.45}$$

Егер $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_0^\infty(R)$ тізбегі табылып, $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|ly_n - f\|_2 \to 0$, $n \to \infty$, қатыстары орындалса, онда $y \in L_2$ функциясы (1.45) теңдеуінің шешімі деп аталады. Егер l операторы бөліктенетін болса, онда (1.45) теңдеуінің y шешімі нормасы $\|y''\|_2 + \|(|r| + |s|)y'\|_2$ болатын салмақты $W_2^2(R, |r| + |s|)$ Соболев кеңістігінде жатады. Сондықтан, аталған жағдайда (1.45) теңдеуі шешімінің сапалық өзгеруін және l операторының спектралді және жуықтау қасиеттерін зерттеудің орнына $W_2^2(R, |r| + |s|) \subset L_2$ енгізуінің қасиеттерін зерттеу жеткілікті екенін көреміз.

Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)} \quad (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)} \quad (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau) \right),$$

мұндағы g және h - берілген функциялар.

Бұл бөлімшенің негізгі нәтижелері төмендегідей:

Теорема 1.3.1. Айталық, r және s функциялары

$$r,s \in C_{loc}^{(1)}(R), \ \operatorname{Re} r - |s| \geq \delta > 0, \ \gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty \tag{1.46}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда l операторы қайтарымды және оған кері l^{-1} операторы барлық L_2 кеңістігінде анықталады.

Ескерту 1.3.1. Егер $\gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty$ шарты орындалмаса, онда l операторы оң анықталған оператор болмайды. Бұл 1.1.2 леммадан шығады.

Теорема 1.3.2. Айталық, r және s функциялары

$$\begin{cases} r,s \in C_{loc}^{(1)}(R), \quad \operatorname{Re} r - \rho\,[|\operatorname{Im} r| + |s|] \geq \delta > 0, \ \gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty, \ 1 < \rho < 2, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\operatorname{Re} r(x)}{\operatorname{Re} r(\eta)} \leq c, \quad |x - \eta| \leq 1, \ c > 1 \end{cases} \tag{1.47}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y \in D(l)$ үшін

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 \leq c_l \|ly\|_2 \tag{1.48}$$

бағалауы орындалады, яғни l операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді.

1.3.2 теореманың тұжырымдамасы төмендегі 1.3.3-1.3.6 теоремаларын дәлелдеу үшін пайдаланылады.

Теорема 1.3.3. Айталық, r және s функциялары (1.3.3) шартын қанағаттандырсын және $\lim_{t \to +\infty} \alpha_{1,\operatorname{Re} r}(t) = 0$, $\lim_{\tau \to -\infty} \beta_{1,\operatorname{Re} r}(\tau) = 0$ теңдіктері орындалсын. Онда l^{-1} операторы L_2 кеңістігінде компактылы болады.

Теорема 1.3.4. Айталық, r және s функциялары үзіліссіз дифференциалданатын болсын және

$$\begin{cases} \operatorname{Re} r - \rho\left[|\operatorname{Im} r| + |s|\right] \geq \delta > 0, \quad 1 < \rho < 2, \\ \gamma_{\operatorname{Re} r} < \infty, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\operatorname{Re} r(x)}{\operatorname{Re} r(\eta)} \leq c, \qquad |x - \eta| \leq 1, \end{cases} \tag{1.49}$$

шартын қанағаттандырсын. Онда L операторының L^{-1} резольвентасы $L_2(R)$ кеңістігінде компактылы болуы үшін

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \alpha_r(t) = 0, \qquad \overline{\lim_{\tau \to -\infty}} \beta_r(\tau) = 0 \tag{1.50}$$

қатыстарының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Айталық, 1.3.3 теоремасының шарттары орындалсын және

$$M = \left\{ y \in L_2 : \|ly\|_2 \leq 1 \right\}$$

деп белгілейік. $d_k = \inf\limits_{\Sigma \subset \{\Sigma\}} \sup\limits_{y \in M} \inf\limits_{w \in \Sigma} \|y - w\|_2$ $(k = 0,1,2,...)$ M жиынының L_2 кеңістігіндегі Колмогоров бойынша k-көлденеңдері болсын, мұндағы $\{\Sigma_k\}$ - L_2 кеңістігіндегі өлшемі k - дан аспайтын барлық Σ_k ішкі кеңістіктерінің жиыны. $N_2(\lambda)$ арқылы берілген λ оң санынан кем емес d_k көлденеңдерінің санын белгілейміз. Көлденеңдердің $N_2(\lambda)$ үлестірім функцияларының бағалаулары $ly = f$ теңдеуінің шешімдерін жуықтау мәселелерінде маңызды рөл атқарады.

Келесі тұжырым орынды.

Теорема 1.3.5. Айталық 1.3.3 теореманың шарттары орындалсын және q функциясы $\gamma_{q,\operatorname{Re} r} < \infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда келесі бағалаулар орындалады

$$c_1 \lambda^{-2} \mu\left\{x : |q(x)| \leq c_2^{-1} \lambda^{-1}\right\} \leq N_2(\lambda) \leq c_3 \lambda^{-2} \mu\left\{x : |q(x)| \leq c_2 \lambda^{-1}\right\},$$

мұндағы μ - Лебег өлшемі.

Мысал. Айталық $r = (1 + x^2)^\beta$ $(\beta > 0)$ және $s = 0$ болсын. Онда анықталуы бойынша

$$\alpha_{1,\operatorname{Re} r}^2(t) = \|1\|_{L_2(0,t)}^2 \left\|r^{-1}\right\|_{L_2(t,+\infty)}^2 = t\left(\int_t^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{2\beta}}\right) = t\left(\frac{t^{-4\beta+1}}{4\beta - 1}\right) =$$

$$= t\frac{t^{1-4\beta}}{4\beta - 1} = t^{2-4\beta},$$

мұндағы $t > 0$. Яғни егер $\beta \geq \frac{1}{2}$ болса, 1.3.2 теореманың шарттары орындалады. Егер де $\beta > \frac{1}{2}$ болса, онда 1.3.4 теореманың шарттары орындалады және $c_0\lambda^{\frac{-7-2\beta+\varepsilon}{4}} \leq N_2(\lambda) \leq c_1\lambda^{\frac{-7-2\beta+\varepsilon}{4}}$ бағалауы орындалады.

Келесі түрдегі дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$Ly = -y'' + r(x,y)y' + s(x,y)\overline{y}' = f(x),$$

мұндағы $x \in R$, r, s - нақты функциялар, $f \in L_2$.

Жоғарыдағы негізгі теоремаларды дәлелдеу үшін алдымен бірнеше көмекші тұжырымдарды дәлелдейік.

$\mathscr{L}$ арқылы $C_0^\infty(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық

$$\mathscr{L}_o z = -z' + rz + s\overline{z}, \tag{1.51}$$

өрнегінің L_2 кеңіситігі нормасындағы тұйықтамасын белгілейміз.

Лемма 1.3.1. Айталық r және s функциялары (1.46) шартын қанағаттандырсын. Онда $\mathscr{L}$ операторы L_2 кеңістігінде шекті қайтарымды.

Дәлелдеу. Айталық, $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$, мұндағы $\lambda \geq 0$ және E бейнелеуі L_2 кеңістігін өз өзіне бейнелейтін тепе-тең бейнелеу болсын. 1.1.1 леммаға сәйкес $\mathscr{L}$ және $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$ операторлары бір уақытта бөліктенеді немесе бөліктенбейді. z- үзіліссіз дифференциалданатын финитті функциясы үшін бөліктеп интегралдау әдісін пайдаланып

$$(\mathscr{L}_\lambda z, z) = -\int_R z'\overline{z}\,dx + \int_R [(r+\lambda)|z|^2 + s\overline{z}^2]dx \tag{1.52}$$

өрнегін аламыз. Бірақ

$$T = -\int_R z'\overline{z}\,dx = \int_R z\,\overline{z}'\,dx = -\overline{T}.$$

Сондықтан $\operatorname{Re} T = 0$. Олай болса (1.52) өрнегінен

$$\mathrm{Re}(\mathscr{L}_\lambda z, z) = c\int_R [\mathrm{Re}\, r + \lambda - |s|]|z|^2 dx \tag{1.53}$$

теңдігі шығады. (1.53) теңдігінің сол жақ бөлігін Гельдер теңсіздігін пайдаланып жоғарыдан бағалаймыз. Нәтижесінде (1.46) шартын қолданып, (1.53) теңдігінен $\|L_\lambda z\|_2 \geq \delta \|z\|_2$ бағалауын аламыз. Бұл бағалаудан L_λ операторының қайтарымды екендігі шығады. Кері L_λ^{-1} оператордың барлық L_2 кеңістігінде анықталғандығын көрсетейік. Ол үшін кері жоримыз. Айталық, $R(L_\lambda) \neq L_2$ болсын. Онда кез-келген $z \in D(L)$ үшін $z_0 \perp R(L_\lambda)$, немесе $(L_\lambda z, z_0) = (z, L_\lambda^* z_0) = 0$ болатындай $z_0 \in L_2$ элементі табылады, мұндағы L_λ^* - түйіндес оператор. $D(L_\lambda)$ анықталу облысы L_2 кеңістігінде тығыз. Ендеше соңғы теңдіктерден L_2 мағынасында орындалатын

$$L_\lambda{}^* z_0 := z_0' + (\bar{r} + \lambda) z_0 + s\bar{z}_0 = 0 \tag{1.54}$$

теңдігі шығады. Яғни z_0 элементі (1.54) теңдеуінің жалпыланған шешімі болады.

r және s функциялары үзіліссіз болғандықтан $(r+\lambda)z_0 + s\bar{z}_0 \in L_{2,loc}(R)$ орындалады. Онда (1.54) теңдігінен $z_0' \in L_{2,loc}(R)$ болатындығы шығады. $\theta \in C_0^\infty(R)$ - нақты функциясын алайық. Онда θ функциясының финитті болғандықтан $\left\|(\theta z_0)'\right\|_2 + \|\theta z_0\|_2 < \infty$. Айталық, $\psi = \theta z_0$ болсын. Жоғарыдағы (1.54) теңдігін пайдаланып $L_\lambda^* \psi = \theta' z_0$ екенін аламыз. Демек

$$(L_\lambda^* \psi, \psi) = \int_R \theta' \theta \, |z_0|^2 \, dx \tag{1.55}$$

теңдігі орындалады. Екінші жағынан $L_\lambda^* \psi$ өрнегін пайдаланып

$$\mathrm{Re}(L_\lambda^* \psi, \psi) = \int_R \theta^2 [\mathrm{Re}(\bar{r} + \lambda)|z_0|^2 + \mathrm{Re}(s\bar{z}_0^2)] dx \geq$$

$$\geq \int_R \theta^2 [\mathrm{Re}\,\bar{r} + \lambda - |s|] |z_0|^2 \, dx$$

теңсіздігіне келеміз. Бұдан (1.55) теңдігін және (1.46) шартын ескеріп

$$\delta \int_R \theta^2 |z_0|^2 dx \le \int_R \theta'\theta \, |z_0|^2 dx \tag{1.56}$$

бағалауын аламыз. θ функциясын

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \xi \\ 0, & |x| \ge \xi + 1, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 1, \quad |\theta'| \le C,$$

болатындай етіп таңдайық, мұндағы $\xi > 0$ нақты сан. Онда (1.56) бағалауынан

$$\delta \int_{-\xi-1}^{\xi+1} \theta^2 |z_0|^2 dx \le C \left[\int_{-\xi-1}^{-\xi} |z_0|^2 dx + \int_{\xi}^{\xi+1} |z_0|^2 dx \right]$$

теңсіздігі шығады. $z_0 \in L_2$ болғандықтан соңғы теңсіздікте $\xi \to +\infty$ деп шекке көшіп $\|z_0\|_2 = 0$ теңдігін аламыз. Бұдан $z_0 = 0$ екені шығады. Қарама-қайшылыққа келдік. Ол $R(L_\lambda) = L_2$ екенін көрсетеді. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.3.2. Айталық r және s функциялары (1.47) шартын қанағаттандырсын. Онда $\mathscr{L}$ операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді және $z \in D(\mathscr{L})$ үшін келесі

$$\|z'\|_2 + \|rz\|_2 + \|s\bar{z}\|_2 \le c\|\mathscr{L} z\|_2. \tag{1.57}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Жоғарыдағы (1.53) теңсіздігінен барлық $z \in C_0^\infty(R)$ үшін

$$\left\| \sqrt{\operatorname{Re} r(\cdot) + \lambda}\; z \right\|_2 \le c_1 \left\| \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} r(\cdot) + \lambda}} \mathscr{L}_\lambda z \right\|_2 \tag{1.58}$$

бағалауының орындалатындығы шығады. $D(L_\lambda)$ анықталу облысындағы барлық z үшін (1.58) теңсіздігінің орындалатындығын дәлелдейік. Шындығында, айталық $\{z_n\} \subset C_0^\infty(R)$ тізбегі $\|z_n - z\|_2 \to 0$, $\|\mathscr{L}_\lambda z_n - \mathscr{L}_\lambda z\|_2 \to 0$, $n \to \infty$ қатыстарын қанағаттандырсын. Алуымыз бойынша z_n $(n = 1,2,...)$ үшін

$$\left\| \sqrt{\operatorname{Re} r(\cdot) + \lambda}\; z_n \right\|_2 \le c_1 \left\| \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} r(\cdot) + \lambda}} \mathscr{L}_\lambda z_n \right\|_2$$

бағалауы орындалады. Бұл теңсіздікте $n \to \infty$ кезінде шекке ұмтылып және $\{z_n\}$ тізбегінің қасиеттерін ескеріп (1.58) бағалауына келеміз.

Айталық, $\Delta_j = (j-1, j+1)$ (j - бүтін сан), ал $\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ - $C_0^\infty(\Delta_j)$ жиынындағы

$$0 \le \varphi_j \le 1, \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j^2(x) = 1$$

болатындай функциялардың тізбегі болсын. $r(x)$ және $s(x)$ функцияларын Δ_j аралығынан R жиынына олардың $r_j(x)$ және $s_j(x)$ жалғастырулары периоды 2-ге тең шенелген периодты функция болатындай етіп жалғастырамыз. $C_0^\infty(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық $l_{\lambda,j} = -z' + [r_j(x) + \lambda]z + s_j(x)\bar{z}$ операторының $L_2(R)$ кеңістігі нормасы бойынша тұйықталуын $\mathscr{L}_{\lambda,j}$ түрінде белгілейік. $L_{\lambda,j}$ операторы үшін (1.46) шарттарының барлығы орындалады. Сондықтан, 1.3.1 леммаға сәйкес $L_{\lambda,j}$ операторы қайтарымды және оның кері операторы $L_{\lambda,j}^{-1}$ барлық L_2 кеңістігінде анықталған. Сонымен қатар,

$$\left\| (\mathrm{Re}\, r_j + \lambda)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 \le c_2 \left\| (\mathrm{Re}\, r_j + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}_{\lambda,j} z \right\|_2, \quad z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}), \quad (1.59)$$

теңсіздігі орындалады. Осы (1.59) бағалауынан (1.47) шартын қолдансақ,

$$\left\| \mathscr{L}_{\lambda,j} z \right\|_2 \ge c_3 \sup_{x \in \Delta_j} [\mathrm{Re}\, r_j(x) + \lambda] \|z\|_2, \quad z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}) \quad (1.60)$$

екені шығады. Төмендегідей B_λ және M_λ операторларын

$$B_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi'_j(x) \mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} \varphi_j f, \qquad M_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j(x) \mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} \varphi_j f,$$

теңдіктерімен енгізейік, мұндағы $f \in L_2$.

Әртүрлі $j \in Z$ мәндерінде φ_j функциясы нөлден ерекше болатын Δ_j жиындарының ішіндегі өзара қиылысатындарының саны 2-ден артық емес. Сондықтан әрбір $x \in R$ нүктесінде соңғы өрнектердің оң жағындағы қосылғыштар саны екіден аспайды. Олай болса 1.3.1 леммасына сәйкес B_λ және M_λ операторлары барлық $L_2(R)$ кеңістігінде анықталған, сонымен бірге

$$\mathscr{L}_\lambda M_\lambda = E + B_\lambda \qquad (1.61)$$

теңдігінің орындалатындығын оңай көруге болады. Жоғарыдағы (1.60) бағалауын және $\varphi_j (j \in Z)$ функцияларының қасиеттерін пайдаланып $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \|B_\lambda\| = 0$ болатындығын аламыз, осы себепті $\lambda \geq \lambda_0$ болатындай барлық λ үшін $\|B_\lambda\| \leq \dfrac{1}{2}$ теңсіздігі орындалатындай λ_0 оң саны табылады. Онда (1.61) теңдігінен

$$\mathscr{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda (E + B_\lambda)^{-1}, \ \lambda \geq \lambda_0, \qquad (1.62)$$

екені шығады. (1.62) өрнегін және $\varphi_j (j \in Z)$ функцияларының қасиеттерін пайдаланып

$$\left\|(\mathrm{Re}\, r + \lambda)\mathscr{L}_\lambda^{-1} f\right\|_2 \leq c_4 \sup_{j \in Z} \left\|(\mathrm{Re}\, r_j + \lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2} \|f\|_2 \qquad (1.63)$$

теңсіздігін аламыз. Сонымен қатар, (1.47) шартын пайдаланып, (1.60) теңсіздігінен

$$\sup_{j \in Z} \left\|(\mathrm{Re}\, r_j + \lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} F\right\|_{L_2(R)} \leq c_5 \frac{\sup\limits_{x \in \Delta_j}\left[\mathrm{Re}\, r(x) + \lambda\right]}{\inf\limits_{t \in \Delta_j}\left[\mathrm{Re}\, r(t) + \lambda\right]} \|F\|_{L_2(R)} \leq$$

$$\leq c_5 \sup_{x,z \in R: |x-z| \leq 2} \frac{\mathrm{Re}\, r(x) + \lambda}{\mathrm{Re}\, r(z) + \lambda} \|F\|_{L_2(R)} \leq c_6 \|F\|_{L_2(R)}$$

бағалауын аламыз. Онда соңғы және (1.63) теңсіздіктері бойынша $\|(\mathrm{Re}\, r + \lambda)z\|_2 \leq c_7 \|\mathscr{L}_\lambda z\|_2, \quad z \in D(\mathscr{L}_\lambda)$ бағалауы дұрыс. Сондықтан (1.47) шартынан

$$\|z'\|_2 + \|(r + \lambda)z\|_2 + \|s\bar{z}\|_2 \leq c_8 \|\mathscr{L}_\lambda z\|_2$$

теңсіздігі шығады. Бұл теңсіздіктен $\lambda = 0$ болғанда (1.57) бағалауын аламыз. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.3.3. Айталық, r және s функциялары (1.46) шартын қанағаттандырсын. Онда $y \in D(l)$ үшін

$$\|y'\|_2 + \|y\|_2 \le c\|ly\|_2 \qquad (1.64)$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Айталық $y \in C_0^\infty(R)$ болсын. Бөліктеп интегралдау арқылы

$$\left(ly, y'\right) = -\int_R y''\bar{y}'dx + \int_R [r(x)\left|y'\right|^2 + s(x)(\bar{y}')^2]dx \qquad (1.65)$$

теңдігін аламыз. Мұнда

$$A := -\int_R y''\bar{y}'dx = \int_R y'\bar{y}''dx = -\bar{A}$$

болғандықтан, $\operatorname{Re} A = 0$ екені айқын. Сондықтан, (1.65) теңдігінен

$$\operatorname{Re}\left(ly, y'\right) = \int_R [\operatorname{Re} r - |s|]\left|y'\right|^2 dx \ge \delta\,\|y'\|_2$$

бағалауы шығады. Бұдан Гельдер теңсіздігін, (1.46) - тегі $\gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty$ шартын және 1.2.1 лемманы пайдаланып, кез - келген $y \in C_0^\infty(R)$ үшін (1.64) бағалауын аламыз. Егер y - $D(l)$ анықталу облысының кез - келген элементі болса, онда $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|ly_n - ly\|_2 \to 0$, $n \to \infty$, болатындай $y_n \in C_0^\infty(R)$ функциялар тізбегі табылады. y_n үшін (1.64) бағалауы орындалады. Осы теңсіздікте $n \to \infty$ деп шекке көшіп, y үшін де осындай бағалауды аламыз. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.3.4. Егер r және s функциялары (1.46) шартын қанағаттандырса, онда (1.45) теңдеуінің шешімі бар және ол жалғыз ғана.

Дәлелдеу. (1.64) бағалауына сәйкес (1.45) теңдеуінің y шешімі жалғыз және ол $W_2^1(R)$ кеңістігінде жатады. Жоғарыда дәлелденген 1.3.1 лемма L^{-1} операторының бүкіл L_2 кеңістігінде анықталғандығын көрсетеді. Онда құрылымы бойынша (1.45) теңдеуінің шешімі бар. Лемма дәлелденді.

Ω ретінде $(0,+\infty) = R_+$ немесе $(-\infty,0) = R_-$ жарты остерінің бірін белгілейік. Сонымен қатар, айталық, $r(x)$ - Ω облысында анықталған оң үзіліссіз және

$$\|ru'\|_{L_2(\Omega)} \ge c\|u\|_{L_2(\Omega)}$$

теңсіздігі орындалатындай функция болсын, мұндағы u - тұғыры компакт болатын кез - келген функция. $H_2(r,\Omega)$ арқылы Ω облысында анықталған, финитті және шексіз дифференциалданатын функциялардың $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega)$ жиынының

$$\|u\|_{H_2(r,\Omega)} = \|u''\|_{L_2(\Omega)} + \|ru'\|_{L_2(\Omega)}$$

нормасы бойынша толықтыруын белгілейміз. Мұндағы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ - $L_2(\Omega)$ кеңістігіндегі норма. $H_2(r,\Omega)$ кеңістігі біз $r(x)$ функциясына қойған шарттар бойынша нормаланған кеңістік болып табылады. Алдағы уақытта $H_2(r,R)$ кеңістігін де пайдаланатын боламыз.

Айталық, $r(x) \geq \delta > 0$ болсын. $r^*(x)$ арқылы

$$r^*(x) = \inf\left\{ d^{-1} : d^{-1} \geq \int\limits_{|x-d| \leq d} r^2(t)dt \right\}$$

функциясын белгілейміз, мұндағы $x \in \Omega$.

Лемма 1.3.5. Егер $r(x)$ функциясы үзіліссіз және

$$c^{-1} \leq \frac{r(x)}{r(t)} \leq c, \quad x,t \in \Omega : |x-t| \leq 1, \tag{1.66}$$

шартын қанағаттандырса, онда

$$\gamma^{-1} r(x) \leq r^*(x) \leq \gamma r(x), \; \gamma > 1, \tag{1.67}$$

теңсіздіктері орындалады.

Дәлелдеу. $d_x = \left[r^*(x)\right]^{-1}$ деп белгілейік. Онда $r(x)$ функциясының үзіліссіздігінен

$$d_x^{-1} = r^*(x) = \int\limits_{|x-t| \leq \frac{d_x}{2}} r^2(t)dt \tag{1.68}$$

теңдігінің орындалатындығын көреміз. Бұдан төмендегі екі теңсіздік шығады:

$$r^*(x) \le cr^2(x) \int\limits_{|x-t|\le \frac{d_x}{2}} dt = cd_x r^2(x) = cr^*(x) r^2(x),$$

$$r^*(x) \ge c^{-1} r^2(x) \int\limits_{|x-t|\le \frac{d_x}{2}} dt = c^{-1} d_x r^2(x) = c^{-1} r^*(x) r^2(x).$$

Бұл бағалаулардан леммадағы теңсіздіктерді оңай аламыз, мұндағы $\gamma = \sqrt{c}$. Лемма дәлелденді.

1.3.5 лемманы ескеріп [71]- дегі 1 теоремадан келесі тұжырым шығады:

Лемма 1.3.6. Айталық $r(t) \ge \delta > 0$ $(t > 0)$ функциясы үзіліссіз болып, $R_+ := (0,+\infty)$ жиынында (1.66) шартын қанағаттандырсын. Онда $H_2(r,R_+)$ кеңістігін $L_2(r,R_+)$ кеңістігіне енгізу операторы компактылы болуы үшін

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \alpha_r(t) = 0 \tag{1.69}$$

теңдігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Егер (1.66) шарты орындалса, онда 1.3.5 лемма бойынша (1.67) теңсіздіктері орындалады. [71] - дегі 2 теорема бойынша $H_2(r,R_+) \subset L_2(R_+)$ енгізілуі компактылы болуы үшін

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \alpha_{r^*}(t) = 0$$

орындалуы қажетті және жеткілікті. Осыдан және r мен r^* функцияларының эквиваленттілігін көрсететін (1.67) теңсіздіктерінен лемманың дәлелдеуі шығады.

Келесі тұжырым орындалады.

Лемма 1.3.7. Айталық $r(\tau) \ge \delta > 0$ $(\tau < 0)$ функциясы үзіліссіз және $R_- := (-\infty,0)$ жиынында (1.66) шартын қанағаттандырсын. Онда $H_2(r,R_-)$ кеңістігін $L_2(R_-)$ кеңістігіне енгізу операторы компактылы болуы үшін

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}} \beta_r(t) = 0 \tag{1.70}$$

теңдігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Егер $u(-t) = V(t)$, $r_1(-t) = r_0(t),\ t > 0$, деп алсақ, онда

$$\|u\|_{H_2(r_0,R_-)} = \|V\|_{H_2(r_0,R_+)},$$

$$\|u\|_{L_2(R_-)} = \|V\|_{L_2(R_+)}$$

теңдіктері орындалады. Сондықтан $E_- : H_2(r,R_-) \to L_2(R_-)$ енгізуі $E_1 : H_2(r_0,R_+) \to L_2(R_+)$ енгізілуі компактылы болғанда және тек қана сонда компактылы. 1.3.6 лемма бойынша E_1 бейнелеуінің компактылы болуы үшін

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\sqrt{t}\left(\int_t^{+\infty}\frac{ds}{|r_0(s)|^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{\tau\to-\infty}\sqrt{-\tau}\left(\int_{-\infty}^{\tau}\frac{ds}{|r(s)|^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \overline{\lim_{\tau\to-\infty}}\beta_r(\tau) = 0$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті. Лемма дәлелденді.

Айталық, $H_2(r,R)$, $R = (-\infty,+\infty)$ $C_0^\infty(R)$ жиынын

$$\|u\|_{H_2(r,R)} = \|u''\|_{L_2(R)} + \|ru'\|_{L_2(R)}$$

нормасы бойынша толықтыру нәтижесінде алынған кеңістік болсын.

Лемма 1.3.8. Айталық $r(x) \geq \delta > 0,\ (x \in R)$ функциясы үзіліссіз және R жиынында (1.66) шартын қанағаттандырсын. Онда $H_2(r,R)$ кеңістігін $L_2(R)$ кеңістігіне енгізу операторы компактылы болуы үшін

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\alpha_r(t) = 0,\quad \overline{\lim_{\tau\to-\infty}}\beta_r(\tau) = 0 \tag{1.71}$$

теңдіктері орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Егер

$$r_-(x) = \begin{cases} r(x), & x \in (-\infty,0], \\ 0, & x \in (0,+\infty), \end{cases}$$

$$r_+(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0], \\ r(x), & x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

Деп белгілесек, онда $r = r_- + r_+$ және

$$\|r\|_{L_2(R)} = \|r_-\|_{L_2(R_-)} + \|r_+\|_{L_2(R_+)}$$

теңдіктері орындалады. Жоғарыдағы 1.3.6 және 1.3.7 леммаларын ескерсек, онда $E : H_2(r, R_-) \to L_2(R)$ енгізуі компактылы деген факт

$$E_- : H_2(r, R_-) \to L_2(R_-)$$

және

$$E_+ : H_2(r, R_+) \to L_2(R_+)$$

енгізулері компактылы болуына парапар екенін көреміз. Соңғы екі тұжырымды дәлелдейік.

Айталық E_- және E_+ компактылы болсын. Онда 1.3.6 және 1.3.7 леммаларынан (1.71) теңдігінің орындалатындығы шығады. Белгілі Фреше-Колмогоров теоремасына сәйкес E енгізуі компактылы болуы үшін келесі

$$\sup_{\|f\|_{H_2(r,R)}} \|f\|_{L_2(N,+\infty)} \to 0, \quad N \to +\infty \tag{1.72}$$

және

$$\sup_{\|\varphi\|_{H_2(r,R)}} \|\varphi\|_{L_2(-\infty,K)} \to 0, \quad K \to -\infty \tag{1.73}$$

екі қатынастың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Кац - Крейн теоремасы [67] бойынша

$$\|f\|_{L_2(N,+\infty)} \le c \sup_{t \ge N} \sqrt{t-N} \|r^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)} \|rf'\|_{L_2(N,+\infty)} \le c_1 \sup_{t \ge N} \alpha_r(t) \|f\|_{H_2(r,R_+)}$$

теңсіздіктері орындалады. Бұдан (1.71)-дегі бірінші теңдікті пайдалансақ (1.72) қатысы шығады. Осы сияқты (1.71)-дегі екінші теңдікті ескеріп, (1.73) қатысының орындалатындығы дәлелденеді. Сонымен, E компактылы.

Айталық, енді E компактылы оператор болсын.

E_+ операторы компактылы емес деп кері жориық. Онда жиынның компактылығының анықтамасы бойынша $L_2(R_+)$ кеңістігінде жинақталмайтын фундаментальді $\{f_n^+(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset H_2(r, R_+)$, $\|f_n^+\|_{H_2(r,R_+)} \le 1$ тізбегі табылады. $f_n^+(x)$ функцияларын $f_n^+(x) = 0$, $x \in (0, \xi)$, $\xi > 0$, болатындай етіп таңдап аламыз. $f_n^+(x)$-ті $R_- \cup \{0\}$ жиынына нөлмен жалғастырамыз да, жалғастыруын $f_n(x)$ арқылы белгілейміз. Онда $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі $H_2(r, R)$ кеңістігінде фундаментальді және біздің ұйғаруымыз бойынша $L_2(R)$ кеңістігінде жинақты. Онда таңдауымыз бойынша $\{f_n^+(x)\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі де $L_2(R_+)$ кеңістігінде жинақталады. Қарама-қайшылыққа келдік Демек E_+ операторы компактылы. E_- енгізу операторының компактылығы да осындай жолмен көрсетіледі. Лемма дәлелденді.

L арқылы $C_0^{\infty}(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық

$$ly := -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}'$$

өрнегінің $L_2(R)$ кеңістігі нормасы бойынша тұйықтаудан алынған операторды белгілейміз. Бұл операторда жоғарғы және бос (оның коэффициенті нөлге тең) мүшелерінен «тәуелді емес» бірінші ретті туынды қатысқан мүше бар. Мұндай операторлар нұқсанды операторлар деп аталатын класқа жатады [29]. L операторының қайтарымды болуының жеткілікті шарттары жоғарыда 1.3.1 және 1.3.2 теоремаларында алынған, бұл дәлелденген теоремаларды келесі түрде түрлендіріп қайтадан жазамыз:

Лемма 1.3.9. Айталық, r және s функциялары үзіліссіз дифференциалданатын болсын және

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, r - |s| \geq \delta > 0, \\ \gamma_{\mathrm{Re}\, r} := \max\left(\sup\limits_{\tau<0} \beta_{\mathrm{Re}\, r}(\tau), \sup\limits_{\tau<0} \alpha_{\mathrm{Re}\, r}(t)\right) < \infty \end{cases} \tag{1.74}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда L операторы қайтарымды және оған кері оператор барлық $L_2(R)$ кеңістігінде анықталған.

Егер (1.74) шартының орнына келесі шарттар орындалса

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, r - \rho\left[|\mathrm{Im}\, r| + |s|\right] \geq \delta > 0, \quad 1 < \rho < 2, \\ \gamma_{\mathrm{Re}\, r} < \infty, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\mathrm{Re}\, r(x)}{\mathrm{Re}\, r(\eta)} \leq c, \qquad |x - \eta| \leq 1, \end{cases} \tag{1.75}$$

онда $y \in D(L)$ үшін

$$\|y''\|_{L_2(R)} + \|ry'\|_{L_2(R)} + \|s\bar{y}'\|_{L_2(R)} \leq c_1 \|Ly\|_{L_2(R)} \tag{1.76}$$

бағалауы орындалады, басқаша айтқанда L операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді.

Жоғарыдағы 1.3.8 және 1.3.9 леммаларын 1.3.4 теоремасын дәлелдеуге пайдаланамыз.

1.3.1 теореманың дәлелдеуі. (1.46) шартынан және 1.3.4 леммадан l операторының қайтарымдылығы және оған кері l^{-1} операторының бүкіл L_2 кеңістігінде анықталғандығы шығады.

1.3.2 теореманың дәлелдеуі. 1.3.2 леммадан L операторының (1.47) шарты орындалғанда L_2 кеңістігінде бөліктенетіндігі шығады. Сәйкесінше, құрылымы бойынша $ly \equiv -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}'$ операторы да L_2 кеңістігінде бөліктенеді және (1.48) бағалауы орындалады. Теорема дәлелденді.

1.3.3 теореманың дәлелдеуі. (1.48) бағалауы l^{-1} операторының L_2 кеңістігін нормасы $\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 + \|y\|_2$ болатын $\widetilde{W}_2^2(R)$ кеңістігіне бейнелейтінін көрсетеді. 1.2.2 лемма шарттары бойынша $\widetilde{W}_2^2(R)$ кеңістігін L_2 кеңістігіне енгізу операторы компактылы. Теорема дәлелденді.

1.3.4 теореманың дәлелдеуі. Теореманың шарттары орындалғанда 1.3.9 леммаға сәйкес L^{-1} операторы $L_2(R)$ кеңістігінен $H_2(r,R)$ кеңістігіне шенелген. Ал 1.3.8 лемма бойынша $H_2(r,R)$ кеңістігін $L_2(R)$ кеңістігіне енгізу операторы компактылы болуы үшін (1.71) шарты орындалуы қажетті және жеткілікті. Теорема дәлелденді.

1.3.5 теореманың дәлелдеуі. 1.2.1 лемма бойынша 1.3.2 теоремадан $\|y''\|_2 + \|qy\|_2 \le c\|ly\|_2,\ y \in D(l)$, бағалауы шығады. Онда [72] мақаласындағы 1 теоремадан 1.3.5 теореманың бағалаулары шығады. Теорема дәлелденді.

1.4 Екінші ретті нұқсанды дифференциалдық оператордың резольвентасының Фредгольм радиусының бағалаулары

$L_2 := L_2(R)$ кеңістігінде шенелген A операторының Фредгольм радиусы деп

$$\rho_A = \left[\inf_{T \in \sigma_\infty(L_2)} \|A - T\|_{L_2 \to L_2} \right]^{-1}$$

саны аталады [71]. Бұл бөлімшеде дифференциалдық

$$ly = -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}', \qquad D(l) = C_0^\infty(R)$$

өрнегінің L_2 кеңістігі нормасы бойынша тұйықталуынан алынған L операторының ρ_L Фредгольм радиусының бағалаулары беріледі. Мұнда $C_0^\infty(R)$ - шексіз дифференциалданатын финитті функциялардың жиыны. L

операторының L_2 кеңістігіндегі қайтарымдылығы және бөліктенуінің жеткілікті шарттары 1.3 бөлімшеде алынған. Оқырманға түсіндіруді жеңілдету мақсатында оларды қайтадан келтірейік.

Айталық, $\varphi(x) \geq \delta > 0$ - R жиынында анықталған және үзіліссіз функция болсын және

$$\alpha_\varphi(t) = \sqrt{t}\left[\int_t^{+\infty} \frac{dx}{|\varphi(x)|^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0,$$

$$\beta_\varphi(\tau) = \sqrt{-\tau}\left[\int_{-\infty}^{\tau} \frac{dx}{|\varphi(x)|^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau < 0,$$

деп алайық. Келесі тұжырым орынды.

Лемма 1.4.1. Айталық, r және s функциялары үзіліссіз дифференциалданатын болсын және

$$\begin{cases} \operatorname{Re} r - |s| \geq \delta > 0, \\ \operatorname{Re} r := \max\left(\sup\limits_{\tau<0} \beta_{\operatorname{Re} r}(\tau), \sup\limits_{t>0} \alpha_{\operatorname{Re} r}(t)\right) < \infty \end{cases} \tag{1.80}$$

шартын қанағаттандырсын. Онда L операторына кері L^{-1} операторы табылады және ол бүкіл L_2 кеңістігінде анықталған.

Егер де (1.80) орнына келесі шарттар орындалса

$$\begin{cases} \operatorname{Re} r - \rho\left[|\operatorname{Im} r| + |s|\right] \geq \delta > 0, \quad 1 < \rho < 2, \\ \gamma_{\operatorname{Re} r} < \infty, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\operatorname{Re} r(x)}{\operatorname{Re} r(\eta)} \leq c \quad \text{при} \quad |x - y| \leq 1, \end{cases} \tag{1.81}$$

Онда $y \in D(L)$ үшін

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 \leq c_1 \|Ly\|_2 \tag{1.82}$$

бағалауы орындалады.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі келесідей.

Теорема 1.4.1. Айталық, r және s үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын және (1.81) шартын қанағаттандырсын. Онда L^{-1} операторының $\rho_{L^{-1}}$ Фредгольм радиусы үшін

$$c_2^{-1} \le \rho_{L^{-1}}\gamma_0 \le c_2 \tag{1.83}$$

бағалаулары орындалады, мұндағы

$$\gamma_0 = \max\left(\overline{\lim_{\tau\to-\infty}}\beta_{\operatorname{Re}r}(\tau), \overline{\lim_{t\to+\infty}}\alpha_{\operatorname{Re}r}(t)\right).$$

Теореманы дәлелдеу үшін төмендегі көмекші тұжырымдарды келтірейік:

Айталық $r(x)$

$$\|ry'\|_{L_2(0,+\infty)} \ge c_3\|y\|_{L_2(0,+\infty)},$$

$$\|ry'\|_{L_2(-\infty,0)} \ge c_4\|y\|_{L_2(-\infty,0)}$$

бағалаулары орындалатындай функция болсын. Тұғыры компактылы шексіз дифференциалданатын функциялардың $\widetilde{C}_0^\infty(0,+\infty)$ (сәйкес $\widetilde{C}_0^\infty(-\infty,0)$) жиынының

$$\|u\|_{H_2(r,(0,+\infty))} = \|u''\|_{L_2(0,+\infty)} + \|ru'\|_{L_2(0,+\infty)}$$

$$(\text{сәйкес } \|u\|_{H_2(r,(-\infty,0))} = \|u''\|_{L_2(-\infty,0)} + \|ru'\|_{L_2(-\infty,0)})$$

нормасы бойынша толықтыруын $H_2(r,(0,+\infty))$ (сәйкес $H_2(r,(-\infty,0))$) арқылы белгілейік. [71] жұмысындағы 3 теоремасынан келесі тұжырым шығады.

Лемма 1.4.2. Айталық, $r(x) \ge \delta > 0$ функциясы $|x-\eta| \le 1,\quad x,\eta \in (0,+\infty)$ үшін $c^{-1} \le \dfrac{r(x)}{r(\eta)} \le c$ теңсіздіктерін қанағаттандырсын және $H_2(r,(0,+\infty))$ кеңістігін $L_2(0,+\infty)$ кеңістігіне енгізу операторы шенелген болсын. Онда $E_+ : H_2(r,(0,+\infty)) \to L_2(0,+\infty)$ енгізу операторының ρ_{E_+} Фредгольм радиусы үшін

$$c^{-1} \le \rho_{E_+}\gamma_+ \le c$$

бағалаулары орындалады. Мұндағы

$$\gamma_{+} = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\sqrt{t}\left[\int_{t}^{+\infty} r^{-2}(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Келесі тұжырымның дұрыстығын дәлелдейік.

Лемма 1.4.3. Айталық, $r(x)\geq\delta>0$ $x<0$ функциясы

$$c^{-1}\leq\frac{r(x)}{r(\eta)}\leq c,\ x,\eta\in(-\infty,0):\ |x-\eta|\leq 1$$

шартын қанағаттандырсын. Онда

$$E_{-}:H_2(r,(-\infty,0))\to L_2(-\infty,0)$$

енгізу операторының $\rho_{E_{-}}$ Фредгольм радиусы үшін

$$c_1^{-1}\leq\rho_{E_{-}}\gamma_{-}\leq c_1 \tag{1.84}$$

бағалаулары орындалады. Мұндағы

$$\gamma_{-} = \overline{\lim_{\tau\to-\infty}}\sqrt{-\tau}\left[\int_{-\infty}^{\tau}\frac{dx}{r^2(x)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Дәлелдеу. Анықтама бойынша

$$\rho_{E_{-}} = \inf_{T_1\in\sigma_\infty(L_2(R_{-}))}\|E_{-}-T_1\|_{L_2(R_{-})\to L_2(R_{-})}.$$

Бірақ

$$\|E_{-}-T_1\|_{L_2(R_{-})} = \sup_{u\neq 0}\frac{\|(E_{-}-T_1)u\|_{L_2(R_{-})}}{\|u\|_{L_2(R_{-})}} =$$

$$= \sup_{u_1\neq 0}\frac{\left[\int_{-\infty}^{0}\left|(E_- - T_1)u_1(-x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{-\infty}^{0}|u_1(-x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}} = \sup_{u_1\neq 0}\frac{\left[\int_{0}^{+\infty}\left|(E_+ - T)u_1(t)\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{0}^{+\infty}|u_1(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sup_{u_1\neq 0}\frac{\left\|(E_+ - T)u_1\right\|}{\|u_1\|} = \|E_+ - T\|_{L_2(R_+)} = \rho_{E_+}.$$

Егер $u(x)\in H_2(r,(-\infty,0))$ болса, онда $E_-u\in L_2(-\infty,0)$ болады. Онда $u_1(x)=u(-x)\in H_2(r_1,R_+)$ болғандықтан (мұндағы $r_1(x)=r(-x)$) $E_-u_1\in L_2(R_+)$, ендеше $E_-u=E_+u_1$, мұндағы $E_+:H_2(r_1,R_+)\to L_2(R_+)$. Сонымен қатар, $T_1u=Tu_1$, мұндағы $T\in\sigma_\infty\left(L_2(R_+)\right)$. Сондықтан, $(E_- - T_1)u=(E_+ - T)u_1$. Ал, 1.4.3 леммаға және $\rho_{E_-}=\rho_{E_+}$ теңдігіне сәйкес $c^{-1}\le\rho_{E_-}\gamma'\le c$ бағалаулары орындалады, мұндағы

$$\gamma' = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\sqrt{t}\left[\int_t^{+\infty}\frac{dx}{r_1^2(x)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Бірақ

$$\gamma' = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\left[\int_t^{+\infty}\frac{dx}{r^2(-x)}\right]^{\frac{1}{2}} = |x=-z| = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\left[\int_{-\infty}^{-t}\frac{dz}{r^2(z)}\right]^{\frac{1}{2}} = |t=-\tau| =$$

$$= \lim_{\tau\to-\infty}\sqrt{-\tau}\left[\int_{-\infty}^{\tau}\frac{dz}{r^2(z)}\right]^{\frac{1}{2}} = \gamma_-.$$

Сонымен, $c^{-1}\le\rho_{E_-}\gamma_-\le c$ теңсіздіктері орынды. Лемма дәлелденді.

Келесі тұжырым белгілі.

Лемма 1.4.4 [73]. Егер $U=\bigcup_k U_k$, $V=\bigcup_k V_k$ - қиылыспайтын жиындардың бірігулері болып, $T=\sum_k T_k$, $T_k:L_p(U_k)\to L_q(V_k)$, $0<p\le q<+\infty$ болса, онда

$$\|T\|_{L_p(U)\to L_q(V)} = \sup_k \|T_k\|_{L_p(U_k)\to L_q(V_k)} .$$

1.4.1 теореманың дәлелдеуі. Айталық $f \in L_2(R)$ болсын. χ_+ және χ_- ретінде сәйкес R_+ және R_- интервалдарының сипаттаушы функцияларын белгілейік. $f_+ = \chi_+ f$ және $f_- = \chi_- f$ деп алсақ, онда $f = f_+ + f_-$ болады. $T \in \sigma_\infty(L_2(R))$ болсын, E деп $H(r,R)$ кеңістігін $L_2(R)$ кеңістігіне енгізу операторын белгілейік. Онда $E - T$ операторы үшін

$$(E - T)f = (E - T)_- f_- + (E - T)_+ f_+ \qquad (1.85)$$

теңдігі орындалады. Мұндағы $(E - T)_-$ ($(E - T)_+$) операторы $E - T$ операторының $L_2(R_-)$ (сәйкес $L_2(R_+)$) кеңістігіне тарылуы.

1.4.4 лемманы пайдаланып (1.85) теңдігінен

$$\|E - T\|_{L_2(R)} = \sup\left(\|(E - T)_-\|_{L_2(R_-)}, \|(E - T)_+\|_{L_2(R_+)}\right)$$

екенін аламыз. Осыдан

$$\frac{1}{2}\left(\|(E - T)_-\|_{L_2(R_-)} + \|(E - T)_+\|_{L_2(R_+)}\right) \le \|E - T\|_{L_2(R)} \le$$

$$\le \|(E - T)_-\|_{L_2(R_-)} + \|(E - T)_+\|_{L_2(R_+)} \qquad (1.86)$$

бағалаулары шығады. Сондықтан

$$\rho_E^{-1} = \inf_{T \in \sigma_\infty(L_2(R))} \|E - T\|_{L_2(R)} \le$$

$$\le \inf_{T_- \in \sigma_\infty(L_2(R_-))} \|E_- - T_-\|_{L_2(R_-)} + \inf_{T_+ \in \sigma_\infty(L_2(R_+))} \|E_+ - T_+\|_{L_2(R_+)} =$$

$$= \rho_{E_-}^{-1} + \rho_{E_+}^{-1} \le c_1\gamma_- + c\gamma_+ .$$

Сәйкесінше (1.86)-дегі сол жақтағы теңсіздіктен

$$\rho_E^{-1} \ge \frac{1}{2}\left[\rho_{E_-}^{-1} + \rho_{E_+}^{-1}\right] \ge \frac{1}{2}\left[c_1^{-1}\gamma_- + c^{-1}\gamma_+\right]$$

бағалауларын, соңғы теңсіздіктерден

$$c_2^{-1} \leq \rho_E \gamma_0 \leq c_2$$

бағалауларын аламыз. Осыдан және 1.4.1 леммадан теореманың дәлелдеуі шығады.

2 ҮШІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ КОЭРЦИТИВТІ ШЕШІЛУІ

2.1 Негізгі нәтижелер

Айталық $1 < p < +\infty$ болсын. $L_p \equiv L_p(R)$, $R = (-\infty, +\infty)$ арқылы

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_R |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

нормасы ақырлы болатын функциялар кеңістігін белгілейміз.

Келесі түрдегі теңдеуді қарастырамыз:

$$(L + \lambda E) y \equiv -m_1(x)\left(m_2(x)\left(m_3(x)y'\right)'\right)' + [q(x) + ir(x) + \lambda] y = f(x), \tag{2.1}$$

мұндағы $f \in L_p$, $\lambda \geq 0$.

Диссертациялық жұмыстың бұл бөлімінде (2.1) теңдеу шешімінің табылатындығын және жалғыздығын, сонымен қатар табылған y шешім үшін

$$\left\| m_1(x)\left(m_2(x)\left(m_3 y'\right)'\right)' \right\|_p^p + \left\| \left(q(x) + ir(x) + \lambda\right) y \right\|_p^p \leq c_0 \|f(x)\|_p^p \tag{2.2}$$

бағалауы орындалатындай шарттарды зерттейміз. $m_1(x) = m_2(x) = m_3(x) = 1$ жағдайында (2.1) теңдеудің бірмәнді шешілуінің жеткілікті шартары $r = 0$ үшін [58;63;64], ал $r \geq 1$ үшін [59-61] жұмыстарында алынған.

Анықтама 2.1.1. Егер $y(x) \in L_p(R)$ функциясы үшін n шексіздікке ұмтылғанда $\|y_n - y\|_p \to 0$, $\|(L + \lambda E) y_n - f\|_p \to 0$ болатындай үзіліссіз және шексіз дифференциалданатын финитті функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылса, онда y функциясы (2.1) теңдеуінің шешімі деп аталады.

$C^{(k)}(R)$ $(k = 1,2,...)$ арқылы $\sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in R} \left|\varphi^{(j)}(x)\right|$ шамасы ақырлы болатындай k рет үзіліссіз дифференциалданатын $\varphi(x)$ функциялар жиынын белгілейміз.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижелері келесі екі теорема түрінде келтірілген.

Теорема 2.1.1. Айталық, $q(x)$, $r(x)$, $m_1(x)$ функциялары R - де үзіліссіз, $m_2 \in C_{loc}^{(1)}(R)$ $m_3 \in C_{loc}^{(2)}(R)$ және төмендегі шарттар орындалсын

$$m_1(x) \geq 1,\ m_2(x) \geq 1,\ m_3(x) \geq 1,\ \frac{q(x)}{\prod_{k=1}^{3} m_k^2(x)} \geq 1, \quad r(x) \geq 1, \tag{2.3}$$

$$c^{-1} \leq \frac{m_k(x)}{m_k(\eta)}, \frac{q(x)}{q(\eta)}, \frac{r(x)}{r(\eta)} \leq c,\ (k = 1,2,3) \ \ x,\eta \in R, \quad |x - \eta| \leq 1, \tag{2.4}$$

$$|m_2'(x)| \leq c m_2(x), \quad \left|m_3^{(j)}(x)\right| \leq c m_3(x) \ \ j = 1,2,\ x \in R, \tag{2.5}$$

$$\sup_{|x-\eta| \leq 1} \frac{|W_\lambda(x) - W_\lambda(\eta)|}{|W_\lambda(x)|^\nu |x - \eta|^\mu} < +\infty, \quad 0 < \nu < \frac{\mu}{3} + 1, \quad \mu \in (0,1], \quad \lambda \geq 0, \tag{2.6}$$

мұндағы $W_\lambda(x) := \dfrac{|q(x) + \lambda + ir(x)|}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}$. Онда барлық $\lambda \geq \lambda_0$ үшін (2.1) теңдеудің y шешімі бар болатындай $\lambda_0 \geq 0$ саны табылады.

(2.4), (2.5) шарттарында және алдағы уақытта c әр жерде әртүрлі болатын қандай да бір бекітілген тұрақты.

Теорема 2.1.2. Айталық, $q(x), r(x)$ функциялары R - де үзіліссіз, $m_1 \in C_{loc}^{(3)}(R)$, $m_2 \in C_{loc}^{(2)}(R)$, $m_3 \in C_{loc}^{(2)}(R)$ болсын, және (2.3), (2.4), (2.6) шарттарын және

$$\left|m_1^{(j)}(x)\right| \leq c m_1(x),\ j = \overline{1,3}, \ \left|m_k^{(i)}(x)\right| \leq c m_k(x),\ k = 2,3, \ \ i = 1,2,\ x \in R \tag{2.7}$$

шартын қанағаттандырсын. Онда (2.1) теңдеудің шешімі y жалғыз және ол үшін (2.2) бағалауы орындалады.

2.2. Көмекші тұжырымдар және олардың дәлелдеулері

Төмендегі түрде анықталған

$$M_0(x,\eta,\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{i(x-\eta)\xi}}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x) \left(\xi^3 - \dfrac{r - (q+\lambda)i}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \right)} d\xi = \frac{i 2\pi i}{2\pi} \sum_{k=0}^{2} \underset{\xi_k}{res}\, g(\xi)$$

интегралын қарастырамыз, мұндағы $g(\xi)$ интеграл астындағы функция. Айталық $\xi_s = \xi_s(x)$ $(s = 1,2,3)$ сандары $\prod_{k=1}^{3} m_k(x)\xi^3 - r(x) + i(q(x) + \lambda) = 0$ теңдеуінің түбірлері болсын. Теорема шартынан, яғни $r \geq 1$, $q \geq 1$, $\lambda \geq 0$ болғандықтан

$$\arg\left(\frac{r(x) - i(q(x) + \lambda)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}\right) \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

екендігі шығады, сондықтан $0 < \arg\xi_1 < \pi$ және $\pi < \arg\xi_j < 2\pi$, $j = 2,3$ болады. Сонымен $\operatorname{Im}\xi_1 > 0$, $\operatorname{Im}\xi_2 < 0$ және $\operatorname{Im}\xi_3 < 0$ екендігі белгілі. $\varphi_k = \arg\xi_k$ белгілеуін енгізейік, және $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{2\pi}{3}$ екені айқын. Сондықтан қалыңдыны ξ_1 нүктесінде есептеу кезінде $\eta - x > 0$ деп, ал ξ_2 және ξ_3 нүктелерінде есептеу кезінде $\eta - x < 0$ деп есептейміз.

$$\operatorname*{res}_{\xi_1} \frac{e^{i(x-\eta)\xi}}{\xi^3 - \frac{r - (q+\lambda)i}{\prod_{k=1}^{3} m_k}} =$$

$$= \frac{e^{i(x-\eta)\sqrt[3]{\left|\frac{r-(q+\lambda)i}{m_1 m_2 m_3}\right|}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}}{\sqrt[3]{\left|\frac{r - (q+\lambda)i}{m_1 m_2 m_3}\right|^2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 - \cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 - \cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)} =$$

$$= \frac{e^{i(x-\eta)\sqrt[3]{\left|\frac{r-(q+\lambda)i}{m_1 m_2 m_3}\right|}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}}{3\sqrt[3]{\left|\frac{r - (q+\lambda)i}{m_1 m_2 m_3}\right|^2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)^2}$$

Сәйкесінше, $\eta - x < 0$ деп есептеп

$$\underset{\xi_2}{res}\frac{e^{i(x-\eta)\xi}}{\xi^3-\dfrac{r-(q+\lambda)i}{m_1m_2m_3}}=\frac{e^{i(x-\eta)\sqrt[3]{\left|\frac{r-(q+\lambda)i}{m_1m_2m_3}\right|}(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}}{3\sqrt[3]{\left|\dfrac{r-(q+\lambda)i}{m_1m_2m_3}\right|^2}(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)^2}$$

және

$$\underset{\xi_3}{res}\frac{e^{i(x-\eta)\xi}}{\xi^3-\dfrac{r-(q+\lambda)i}{m_1m_2m_3}}=\frac{e^{i(x-\eta)\sqrt[3]{\left|\frac{r-(q+\lambda)i}{m_1m_2m_3}\right|}(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)}}{3\sqrt[3]{\left|\dfrac{r-(q+\lambda)i}{m_1m_2m_3}\right|^2}(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)^2}$$

теңдіктерін аламыз. Сонымен, келесі түрдегі

$$M_0(x,\eta,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\dfrac{e^{i(x-\eta)\xi_0}}{\xi_0^2}, & -\infty<\eta<x,\\[2ex] \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{e^{i(x-\eta)\xi_j}}{\xi_j^2}, & x<\eta<+\infty.\end{cases}\tag{2.8}$$

функциясын алдық. Біздің белгілеуімізге сәйкес төмендегі теңсіздіктер орындалады:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\varphi_1<1,\qquad -\frac{1}{2}>\sin\varphi_2>-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad -\frac{1}{2}<\sin\varphi_2<0.$$

$M_0(x,\eta,\lambda)$ функциясын η бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}=\begin{cases}\dfrac{i}{3\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\dfrac{e^{i(x-\eta)\xi_0}}{\xi_0}, & -\infty<\eta<x,\\[2ex] \dfrac{(-i)}{3\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{e^{i(x-\eta)\xi_j}}{\xi_j}, & x<\eta<+\infty.\end{cases}\tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} e^{i(x-\eta)\xi_0}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{-1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \sum\limits_{j=1}^{2} e^{i(x-\eta)\xi_j}, & x < \eta < +\infty. \end{cases} \tag{2.10}$$

Бұдан

$$\left.\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta}\right|_{x=\eta+0} = \frac{i}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{|r-i(q+\lambda)|}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}}} [\cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0] =$$

$$= \frac{(-i)}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \frac{(-1)}{\sqrt[3]{\dfrac{|r-i(q+\lambda)|}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}}} [\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 - i\sin\varphi_0 - i\sin\varphi_1] = \frac{i}{3\xi_0} = \left.\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta}\right|_{x=\eta-0}$$

және

$$\left.\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^2}\right|_{x=\eta+0} = \frac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)},$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^2}\right|_{x=\eta-0} = \frac{-2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}$$

болады. Бұл есептеулерді ескеріп төмендегі (2.11)-(2.13) теңдіктері алынады:

$$\left.\frac{\partial^j M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j}\right|_{x=\eta-0} = \left.\frac{\partial^j M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j}\right|_{x=\eta+0}, \quad j = 0,1, \tag{2.11}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta-0}-\left.\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta+0}=-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}, \qquad (2.12)$$

$$-m_1(x)\left(m_2(x)\left(m_3(x)\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}\right)_\eta^{/}\right)_\eta^{/}+[q(x)+ir(x)+\lambda]M_0(x,\eta,\lambda)=0. \qquad (2.13)$$

Сонымен, $x=\eta$ нүктесінде $M_0(x,\eta,\lambda)$ және $\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}$ функциялары үзіліссіз, ал $\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}$ функциясы секірісі $-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}$ - ға тең үзілісті болады.

Айталық, $d(\eta)\in C_0^\infty(-1;1)$ функциясы

$$d(\eta)=\begin{cases}1, & |\eta|\le\frac{1}{2}\\ 0, & |\eta|\ge 1.\end{cases}$$

түрінде анықталсын. Төмендегідей белгілеулер енгіземіз:

$$M_1(x,\eta,\lambda)=\left[\left(q(\eta)+ir(\eta)+\lambda\right)-\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\left(q(x)+ir(x)+\lambda\right)\right]M_0(x,\eta,\lambda)\theta(\eta-x),$$

$$M_2(x,\eta,\lambda)=-\left[2m_1(\eta)m_2(\eta)m_3'(\eta)\theta(\eta-x)+m_1(\eta)m_2'(\eta)m_3(\eta)\theta(\eta-x)+\right.$$

$$\left.+3m_1(\eta)m_2(\eta)m_3(\eta)\theta_\eta'(\eta-x)\right]\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}-$$

$$-\left[m_1(\eta)m_2'(\eta)m_3'(\eta)\theta(\eta-x)+m_1(\eta)m_2(\eta)m_3''(\eta)\theta(\eta-x)+4m_1(\eta)m_2(\eta)m_3'(\eta)\theta_\eta'(\eta-x)+\right.$$

$$\left.+2m_1(\eta)m_2'(\eta)m_3(\eta)\theta_\eta'(\eta-x)+3m_1(\eta)m_2(\eta)m_3(\eta)\theta_{\eta\eta}''(\eta-x)\right]\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}-$$

$$-\left[m_1(\eta)m_2'(\eta)m_3'(\eta)\theta_\eta'(\eta-x)+m_1(\eta)m_2(\eta)m_3''(\eta)\theta_\eta'(\eta-x)+\right.$$

$$+2m_1(\eta)m_2(\eta)m_3'(\eta)\theta_{\eta\eta}''(\eta-x)+$$

$$\left.+m_1(\eta)m_2'(\eta)m_3(\eta)\theta_{\eta\eta}''(\eta-x)+m_1(\eta)m_2(\eta)m_3(\eta)\theta_{\eta\eta\eta}'''(\eta-x)\right]M_0(x,\eta,\lambda),$$

$$M_3(x,\eta,\lambda)=M_0(x,\eta,\lambda)\theta(\eta-x).$$

Келесідей интегралдық операторларды қарастырамыз:

$$\left(M_j(\lambda)f\right)(\eta)=\int_R M_j(x,\eta,\lambda)f(x)dx \qquad (j=\overline{1,3}).$$

Төмендегідей тұжырымдар орындалады:

Лемма 2.1.1. [74, 902 б]. Айталық $1<p<+\infty$, $k(x,\eta)$ - үзіліссіз функция және

$$\left(Kv\right)(\eta)=\int_R k(x,\eta)v(x)dx$$

болсын. Онда

$$\|K\|_{L_p\to L_p}\le\sup_{\eta\in R}\int_R\left[|k(x,\eta)|+|k(\eta,x)|\right]dx$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ кезінде

$$\|K\|_{L_p\to L_p}=\sup_{\|f\|_{L_p}=1}\sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1}\left|(kf,g)\right|\le\sup_{\|f\|_{L_p}=1}\sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|k(x,\eta)f(x)g(\eta)|dxd\eta$$

теңсіздігі орындалады. Бұл теңсіздікке белгілі Юнг $|ab|\le\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^{p'}}{p'}$ теңсіздігін қолданып,

$$\|\mathrm{K}\|_{L_p\to L_p} = \sup_{\|f\|_{L_p}=1}\sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|k(x,\eta)|\left(\frac{|f(x)|^p}{p}+\frac{|g(\eta)|^{p'}}{p'}\right)dxd\eta\right)\right)\le$$

$$\le \sup_{\eta\in R}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|k(x,\eta)|+|k(\eta,x)|\right)dx$$

бағалауын аламыз. Лемма дәлелденді.

Лемма 2.1.2. Айталық, 2.1.1 теореманың барлық шарттары орындалсын. Онда $M_j(\lambda)$, $j=\overline{1,3}$ операторлары L_p кеңістігінде үзіліссіз болады және олар үшін келесі бағалаулар орындалады $(\lambda \ge 0)$

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \frac{c_1}{b_\lambda^{\mu+3-3\nu}(\eta)}, \qquad \mu\in(0,1],\ \ 0<\nu<\frac{\mu}{3}+1, \tag{2.14}$$

$$\|M_2(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \frac{c_2}{b_\lambda(\eta)}, \tag{2.15}$$

$$\|M_3(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \frac{c_3}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x) b_\lambda^3(\eta)}. \tag{2.16}$$

Мұндағы $b_\lambda(x) = \sqrt[3]{\dfrac{|r(x)-i(q(x)+\lambda)|}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}}$.

Дәлелдеу. 2.1.1 теоремадағы $q(x)$, $r(x)$ және $m_k(\eta)$ $k=\overline{1,3}$ функцияларына қойылған шарттарға сәйкес $\operatorname{Im}\xi_1 \ge \sigma$ және $\operatorname{Im}\xi_j \le -\sigma$ $(j=2,3)$ болатындай $\sigma>0$ тұрақтысы табылады. Онда (2.8) өрнегінен

$$
|M_0(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & x < \eta < +\infty, \end{cases} \tag{2.17}
$$

Жоғарыдағы (2.9) және (2.10) формулаларынан

$$
\left|\frac{\partial^j M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j}\right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^{2-j}(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^{2-j}(x)}, & x < \eta < +\infty, \quad j = 1,2, \end{cases} \tag{2.18}
$$

бағалаулары шығады. Таңдауымыз бойынша $|x-\eta|>1$ кезінде $M_j(x,\eta,\lambda)=0$ болады. Ал $|x-\eta|\le 1$ жағдайында 2.1.1 теоремадағы (2.3) - (2.6) шарттарын және (2.18) теңсіздікті ескеріп $M_j(x,\eta,\lambda)$ $(j=0,1,2)$ функциялары үшін төмендегі бағалауларды аламыз:

$$
|M_1(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} c\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)\,|x-\eta|^{\mu}\, b_\lambda^{3\nu-2}(x) \dfrac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ c\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)\,|x-\eta|^{\mu}\, b_\lambda^{3\nu-2}(x) \dfrac{e^{\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}, & x < \eta < +\infty, \end{cases} \tag{2.19}
$$

$$
|M_2(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \sum\limits_{k=0}^{2} c_k \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta) b_\lambda(x)}}{b_\lambda^k(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \\ \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \sum\limits_{k=0}^{2} c_k \dfrac{e^{\sigma(x-\eta) b_\lambda(x)}}{b_\lambda^k(x)}, & x < \eta < +\infty, \end{cases} \tag{2.20}
$$

$$
|M_3(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta) b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & -\infty < \eta > x, \\ \dfrac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{\sigma(x-\eta) b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & x < \eta < +\infty. \end{cases} \tag{2.21}
$$

2.1.1 лемманы пайдаланып және (2.19) - (2.21) теңсіздіктерін ескеріп L_p кеңістігінде $M_j(\lambda)$ $(j = 1,2,3)$ операторларының $\|M_j(\lambda)\|$ нормаларын бағалаймыз:

$$
\|M_1(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le \sup_{\eta \in R} \int_R \left[|M_1(x,\eta,\lambda)| + |M_1(\eta,x,\lambda)| \right] dx \le
$$

$$
\le c \sup_{\eta \in R} \int_{\eta-1}^{\eta+1} \left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \frac{\exp[-\sigma(x-\eta) b_\lambda(x)]}{b_\lambda^2(x)} + \frac{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \frac{\exp[-\sigma\,|x-\eta|\, b_\lambda(\eta)]}{b_\lambda^2(\eta)} \right) \times
$$

$$
\times \left| \frac{q(\eta) + \lambda + ir(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)} - \frac{q(x) + \lambda + ir(x)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \right| dx .
$$

Жоғарыдағы (2.3), (2.4), (2.6) шарттарын ескеріп

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p}\le$$

$$\le c\sup_{\eta\in R}\int\limits_{\eta-1}^{\eta+1}\left(\frac{\exp[-\sigma(x-\eta)cb_\lambda(\eta)]}{cb_\lambda^2(\eta)}+\frac{\exp[-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)]}{b_\lambda^2(\eta)}\right)\left|\frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}\right|^{\nu}|\eta-x|^{\mu}dx$$

теңсіздігін аламыз. Бұдан $\eta-x=\frac{1}{\sigma b_\lambda(\eta)}z$ айнымалылар ауыстыруын жасап

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p}\le\frac{c\left|\frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}\right|^{\nu}}{(cb_\lambda(\eta))^{\mu+3}}+\frac{c\left|\frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}\right|^{\nu}}{(b_\lambda(\eta))^{\mu+3}}=c\left(\frac{|q(\eta)+\lambda+ir(\eta)|}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}\right)^{\nu-\frac{\mu}{3}-1}$$

бағалауын аламыз. 2.1.1 теоремадағы (2.3) шартына сәйкес

$$\frac{|q(\eta)+\lambda+ir(\eta)|}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}\ge\sqrt{1+\lambda}$$

теңсіздігі орынды. Сондықтан алдыңғы теңсіздіктен (2.14) бағалауы шығады. Берілген функцияларға қойылған (2.3) - (2.5) шарттарын ескеріп

$$\|M_2(\lambda)\|_{L_p\to L_p}\le\sup_{\eta\in R}\int\limits_R\left[|M_2(x,\eta,\lambda)|+|M_2(\eta,x,\lambda)|\right]dx\le$$

$$\le\bar{c}_2\sup_{\eta\in R}\int\limits_{\eta-1}^{\eta+1}\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}+\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda(x)}+\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)}+\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda(\eta)}+\frac{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3}m_k(x)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda^2(\eta)}\right)dx$$

бағалауын аламыз. Бұдан интегралды есептеп бізге қажетті теңсіздікке келеміз:

$$\|M_2(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \bar{c}_3 \sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left[e^{-\sigma_1(x-\eta)b_\lambda(\eta)} + \frac{e^{-\sigma_1(x-\eta)b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda(\eta)} + \frac{e^{-\sigma_1(x-\eta)b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda^2(\eta)}\right]dx =$$

$$= \bar{c}_3 \sup_{\eta\in R}\left[\frac{1}{\sigma_1 b_\lambda(\eta)}\left(1-e^{-\sigma_1 b_\lambda(\eta)}\right) + \frac{1}{\sigma_1 b_\lambda^2(\eta)}\left(1-e^{-\sigma_1 b_\lambda(\eta)}\right) + \frac{1}{\sigma_1 b_\lambda^3(\eta)}\left(1-e^{-\sigma_1 b_\lambda(\eta)}\right)\right] \le \frac{c_2}{b_\lambda(\eta)}$$

.

Енді (2.16) теңсіздігін дәлелдейік. Жоғарыда алынған (2.21) бағалауына сәйкес

$$\|M_3(\lambda)\|_{L_p\to L_\mathrm{p}} \le \sup_{\eta\in R}\int_R \left(|M_3(x,\eta,\lambda)| + |M_3(\eta,x,\lambda)|\right)dx \le$$

$$\le \sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left(\frac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)} + \frac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda^2(\eta)}\right)dx$$

болады. Берілген функциялардың әлсіз тербелімділік, яғни (2.16) шартын ескеріп

$$\|M_3(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le$$

$$\le \bar{c}_3 \sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left(\frac{2}{3\left(c_1^{-1}\right)^2\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\tilde{c}\eta)}}{b_\lambda^2(\tilde{c}\eta)} + \frac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}\frac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda^2(\eta)}\right)dx \le$$

$$\le 2\bar{c}_3 \sup_{\eta\in R}\left(\frac{c_{41}}{\left(c_1^{-1}\right)^2\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)b_\lambda^3(\tilde{c}\eta)} + \frac{c_{42}}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)b_\lambda^3(\eta)}\right) \le \frac{\bar{c}_4}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)b_\lambda^3(\eta)}$$

бағалауын аламыз. Лемма дәлелденді.

Ескерту 2.1.1. Егер (2.3) шартында $r(x)$ функциясы $r(x)\geq 1$ теңсіздігінің орнына $r(x)\leq -1$ теңсіздігін қанағаттандырса да 2.1.2 лемма тұжырымдары орындалады

Шексіз дифференциалданатын және финитті функциялардың $C_0^{\infty}(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық

$$(l+\lambda E)y:=-m_1(x)\Big(m_2(x)\big(m_3(x)y'\big)'\Big)'+[q(x)+ir(x)+\lambda]y$$

өрнегінің L_p кеңістігіндегі тұйықтамасын $L+\lambda E\ (\lambda\geq 0)$ арқылы белгілейміз. Егер $y\in L_p$ функциясы $D(L+\lambda E)$ жиынында жатып және $(L+\lambda E)y=f$ теңдігі орындалса, онда 2.1.1 анықтамадан оның (2.1) теңдеудің шешімі екендігін оңай байқауға болады.

Лемма 2.1.3. Айталық, 2.1.1 теореманың шарттары орындалсын. Онда

$$(L+\lambda E)[M_3(\lambda)f](\eta)=f(\eta)+[M_1(\lambda)f](\eta)+[M_2(\lambda)f](\eta) \tag{2.22}$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. Келесі теңдіктің орындалатындығы айқын:

$$(L+\lambda E)[M_3(\lambda)f](\eta)=$$

$$=-m_1(\eta)\left(m_2(\eta)\left(m_3(\eta)\left(\int_{-\infty}^{\eta}M_0(x,\eta,\lambda)df(x)dx+\int_{\eta}^{+\infty}M_0(x,\eta,\lambda)df(x)dx\right)_{\eta}^{/}\right)_{\eta}^{/}\right)_{\eta}^{/}+$$

$$+(q(\eta)+ir(\eta)+\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\eta}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx+\int_{\eta}^{+\infty}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx\right)(\eta).$$

Бірінші ретті туындыны есептейік:

$$\frac{d}{d\eta}\big(M_3(\lambda)f\big)(\eta)=[\int_{-\infty}^{\eta}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx+\int_{\eta}^{\infty}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx]_{\eta}'=$$

$$= M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta - x)f(x)\big|_{x=\eta-0} - M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta - x)f(x)\big|_{x=\eta+0} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\eta} M'_{0\eta}(x,\eta,\lambda)d(\eta - x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\eta} M_0(x,\eta,\lambda)d'_\eta(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ \int_{\eta}^{\infty} M'_{0\eta}(x,\eta,\lambda)d(\eta - x)f(x)dx + \int_{\eta}^{\infty} M_0(x,\eta,\lambda)d'_\eta(\eta - x)f(x)dx .$$

Жоғарыдағы (2.9) теңдігін пайдаланып

$$M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta - x)f(x)\big|_{x=\eta-0} - M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta - x)f(x)\big|_{x=\eta+0} = 0$$

болатындығын көреміз. Бұл теңдікті ескеріп

$$\frac{d}{d\eta}\left(m_3(\eta)M'_{3\eta}(\lambda)f\right)(\eta) =$$

$$= m'_3(\eta)\int_R M'_{0\eta}d(\eta - x)f(x)dx + m'_3(\eta)\int_R M_0 d'_\eta(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ m_3(\eta)\int_R M''_{0\eta\eta}d(\eta - x)f(x)dx + 2m_3(\eta)\int_R M'_{0\eta}d'_\eta(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ m_3(\eta)\int_R M_0 d''_{\eta\eta}(\eta - x)f(x)dx$$

аламыз. Бұл өрнекті η бойынша дифференциалдап

$$\frac{d}{d\eta}\left(m_2(\eta)M'_{3\eta}(\lambda)f\right)(\eta) =$$

$$= m'_2(\eta)m'_3(\eta)\int_R M'_{0\eta}d(\eta - x)f(x)dx + m_2(\eta)m''_3(\eta)\int_R M'_0 d(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ 2m_2(\eta)m'_3(\eta)\int_R M''_{0\eta\eta}d(\eta - x)f(x)dx + 4m_2(\eta)m'_3(\eta)\int_R M'_{0\eta}d'_\eta(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ m_2'(\eta)m_3'(\eta)\int_R M_0 d_\eta'(\eta - x)f(x)dx + m_2(\eta)m_3''(\eta)\int_R M_0 d_\eta'(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ 2m_2(\eta)m_3'(\eta)\int_R M_0 d_{\eta\eta}''(\eta - x)f(x)dx + m_2'(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0'' d''(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ m_2(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0''' d(\eta - x)f(x)dx + 3m_2(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0'' d'(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ 2m_2'(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0' d'(\eta - x)f(x)dx + 3m_2(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0' d''(\eta - x)f(x)dx +$$

$$+ m_2'(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0 d''(\eta - x)f(x)dx + m_2(\eta)m_3(\eta)\int_R M_0 d'''(\eta - x)f(x)dx$$

теңдігін аламыз. Енді (2.10), (2.11) қатыстарын және $M_j(x,\eta,\lambda)$ $(j = \overline{1,3})$ белгілеулерін пайдаланып (2.22) теңдігін аламыз. Лемма дәлелденді.

Айталық, $m_k(x)$ $k = \overline{1,3}$, $q(x)$ және $r(x)$ функциялары 2.1.2 теоремасының шарттарын қанағаттандырсын, ал p' саны $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ теңдігі орындалатындай сан болсын. $(L + \lambda E)'$ арқылы $L_{p'}(R)$ кеңістігінде әрекет ететін және $\left((L + \lambda E)y, z\right) = \left(y, (L + \lambda E)' z\right)$, $y \in D(L + \lambda E)$, $z \in D\left((L + \lambda E)'\right)$ болатындай операторды белгілейміз. Бұл оператордың төменгі түрде анықталатындығы айқын:

$$(L + \lambda E)' z \equiv \left(m_3(x)\left(m_2(x)\left(m_1(x)z\right)'\right)' \right)' + \left(q(x) + \lambda - ir(x)\right)z .$$

Келесі дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$(L + \lambda E)' z \equiv \left(m_3(x)\left(m_2(x)\left(m_1(x)z\right)'\right)' \right)' + \left(q(x) + \lambda - ir(x)\right)z = g(x), \qquad (2.23)$$

мұндағы $m_1(x) \geq 1$ функциясы өзі және үшінші реттіге дейінгі туындыларымен бірге үзіліссіз, $m_2(x) \geq 1$ функциясы өзі және екінші реттіге дейінгі туындыларымен бірге үзіліссіз, $m_3(x) \geq 1$ функциясы өзі және бірінші реттіге дейінгі туындыларымен бірге үзіліссіз, ал $q(x)$ және $r(x)$ - үзіліссіз нақтымәнді функциялар, $\lambda \geq 0$, $g(x) \in L_{p'}(R)$.

Лемма 2.1.4. Айталық, үзіліссіз $q(x), r(x)$ функциялары және $m_1 \in C_{loc}^{(3)}(R)$, $m_2 \in C_{loc}^{(2)}(R)$, $m_3 \in C_{loc}^{(1)}(R)$ функциясы (2.3), (2.4), (2.6) шарттарын және

$$\left| m_1^{(j)}(x) \right| \leq c m_1(x), \; j = \overline{1,3}, \; \left| m_k^{(i)}(x) \right| \leq c m_k(x), \; k = 2,3, \; i = 1,2, \; x \in R \tag{2.24}$$

шартын қанағаттандырсын. Онда барлық $\lambda \geq \lambda_1$ үшін (2.23) теңдеудің y шешімі бар болатындай $\lambda_1 \geq 0$ саны табылады.

2.1.4 лемманы дәлелдемес бұрын алдымен бірнеше көмекші тұжырымдарды келтірейік.

Айталық, $\zeta_l = \zeta(x)$ $(l = 1,2,3)$ келесі

$$\prod_{k=1}^{3} m_k(x)\zeta^3 - r(x) - i(q(x) + \lambda) = 0$$

теңдеуінің түбірлері болсын. 2.1.4 лемма шарттарынан бұл түбірлердің $0 < \arg\zeta_j < \pi$ $(j = 1,2)$ және $\pi < \arg\zeta_3 < 2\pi$ болатындығы шығады. Келесі түрдегі функцияны енгіземіз

$$N_0(x,\eta,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{e^{i(x-\eta)|\zeta_j}}{\zeta_j^2}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{i(x-\eta)\zeta_3}}{\zeta_3^2}, & x < \eta < +\infty. \end{cases} \tag{2.25}$$

Тікелей есептеу арқылы (2.26) - (2.28) теңдіктері алынады:

$$\left. \frac{\partial^j N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j} \right|_{x=\eta-0} = \left. \frac{\partial^j N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j} \right|_{x=\eta+0}, \quad j = 0,1, \tag{2.26}$$

$$\left.\frac{\partial^2 N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta-0} - \left.\frac{\partial^2 N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta+0} = -\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}, \qquad (2.27)$$

$$\left(m_3(x)\left(m_2(x)\left(m_1(x)N_0(x,\eta,\lambda)\right)'_\eta\right)'_\eta\right)'_\eta + [q(x)-ir(x)+\lambda]N_0(x,\eta,\lambda) = 0. \qquad (2.28)$$

Төмендегідей белгілеулерді енгіземіз:

$$N_1(x,\eta,\lambda) = \left[\left(q(\eta)-ir(\eta)\right) - \frac{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)}\left(q(x)-ir(x)\right)\right]N_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x),$$

$$N_2(x,\eta,\lambda) = \left[4m'(\eta)m(\eta)d(\eta-x)+3m^2(\eta)d'(\eta-x)\right]\frac{\partial^2 N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2} +$$

$$+\left[3m''(\eta)m(\eta)d(\eta-x)+2\left(m'(\eta)\right)^2 d(\eta-x)+8m(\eta)m'(\eta)d'_\eta(\eta-x)+3m^2(\eta)d''_{\eta\eta}(\eta-x)\right]\frac{\partial N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}+$$
$$+\left[m''(\eta)m'(\eta)d(\eta-x)+m'''(\eta)m(\eta)d(\eta-x)+3m''(\eta)m(\eta)d'_\eta(\eta-x)+2\left(m'(\eta)\right)^2 d'_\eta(\eta-x)+\right.$$

$$\left.+4m'(\eta)m(\eta)d''_{\eta\eta}(\eta-x)+m^2(\eta)d'''_{\eta\eta\eta}(\eta-x)\right]N_0(x,\eta,\lambda),$$

және

$$N_3(x,\eta,\lambda) = N_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x).$$

Келесі түрдегі интегралдық операторларды енгіземіз:

$$\left(N_j(\lambda)g\right)(\eta) = \int\limits_R N_j(x,\eta,\lambda)g(x)dx \qquad (j=\overline{1,3}).$$

Лемма 2.1.5. Айталық, 2.1.4 лемманың барлық шарттары орындалсын. Онда $N_j(\lambda)$ операторлары $L_{p'}$ кеңістігінде үзіліссіз болады және

$$\left\|N_1(\lambda)\right\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \le \frac{c_1}{b_\lambda^{\beta+3-3\alpha}(\eta)}, \qquad \beta\in(0,1],\quad 0<\alpha<\frac{\beta}{3}+1, \qquad (2.29)$$

$$\|N_2(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \le \frac{c_2}{b_\lambda(\eta)}, \tag{2.30}$$

$$\|N_3(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \le \frac{c_3}{\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(\eta) b_\lambda^3(\eta)} \tag{2.31}$$

бағалаулары орындалады.

Дәлелдеу. 2.1.4 лемманың $q(x)$, $r(x)$ және $m_k(\eta)$ $k=\overline{1,3}$ функцияларына қатысты ұйғарымдарына сәйкес $\mathrm{Im}\zeta_j \ge \delta$ $(j=1,2)$ және $\mathrm{Im}\zeta_3 \le -\delta$ болатындай $\delta > 0$ тұрақтысы табылады. Онда (2.25) өрнегінен

$$|N_0(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{-\delta|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{\delta|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & x < \eta < +\infty, \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\left|\frac{\partial^j N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j}\right| \le \begin{cases} \dfrac{2}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{-\delta|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^{2-j}(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{1}{3\prod\limits_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{\delta|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^{2-j}(x)}, & x < \eta < +\infty, \quad j=1,2, \end{cases} \tag{2.33}$$

бағалаулары шығады. Таңдауымыз бойынша $|x-\eta|>1$ үшін $N_j(x,\eta,\lambda)=0$ болады. Ал, $|x-\eta|\le 1$ болғанда 2.1.4 леммадағы $m_k(\eta)$ $k=\overline{1,3}$, $q(x)$ және $r(x)$ функцияларына қойылған шарттарды және (2.32), (2.33) теңсіздіктерін пайдаланып $N_j(x,\eta,\lambda)$ $(j=0,1,2)$ үшін

$$\left|N_1(x,\eta,\lambda)\right| \le \begin{cases} \bar{c}_1 \prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)\,|x-\eta|^{\beta}\, b_{\lambda}^{3\alpha-2}(x) \dfrac{e^{-\delta|x-\eta|b_{\lambda}(x)}}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \bar{c}_2 \prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)\,|x-\eta|^{\beta}\, b_{\lambda}^{3\alpha-2}(x) \dfrac{e^{\delta|x-\eta|b_{\lambda}(x)}}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}, & x < \eta < +\infty, \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\left|N_2(x,\eta,\lambda)\right| \le \begin{cases} \dfrac{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \sum_{k=0}^{2} c_k \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta)b_{\lambda}(x)}}{b_{\lambda}^{k}(x)}, & -\infty < \eta < x, \\ \dfrac{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \sum_{k=0}^{2} c_k \dfrac{e^{\sigma(x-\eta)b_{\lambda}(x)}}{b_{\lambda}^{k}(x)}, & x < \eta < +\infty \end{cases} \tag{2.35}$$

және

$$\left|N_3(x,\eta,\lambda)\right| \le \begin{cases} \dfrac{2}{3\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{-\delta|x-\eta|b_{\lambda}(x)}}{b_{\lambda}^{2}(x)}, & -\infty < \eta < 0, \\ \dfrac{1}{3\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \dfrac{e^{\delta|x-\eta|b_{\lambda}(x)}}{b_{\lambda}^{2}(x)}, & x < \eta < +\infty \end{cases} \tag{2.36}$$

бағалауларын аламыз. Енді осы (2.34) - (2.36) теңсіздіктерін және 2.1.1 лемманы пайдаланып $N_j(\lambda)$ $(j=\overline{1,3})$ операторларының $\left\|N_j(\lambda)\right\|_{L_{p'}\to L_{p'}}$ нормаларын бағалаймыз:

$$\left\|N_1(\lambda)\right\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \le \sup_{\eta\in R} \int_R \left[\left|N_1(x,\eta,\lambda)\right| + \left|N_1(\eta,x,\lambda)\right|\right] dx \le$$

$$\leq c_1 \sup_{\eta\in R} \int_{\eta-1}^{\eta+1} \left(\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \frac{\exp[-\delta\ |x-\eta\ | b_\lambda(x)]}{b_\lambda^2(x)} + \frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)} \frac{\exp[-\delta\ |x-\eta\ | b_\lambda(\eta)]}{b_\lambda^2(\eta)} \right) \times$$

$$\times \left| \frac{q(\eta)+\lambda-ir(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)} - \frac{q(x)+\lambda-ir(x)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} \right| dx\,.$$

Жоғарыдағы (2.24), (2.25) және (2.27) шарттарын пайдаланып

$$\|N_1(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \leq$$

$$\leq c_2 \sup_{\eta\in R} \int_{\eta-1}^{\eta+1} \left(\frac{\exp[-\delta\,(x-\eta)\tilde{c} b_\lambda(\eta)]}{\tilde{c} b_\lambda^2(\eta)} + \frac{\exp[-\delta\,(x-\eta) b_\lambda(\eta)]}{b_\lambda^2(\eta)} \right) \left| \frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{m^2(\eta)} \right|^{\alpha} |\eta-x|^{\beta}\, dx$$

аламыз. Бұл теңсіздікте $\eta - x = \frac{1}{\delta b_\lambda(\eta)} z$ айнымалылар алмастыруын жасап, төменгі түрдегі бағалауды аламыз:

$$\|N_1(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \leq \frac{c_3 \left| \frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)} \right|^{\alpha}}{\left(\tilde{c} b_\lambda(\eta)\right)^{\mu+3}} + \frac{c_4 \left| \frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)} \right|^{\alpha}}{\left(b_\lambda(\eta)\right)^{\mu+3}} =$$

$$= \frac{c_5}{\left(\frac{|q(\eta)+\lambda+ir(\eta)|}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)} \right)^{\frac{\beta}{3}+1-\alpha}}\,.$$

Бұдан (2.3) шартын ескеріп (2.29) теңсіздігіне келеміз. 2.1.4 лемманың (2.24) - (2.26) шарттарын пайдаланып

$$\|N_2(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \le \sup_{\eta\in R}\int_R \left[|N_2(x,\eta,\lambda)| + |N_2(\eta,x,\lambda)|\right]dx \le$$

$$\le \bar{c}_2 \sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left(c_1\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)} e^{-\delta(x-\eta)b_\lambda(x)} + c_2\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}\frac{e^{-\delta(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda(x)} + \right.$$

$$+ c_3\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}\frac{e^{-\delta(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)} + c_4\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)} e^{-\delta(x-\eta)b_\lambda(\eta)} +$$

$$+ c_5\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}\frac{e^{-\delta(x-\eta)b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda(\eta)} + c_6\frac{\prod_{k=1}^{3} m_k(x)}{\prod_{k=1}^{3} m_k(\eta)}\frac{e^{-\delta(x-\eta)b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda^2(\eta)}$$

теңсіздігін аламыз. Бұл теңсіздікте интегралдарды есептеп, өзімізге қажетті

$$\|N_2(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}} \le \bar{c}_3 \sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left[e^{-\delta_1(x-\eta)b_\lambda(\eta)} + \frac{e^{-\delta_1(x-\eta)b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda(\eta)} + \frac{e^{-\delta_1(x-\eta)b_\lambda(\eta)}}{b_\lambda^2(\eta)}\right]dx =$$

$$= \bar{c}_3 \sup_{\eta\in R}\left[\frac{1}{\delta_1 b_\lambda(\eta)}\left(1-e^{-\delta_1 b_\lambda(\eta)}\right) + \frac{1}{\delta_1 b_\lambda^2(\eta)}\left(1-e^{-\delta_1 b_\lambda(\eta)}\right) + \frac{1}{\delta_1 b_\lambda^3(\eta)}\left(1-e^{-\delta_1 b_\lambda(\eta)}\right)\right] \le \frac{c_2}{b_\lambda(\eta)}$$

бағалауын аламыз. (2.31) теңсіздігі (2.16) теңсіздігінің дәлелдеуіне ұқсас дәлелденеді. Лемма дәлелденді.

Лемма 2.1.6. Айталық, 2.1.4 лемманың шарттары орындалсын. Онда

$$(L+\lambda E)^{/}[N_3(\lambda)g](\eta) = g(\eta) + [N_1(\lambda)g](\eta) + [N_2(\lambda)g](\eta) \qquad (2.37)$$

қатынасы орындалады.

Дәлелдеу. $(L+\lambda E)^{/}$ операторының анықталуы бойынша

$$\left(L+\lambda E\right)^{/}\left[N_3(\lambda)g\right](\eta)=$$

$$=\left[m_3(\eta)\left(m_2(\eta)\left(m_1(\eta)\left(\int_{-\infty}^{\eta}N_0(x,\eta,\lambda)dg(x)dx+\int_{\eta}^{+\infty}N_0(x,\eta,\lambda)dg(x)dx\right)\right)_{\eta}^{/}\right)_{\eta}^{/}\right]_{\eta}^{/}+$$

$$+\left(q(\eta)-ir(\eta)+\lambda\right)\left(\int_{-\infty}^{\eta}N_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)g(x)dx+\int_{\eta}^{+\infty}N_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)g(x)dx\right)(\eta)$$

теңдігінің орындалатындығы шығады. Төмендегі туындыларды есептейміз:

$$\frac{d}{d\eta}\left(m_1(\eta)N_3(\lambda)g\right)(\eta)=$$

$$=m_1'(\eta)\int_R N_0d(\eta-x)g(x)dx+m_1(\eta)\int_R N_{0\eta}'d(\eta-x)g(x)dx+m_1(\eta)\int_R N_0d_{\eta}'(\eta-x)g(x)dx.$$

Егер

$$A=\frac{d}{d\eta}\left(m_1(\eta)N_3(\lambda)g\right)$$

деп белгілесек, онда

$$\frac{d}{d\eta}\left(m_2(\eta)A\right)(\eta)=m_2'(\eta)A+m_2(\eta)A',$$

мұндағы

$$A'=m_1''(\eta)\int_R N_0d(\eta-x)g(x)dx+2m_1'(\eta)\int_R N_0'd(\eta-x)g(x)dx+$$

$$+2m_1'(\eta)\int_R N_0d'(\eta-x)g(x)dx+m_1(\eta)\int_R N_0''d(\eta-x)g(x)dx+$$

$$+2m_1(\eta)\int_R N_0'd'(\eta-x)g(x)dx+m_1(\eta)\int_R N_0d''(\eta-x)g(x)dx.$$

Енді $B = \frac{d}{d\eta}\left(m_2(\eta)A\right)$ белгілеуін енгізсек, онда

$$\frac{d}{d\eta}\left(m_3(\eta)B\right)(\eta) = m_3'(\eta)B + m_3(\eta)B'$$

теңдігін аламыз. Мұндағы

$$B' = m_2''(\eta)A + 2m_2'(\eta)A' + m_2(\eta)A'',$$

ал

$$A'' = m_1'''(\eta)\int_R N_0 d(\eta - x)g(x)dx + m_1''(\eta)\int_R N_0 d(\eta - x)g(x)dx +$$

$$+ 3m_1''(\eta)\int_R N_0 d'(\eta - x)g(x)dx + 2m_1''(\eta)\int_R N_0' d(\eta - x)g(x)dx +$$

$$+ 3m_1'(\eta)\int_R N_0'' d(\eta - x)g(x)dx + 6m_1'(\eta)\int_R N_0' d'(\eta - x)g(x)dx +$$

$$+ 3m_1'(\eta)\int_R N_0 d''(\eta - x)g(x)dx + m_1(\eta)\int_R N_0''' d(\eta - x)g(x)dx +$$

$$+ 3m_1(\eta)\int_R N_0'' d'(\eta - x)g(x)dx + 3m_1(\eta)\int_R N_0' d''(\eta - x)g(x)dx +$$

$$+ m_1(\eta)\int_R N_0 d'''(\eta - x)g(x)dx$$

Енді (2.26) - (2.28) қатынастарын және $N_j(x,\eta,\lambda)$ $(j = \overline{1,3})$ белгілеулерін пайдаланып (2.37) теңдігін аламыз. Лемма дәлелденді.

2.1.4 лемманың дәлелдеуі. (2.29) және (2.30) бағалауларының көмегімен $\lambda \geq \lambda_1$ болғанда $\|N_1(\lambda)\|_{L_{p'} \to L_{p'}} + \|N_2(\lambda)\|_{L_{p'} \to L_{p'}} \leq \frac{1}{2}$ теңсіздігі орындалатындай $\lambda_1 > 0$ саны табылады. Онда $\Phi(\lambda) = E + N_1(\lambda) + N_2(\lambda)$ операторының $L_{p'}$ кеңістігінде ақырлы кері $\Phi^{-1}(\lambda)$ операторы бар. Сондықтан, $h = [E + N_1(\lambda) + N_2(\lambda)]g$ деп алып, (2.37) қатынасынан $(L + \lambda E)^{/}[N_3(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)h](\eta) = h$ теңдігін аламыз. Сәйкесінше, $\lambda \geq \lambda_1$ болатындай барлық λ - лар үшін $y = N_3(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)g$ функциясы (2.23) теңдеудің шешімі болады. Лемма дәлелденді.

2.3 Негізгі тұжырымдарды дәлелдеу

2.1.1 теореманың дәлелдеуі. (2.14) және (2.15) бағалауларының көмегімен $\lambda \geq \lambda_0$ болғанда $\|M_1(\lambda)\|_{L_p \to L_p} + \|M_2(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \leq \frac{1}{2}$ теңсіздігі орындалатындай $\lambda_0 \geq 0$ саны табылады. Онда $G(\lambda) = E + M_1(\lambda) + M_2(\lambda)$ операторының L_p кеңістігінде ақырлы кері $G^{-1}(\lambda)$ операторы бар. Сондықтан, $h = [E + M_1(\lambda) + M_2(\lambda)]f$ деп алып, (2.22) қатынасынан $(L + \lambda E)[M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda)h](\eta) = h$ теңдігін аламыз. Сәйкесінше, $\lambda \geq \lambda_0$ болатындай барлық λ - лар үшін $y = M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda)f$ функциясы (2.1) теңдеудің шешімі болады. Теорема дәлелденді.

2.1.2 теореманың дәлелдеуі. 2.1.4 леммадан $L_{p'}(R)$ кеңістігінде әрекет ететін $(L + \lambda E)^/$ операторының $\lambda \geq \lambda_1$ кезінде $L_{p'}(R)$ кеңістігінде анықталған оң кері операторы бар. Сондықтан $\ker\left((L + \lambda E)^/\right)^* = \{0\}$, мұндағы $\left((L + \lambda E)^/\right)^*$ операторы $(L + \lambda E)^/$ операторына түйіндес оператор. Бұдан, $\left((L + \lambda E)^/\right)^*$ операторы $L + \lambda E$ операторының кеңеюі болғандықтан $\ker(L + \lambda E) = \{0\}$, $\lambda \geq \tilde{\lambda} = \max(\lambda_0, \lambda_1)$ аламыз. Сондықтан, $L + \lambda E$ операторы $L_{p'}(R)$ кеңістігінде шектеулі қайтарымды және

$$\left(L + \lambda E\right)^{-1} = M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda),\ \lambda \geq \tilde{\lambda} = \max(\lambda_0, \lambda_1). \tag{2.38}$$

Айталық, y (2.1) теңдеудің шешімі болсын, мұндағы $\lambda \geq \tilde{\lambda} = \max(\lambda_0, \lambda_1)$. Енді (2.2) бағалауын дәлелдейік. (2.38) өрнегін, 2.1.1 лемманы және (2.3) - (2.6) шарттарын пайдаланып

$$\left\|(q + \lambda + ir)(L + \lambda E)^{-1}\right\|_{L_p \to L_p} = \left\|(q + \lambda + ir)M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda)\right\|_{L_p \to L_p} \leq$$

$$\leq c \sup_{\eta \in R} \int_{\eta - 1}^{\eta + 1} b_\lambda^3(\eta) b_\lambda^{-2}(x) \exp[-\sigma |x - \eta| b_\lambda(x)] dx \leq$$

$$\leq c_1 \sup_{\eta \in R} b_\lambda(\eta) \int_{\eta - 1}^{\eta + 1} \exp[-\sigma |x - \eta| b_\lambda(\eta)] dx < \infty$$

бағалауын аламыз. Бұл теңсіздіктен және (2.1) теңдеуінен

$$\left\| m_1(x)\left(m_2(x)\left(m_3(x)y'\right)'\right)' \right\|_p \le c\left(\|f\|_p + \|y\|_p\right)$$

бағалауы шығады. Соңғы екі теңсіздікті біріктіріп (2.2) бағалауын аламыз. Теорема дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста автордың шенелмеген облыста берілген сингулярлы дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің тегістігі мен олардың әр түрлі нормалардағы бағалауларын зерттеу барысында алған нәтижелері келтірілген. Диссертациялық жұмыста алынған жаңа нәтижелердің ішіндегі негізгілерін келесі түрде атап өтуге болады:

Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімде формасы симметриялы емес нұқсанды екінші ретті дифференциалдық оператордың қайтарымдылық және бөліктенуінің жеткілікті шарттары алынған. Және осы оператордан туындаған нұқсанды екінші ретті дифференциалдық теңдеудің бірмәнді шешілунің жеткілікті шарттары алынған. Сонымен қатар, осы теңдеу шешімінің жуықталу шарттары алынған.

Сызықты жағдай үшін алынған нәтижелерді пайдаланып сызықты емес екінші ретті дифференциалдық

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x)$$

теңдеуінің шешілу шарттары анықталған.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде коэффициенттері комплексті үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің табылуының және жалғыздығының жеткілікті шарттары алынып, ол табылған шешім үшін коэрцитивті бағалуының орындалуын қамтамасыз ететін шарттар алынған.

Алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие. Олар нақты процестерді сипаттайтын әр түрлі дифференциалдық операторлардың спектралдық қасиеттерін зерттеуге пайдаланылады.

Диссертация жазу кезінде бірінші кезекте ғылыми жетекшім мен шет елдік ғылыми кеңісшілерім, профессор Қ.Н. Оспанов пен Ларс-Ерик Перссонға шын жүректен алғысымды білдіремін.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – С. 576.

2 Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – С. 371.

3 Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. - 1971. – Vol.23, № 3. - P. 301-324.

4 Everitt W.N., Giertz M. Some inequalities associated with certain ordinary differential operators // Math. Z. - 1972. – Vol.126, - P. 308-326.

5 Everitt W.N., Giertz M. On some properties of the powers of a formally self-adjoint differential expression // Proc. London Math. Soc. - 1972. – Vol.24, № 3. - P. 149-170.

6 Everitt W.N., Giertz M. On some properties of the domains of powers of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. - 1972. – Vol.24, № 3. - P. 756-768.

7 Everitt W.N., Giertz M. An example concerning the separation property of differential operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. - 1973. – Vol.71, , part 2. - P. 159-165.

8 Everitt W.N., Giertz M. Inequalities and separation for Schrodinger type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1977 - 1978. – Vol.24, № 3. - P. 756-768. V. 79, 1977/78, no. 3-4, p. 257-265.

9 Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма-Лиувилля. Математические заметки, 1974, т. 16, № 6. - с. 969-980.

10 Atkinson F.V. On some results of Everitt and Giertz. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 71 A, part 2, 1973. – p. 151-158.

11 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма-Лиувилля. Математические заметки, 1973, т. 14, № 3. - с. 349-359.

12 Бойматов К.Х. Об области определения оператора Штурма – Лиувилля. Дифф. Уравн. – 1976. – Т.12, №7. – с. 1151-1160.

13 Раимбеков Д.Ж. Гладкость решения в L_2 сингулярного уравнения. Изв.АН КазССР, сер. физ.-мат. № 3, 1974. – с. 78-83.

14 Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям связанные с дифференциаль-ными уравнениями второго порядка. - М.: Мир, I961, т.2.

15 Бойматов К.Х. Асимптотика спектра операторного дифференциального уравнения. Успехи мат. наук. Т. 28. 1973, №. 4(172) – с. 207-208.

16 Бойматов К.Х. О спектре эллиптического оператора. Автореферат канд. дисс., МГУ, 1974.

17 Отелбаев М. К методу Титчмарша оценки резольвенты. Докл. АН СССР, 1973, т.211, № 5, с.787-790.

18 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости. ДАН СССР, 1973, т. 213, № 5. - с. 1009-1011.

19 Муратбеков М.Б., Отелбаев М. О гладкости решения нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля. Тез.докладов VII-й казахстанской межвузовской научной конференции по математике и механике. Караганда, 1981, с. 34-35.

20 Аманова Т.Т. Гладкость и аппроксимативные свойства двучленных дифференциальных операторов на бесконечном интервале. Дис. канд. физ.-мат.наук. Алма-Ата, 1984.

21 Муратбеков М.Б. О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений и нелинейного стационарного уравнения Щредингера. Канд. дисс. … Алма-Ата, 1981, 81 с.

22 Гриншпун Э.З., Отелбаев М. О гладкости решений нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty,+\infty)$. Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1984, № 5. - с. 26-29.

23 Абудов А.А. О разделимости одного оператора, порожденного операторно-дифференциальным выражением. Спектральная теория операторов. Баку, "Элм", 1982. - с.4-11.

24 Байрамоглы М., Абудов А.А. О существенной самосопряженности оператора Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами. Спектральная теория операторов, Баку, "Эдм", 1982. - с. 12-20.

25 Бойматов К.Х., Шарифов А. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов произвольного порядка. Успехи математических наук, 1989, т.44, вып. 3(267). - с. 147-148.

26 Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the Sturm-Liouville differential operator with an operator potential, (English summary). Appl. Math. Comput. V. 156. 2004, no. 2. - p. 387-394.

27 Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. On the separation of elliptic differential operators with operator potentials in weighted Hilbert spaces. Panamer. Math. J. V. 15. 2005. no. 2. p. 39-47.

28 Zettl A. Separation for differential operators and the L_p spaces. Proc. Amer. Math. Soc. V. 55. 1976. no. 1. – p. 44-46.

29 Апышев О.Д., Отелбаев М. О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения. Известия АН СССР, 1979, т. 43, № 4. - с. 739-764.

30 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения к краевым задачам. Труды: Математического института АН СССР, 1984, т.170. - с. 37-76.

31 Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. ДАН СССР, 1988, Т. 301, № 5. - .с. 1033-1036.

32 Brown R.C. Separation and disconjugacy, (English summary). JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. V. 4. 2003, no. 3, Article 56, 16 pp. (electronic).

33 Brown R.C., Hinton D.B. Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators, (English summary). Math. Bohem. V. 124. 1999, no. 2-3, p. 273-292.

34 Brown R.C., Hinton D.B., Shaw M.F. Some separation criteria and inequalities associated with linear second order differential operators. Function spaces and applications (Delhi, 1997), 7-35, Narosa, New Delhi, 2000.

35 Chernyavskaya N., Shuster L. Weight summability of solutions of the Sturm-Liouville equation, (English summary), J. Differential Equations. V. 151, 1999, no. 2, p. 456-473.
36 Mohamed A.S. Separability of the Schrodinger operator using matrix material [potential], (Russian. Tajiki summary),t Dokl. Akad. Nauk Respub. Tadzhikistan, 35, 1992, no. 3, 156-159.
37 Mohamed A.S. Existence and uniqueness of the solution, separation for certain second order elliptic differential equation, (English summary). Appl. Anal. V. 76, 2000. no. 3-4. - p. 179-184.
38 Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the Sturm-Liouville differential operator with an operator potential. Appl. Math. Comput. V. 156. 2004. no. 2. – p. 387-394.
39 Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the Schrodinger operator with an operator potential in the Hilbert spaces, (English summary). Appl. Anal. V. 84. 2005. no. 1. – p. 103-110.
40 Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the general second order elliptic differential operator with an operator potential in the weighted Hilbert spaces, (English summary). Appl. Math. Comput. V. 162. 2005. no. 1. – p. 155-163.
41 Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций // ДАН СССР, 1985. т. 285, №5. -С.1062-1064.
42 Omran S., Gepreel Kh.A., Nofal E.T.A. Separation of the general differential wave equation in Hilbert space, (English summary). Int. J. Nonlinear Sci. V. 11. 2011. no. 3. – p. 358-365.
43 Отелбаев М. Оценки собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов. Матем. заметки, Т. **20**. №6. 1976. – с. 859–867.
44 Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов. ДАН СССР, 1977, т. 234, №3. -с. 540-543.
45 Отелбаев М. О гладкости решения дифференциальных уравнений. Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1977, № 5. - с. 45-48.
46 Отелбаев М. Оценки спектра эллиптических операторов и теоремы вложения связанные с ними. Москва. 1979.
47 Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применение к изучению спектра оператора Шредингера. Труды МИ АН СССР, 1979, т.150, с.265-305.
48 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n. Труды Математического института АН СССР, 1983, т. 161. - с. 195-217.
49 Отелбаев М. Оценки спектра оператора Штурма – Лиувилля. - Алма-Ата.: Ғылым, 1990. – С.12.
50 Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. Separation for Schrodinger-type operators with operator potentials in Banach spaces, Appl. Anal. V. 84. 2005, no. 2. p. 211-220.
51 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Macmillan, New York. 1963.

52 Гасымов М.Г. О распределении собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов. Докл.АН СССР, 1969, т. 186, № 4, с. 753 - 756.

53 Костюченко А.Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов, Матем. заметки, Т.**1** №3, 1967 – с. 365–378

54 Костюченко А. Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. М.: Наука. 1979. – С. 399

55 Скачек Б.Я. Распределение собственных значений многомерных дифференциальных операторов. Функциональный анализ и его приложения. Т.9, вып. 1, 1975. – с.83-84.

56 Алиев Б.И. Теоремы разделимости для операторного уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси. Спектральная теория операторов. Баку, "Элм", 1989, №. 9. – с. 3-10.

57 Аманова Т.Т. О разделимости одного дифференциального оператора. Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 3. - с. 48-51.

58 Аманова Т.Т., Муратбеков М.Б. Гладкость решения одного нелинейного дифференциального уравнения. Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1983, № 5. - с. 4-7.

59 Айкожа Ж.Ж. О гладкости и аппроксимативных свойствах решений дифференциальных уравнений нечетного порядка. Дис. канд. физ.-мат.наук. Алма-Ата, 2003.

60 Айкожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б. О гладкости и аппроксимативных свойствах решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с комплексным потенциалом. Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Теория приближения и вложения функциональных пространств», г. Караганда. 1991. – с. 52.

61 Айкожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б., Оспанов К.Н. О разрешимости одного класса нелинейных сингулярных уравнений третьего порядка. Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, 2005, № 6 (46), с. 10-15.

62 Биргебаев А. Гладкость решений нелинейного дифференциального уравнения с матричным потенциалом. Тезисы докладов VIII Республиканской межвузовской научной конференции по математике и механике. - Алма-Ата, 1984. - с.11.

63 Биргебаев А., Отелбаев М. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка. Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1984, № 3. - с. 11-13.

64 Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения// Доклады Академии Наук. – 2010, том 435, № 3, с. 310-313.

65 Сапенов М., Шустер Л.А. О суммируемости с весом решений двучленных дифференциальных уравнений. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат. 1987. - №1. – с. 38-42

66 Тогочуев А.Ж. О суммируемости решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с весом. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат. -1985. №5. – с. 55-58.

67 Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights, Stud. Math., Vol. XLIV, 1 (1972). 31-38.

68 Кац И.С., Крейн М.Г. Критерий дискретности спектра сингулярной струны // Изв. высших учеб. заведений, Математика, 1958, № 2(3), с. 136-153.

69 Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Московского матем. Общества, 1953, т.2, с. 169-200.

70 Бирман М.Ш., Павлов В.С. О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестник ЛГУ. Серия мат., мех. и астрон., 1961, вып. 1, с. 61-74.

71 Отелбаев М. Критерий дискретности спектра одного вырожденного оператора и некоторые теоремы вложения // Дифф. Уравнения, 1977, т. 13, №1, с. 111-120.

72 Отелбаев М. Двусторонние оценки поперечников и их применения. ДАН СССР, т. 231, № 4, 1976, с. 810-813.

73 Stepanov V.D. Boundedness of integral operators on the semi axis // Function Spaces and Inequalities. Praha: MATFYZPRESS, 2013, pp. 117-150.

74 Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969, 1071 с.