Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 517.956

На правах рукописи

АХТАЕВА НАЗГУЛЬ СМАЙЛХАНОВНА

Вопросы разрешимости задач для смешанного параболо-гиперболического уравнения

6D060100 – «Математика»

Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
Доктор физико-математических наук, профессор Бердышев А. С.
Зарубежный научный консультант:
Доктор естественных наук,
профессор Alberto Cabada
(Университет Сантьяго де Компостела, Испания)

Республика Казахстан
Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА 25
1.1 Сильная разрешимость и вольтерровость краевой задачи с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения……………………………………………………….………25
1.2 Сильная разрешимость и существование собственных значений краевой задачи с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения 37
1.3 Разрешимость локальной задачи с интегральными условиями сопряжения на линии изменения типа 46
1.4 Аналог задач Трикоми и Геллерстедта для смешанного параболо-гиперболических уравнений дробного порядка 51
2 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА 59
2.1 Сильная разрешимость краевых задач для гиперболического уравнения третьего порядка 59
2.2 Сильная разрешимость задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка 64
2.3 О неединственности решения аналога задачи Дарбу для гиперболического уравнения третьего порядка 71
2.4 О разрешимости краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка в области с характеристической границей. 75
3. ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА 79
3.1. Вольттеровость аналога задачи Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка 79
3.2 Сильная разрешимость краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка 88
Заключение 95
Список использованных источников 96

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория уравнений смешанного типа является одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес к этим вопросом связан как с теоретической значимостью получаемых результатов, так и с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обусловливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

В 1902 г. С. А. Чаплыгин в своей работе «О газовых струях» впервые указал на важность изучения уравнений смешанного типа [1]. Начало же исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 1920-1930 гг. работами Ф. Трикоми [2], С. Геллерстедта [3]. Новым толчком в развитии этой теории послужили работы М. А. Лаврентьева [4], А. В. Бицадзе [5-6], Ф.И. Франкля [7], М. Проттера [8], С. Моравец [9], где наряду с теоретическими исследованиями ряда существенных вопросов этой теории была указана и их практическая значимость.

К настоящему моменту проблемам теории краевых задач для уравнений смешанного типа посвящены многочисленые работы. Достаточно полный обзор полученных результатов содержится в книгах А.В.Бицадзе [6], Ю.М. Березанского [10], Л. Берса [11], М.С. Салахитдинова [12], Т.Д.Джураева [13], А.М.Нахушева [14], Кальменова [15] и др.

В большинстве своем это были работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектам уравнений смешанного эллиптико- гиперболического типа.

В настоящее время понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трех классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного параболо- гиперболического типа обусловлена тем, что с одной стороны, новые типы смешанных уравнений мало исследована в теоретическом плане, с другой стороны они лежат в основе математических моделей различных природных явлений.

На необходимость рассмотрения задач для уравнения смешанного параболо- гиперболичесоко типа указано в 1959 г. И.М. Гельфандом [16]. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: движение газа в канале описывается волновым уравнением, вне его- уравнением диффузии. Математические модели этих задач возникают и при изучении электромагнитного поля в неоднородной среде, сосотоящей из диэлектрика и проводящей среды, при моделировании движения малосжимаемой жидкости в канале, окруженной пористой средой [17]. Здесь волновое уравнение описывает гидродинамическое давление жидкости в канале, а уравнение фильтрации- давление жидкости в пористой среде. Аналогичные проблемы возникают при исследовании магнитной напряженности электромагнитного поля [17].

В последние годы также возрос интерес к задачам для смешанного параболо- гиперболическим уравнениям с интегральными условиями склейвания на линии изменения типа [18-19].

Одной из первых работ, посвященных изучению краевых задач с интегральными условиями склейвания на линии изменения типа для параболо-гиперболических уравнений, явились работы Г.М. Стручиной [20], Я.С. Уфлянд [21] задачу о распростронении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке $0<x<l$ полубесконечной линии пренебрегаются потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, свел к решению системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} L\dfrac{\partial I_1}{\partial t}+\dfrac{\partial U_1}{\partial x}=0,\quad C_1\dfrac{\partial U_1}{\partial t}+\dfrac{\partial I_1}{\partial x}=0,\quad 0<x<l \\ \\ RI_2+\dfrac{\partial U_2}{\partial x}=0,\quad C_2\dfrac{\partial U_2}{\partial t}+\dfrac{\partial I_2}{\partial x}=0,\quad l<x<\infty \end{array}\right\}$$

при начальных

$$U_1\big|_{t=0}=0,\quad I_1\big|_{t=\theta}=0,\qquad U_2\big|_{t=0}=0$$

и граничных

$$U_1\big|_{x=0}=E(t),\quad \lim_{x\to\infty}U_2=0$$

условиях, а также при требованиях непрерывности напряжения и тока

$$U_1\big|_{x=l}=U_2\big|_{x=l}\,,\quad I_1\big|_{x=l}=I_2\big|_{x=l}$$

Здесь L,C_1- самоиндукция и емкость (на единицу длины) первого участка линии; R,C_2-сопротивление и емкость второго участка.

Нетрудно убедится, что если из системы уравнений исключить токи, то в привычных для нас обозначениях можно прийти к задаче

$$0=\begin{cases} a_1^2u_{xx}-u_{yy}, & 0<x<l \\ \\ a_2^2u_{xx}-u_y, & l<x<+\infty \end{cases}$$

$$u(x,0)=0, u_y(x,0)=0,\ \ 0<x<l,\ u(x,0)=0\ \ l<x<\infty$$

$$u(0,y)=E(y),\ \lim_{x\to+\infty}u(x,y)=0$$

$$u(l-0,y)=u(l+0,y),\ u_x(l+0,y)=\frac{R}{L}\int_0^x u_x(l-0,\eta)d\eta$$

$$a_1^2=\frac{1}{LC_1},\ a_2^2=\frac{1}{RC_2}$$

Вопросы разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для смешанных параболо- гиперболических уравнении второго и третьего порядков изучается интенсивно. Однако, несмотря на большое количество работ по этому направлению, вопросы разрешимости краевых задач с интегральными условиями сопряжения для уравнений параболо- гиперболических уравнении второго и третьего порядков остаются открытыми. Все вышесказанное позволяет заключить, что тема диссертации актуальной.

Изучению одназначной разрешимости краевых задач для параболо-гиперболических уравнений посвященно много работ.

В 1977 году В.А.Елеевым [22] был изучен вопросы регулярной разрешимости аналога задачи Трикоми для параболо- гиперболического уравнения второго порядка с нехарактеристической линией изменения типа. В работе К.Б. Сабитова [23] опубликованной 1989 году было доказана отсутствие спектра для вышеприведенной задачи.

В этом же году Г.Д. Тойжанова и М.А. Садыбеков [24] доказали существования хотя бы одного собственного значения задачи с касательной производной для параболо- гиперболического уравнения нехарактеристической линией изменения типа.

Вопросы разрешимости и спектральные свойства ряда локальных и нелокальных задач для смешанного параболо- гиперболических уравнений второго и третьего порядков изучены в работах А.С. Бердышева [25- 26].

В 1997 году Н.Ю. Капустин и Е.И. Моисеев [19] изучили аналог задачи Трикоми со специальными условиями склеивания для параболо-гиперболического типа.

Изучению однозначной разрешимости краевых задач со специальными интегральными условиями склеивания посвящены [27-29].

В совместной работе Т.Ш. Кальменова, М.А. Садыбекова [30] и в работе М.А. Садыбекова [31] для гиперболического уравнения второго порядка в области с отходом от характеристики установлено, что решение задачи Дарбу в более широком классе неединственна, вследствие чего, было доказано однозначный разрешимость задачи Дирихле. Аналогичный эффект для одного класса гиперболических уравнений третьего порядка с простыми характеристиками исследованы в работе [32]. Вопросы классической разрешимости краевых задач для уравнений высокого порядка, в частности, третьего порядка с применением различных методов были изучены М.С.Салахитдиновым [12], Т.Д. Джураевым [33], М.М. Мередовым [34], Т.Ш. Кальменовым [15], М.А. Садыбековым [35].

Цель работы. Основная цель работы состоит в постановке и исследование вопросов регулярной и сильной разрешимости краевых задач для гиперболических и параболо- гиперболических уравнений второго и третьего порядков на плоскости.

Задачи исследования. Задачами исследования является:

Установление сильной разрешимости и вольтерровости аналога задачи Трикоми с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго и третьего порядков.

Постановка и изучение краевых задач на плоскости для гиперболического уравнения третьего порядка.

Определение условии сильной разрешимости для одного класса краевых задач с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения.

Объектом исследования. Объектом исследования диссертации являются вопросы регулярной и сильной разрешимости краевых задач для уравнений гиперболического и параболо- гиперболического типов второго и третьего порядков, а так же изучение спектральных свойств этих задач.

Предметом исследования являются локальные каревые задачи для уравнений смешанного параболо- гиперболического уравнения с интегральными условиями сопряжения на линии изменения типа второго и третьего порядков. Краевые задачи для гиперболического уравнения тертьего порядка с простыми характеристиками

Научная новизна. В работе получены следующие результаты

– Доказана сильная разрешимость и вольтерровость аналога обобщенной задачи Трикоми с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения второго порядка.

– Доказана теорема о существовании собственных значений одной краевой задачи со специальными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения.

– Найдены достаточные условия разрешимости для одного класса краевых задач с интегральными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения второго порядка.

– Доказана сильная разрешимость ряда локальных задач, в том числе задача Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.

– Доказана однозначная разрешимость и вольтерровость аналога задачи Трикоми со специальными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

– Для одного класса краевых задач для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка установлена однозначная (регулярная и сильная) разрешимость.

Методы исследования. Исследуемые краевые задачи эквивалентно редуцируются к интегро- функциональными уравнениям. Используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории расширений линейных операторов в гильбертовом пространстве, теории функциональных уравнении, методы интегралов энергии и априорных оценок.

Положения, выносимые на защиту

– Доказательство сильной разрешимости и вольтерровости аналога обобщенной задачи Трикоми с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения второго порядка;

– Существование собственных значений одной краевой задачи со специальными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения;

– Нахождение достаточного условия разрешимости для одного класса краевых задач с интегральными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения второго порядка;

– Доказательство сильной разрешимости ряда локальных задач, в том числе задача Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка;

– Доказательство однозначной разрешимости и вольтерровости аналога задачи Трикоми со специальными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка;

– Установление разрешимости одного класса краевых задач для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы прежде всего представляют теоретический интерес. Они могут быть использованы в теории краевых задач для широкого класса уравнений в частных производных гиперболического типа, а также смешанного и смешанно-составного типов, при изучении математических вопросов многих разделов механики и физики.

Результаты работы внедрены в отчеты проекта МОН РК «Исследования неклассических дифференциальных уравнений с операторами дифференцирования дробного порядка, возникающих при моделировании процессов во фрактальных средах и разработка алгоритмов их решении» (2012–2013 гг Направлению развития науки 5, Интеллектуальный потенциал страны, п. 5.1 «Фундаментальные исследования в области естественных наук», договор по грантовому финансированию МОН РК № 95 от 04.02.2013 г., № 0713/ГФ) и в серии проектов ректора КазНПУ им. Абая «Георадарные исследования физических параметров «Большого Алматинского» водохранилище и компьютерное моделирование структуры среды» (договор №9 от 01.03.2012 г.), «Численные решения обратных задач георадиолокации для определения свойств горизонтально-слоистых сред в различных областях диапазонах длин волн» (договор № 20 от 01.04.2013 г.).

Апробация работы. Полученные в диссертации результаты опубликованы в 14 работах, из них 3 статьи– из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 1– в журналах, имеющих не нулевой импакт-фактор в базе данных Thomson Reuters, 1– из списка в базе данных SCOPUS.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на III Конгрессе математиков тюркского мира (г. Алматы, Казахстан, 2009 г) [36], на конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль Хорезми 2009» (г. Ташкент, Узбекистан, 2009 г) [37], на IV Конгрессе математиков тюркского мира (г. Баку, Азербайжан, 2011 г) [38], на научно- практическом семинаре «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа» (г. Самарканд, Узбекистан, 2012 г) [39], на Международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения» (г. Астана, Казахстан, 2012 г) [40], на Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, Башкортостан, 2013 г) [41], на Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (г. Новосибирск, Россия, 2013 г) [42], на Международной научно-практической конференций «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт» (г. Тараз, Казахстан, 2013 г) [43], на Международной научно-практической конференций «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке (ММ ИТОН)» (г. Алматы, Казахстан, 2013 г) [44], на объединенном семинаре «Современные научные проблемы математики, механики и информационных технологий» под руководством академика НАН РК, д.т.н., профессора Б.Т.Жумагулова, академика НИА РК, д.ф.-м.н., профессора Н.Т.Данаева; на городском семинаре при кафедре фундаментальной математики «Спектральная теория линейных операторов и ее приложения» под руководством академика, д.ф.-м.н. Т.Ш.Кальменова, д.ф.-м.н., проф. Б.Е.Кангужина, д.ф.-м.н., проф. М.А.Садыбекова; на семинаре кафедры информатики, математики и информатизации образования Института магистратуры и докторантуры PhD Казахского национального педагогического университета им. Абая, на семинаре «Современные проблемы теории уравнений в частных производных» под руководством д. ф.-м. н., профессор А. С. Бердышева, на научном семинаре профессора Кабады А. (Испания).

Публикации: по теме диссертации опубликовано 14 печатных работ, из них 2 в международных изданиях, которые приводятся в списке литературы.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка использованных источников из 72 наименований. Работа изложена на 100 страницах.

Перейдем к обзору содержания диссертации. Первый раздел посвящен исследованию вопросов разрешимости и спектральных свойств краевых задач с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка. Первая раздел состоит из четырех подразделов.

Пусть $\Omega \subset R^2 -$ конечная область, ограниченная при плоскости $y>0$ отрезками $AA_0,\ A_0B_0,\ BB_0$ прямых $x=0,\ y=1,\ x=1$ соответственно, а при $y<0$ монотонной гладкой кривой $AC:\ y=-\gamma(x),\ 0<x<l,\quad 0{,}5<l<1,\ \gamma(0)=0,\ l+\gamma(l)=1$ и отрезком $BC:\ x-y=1,\ l\le x<1$ характеристики уравнения

$$Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Задача B. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y)\big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \tag{3}$$

$$(u_x - u_y)\big|_{AC} = 0 \tag{4}$$

и условиям склеивания на линиях изменения типа

$$u_x(x,+0) = u_x(x,-0), \quad u_y(x,+0) = \alpha\, u_y(x,-0) + \beta \int_0^x u_y(t,-0) Q(x,t)\, dt, \ \ 0 < x < 1, \tag{5}$$

где $Q(x,t)$ - заданная функция и $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$, $\alpha,\ \beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

В случае, когда кривая AC совпадает с характеристикой $x + y = 0$ и $\alpha = 1,\ \beta = 0$ задача B совпадает с классической задачей Трикоми для параболо-гиперболического уравнения нехарактеристической линией изменения типа, которая исследована в работе [22].

Классическая разрешимость задачи B с непрерывными условиями склеивания ($\alpha = 1,\ \beta = 0$) впервые установлена в работе [50], а сильная разрешимость в [24].

Различные свойства, в том числе вольтерровость краевых задач для смешанного параболо- гиперболического уравнения изучены в работах [29, 51-52].

Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_0, а гиперболическую - Ω_1.

Под регулярным решением задачи B в области Ω понимаем функцию

$$u(x,y) = C(\overline{\Omega}) \cap C^{1,1}(\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_1) \cap C^{1,2}(\Omega_0) \cap C^{2,2}(\Omega_1),$$

удоветворяющую уравнению (1) в областях Ω_0 и Ω_1 и краевым условиям (3)-(4) и условиям склеивания (5).

Относительно AC предположим, что $\gamma(x)$ - дважды непрерывно дифференцируема, и функции $x - \gamma(x)$ и $x + \gamma(x)$ монотонно возрастают; $0 < \gamma'(0) < 1,\ \gamma(x) > 0, x > 0$

В первом подразделе раздела рассматривается задача В и доказывается следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть $\gamma(x)\in C^1[0,l]$ и $Q(x,t)\in C^1([0,1]\times[0,1])$. Тогда для любой функции $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи В.

Имеет место следующие две леммы.

Лемма 1.1. Регулярное решение задачи В представимо в виде

$$u(x,y)=\iint\limits_{\Omega} K(x,y,x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)\,dx_1dy_1, \qquad (6)$$

где

$$K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega) \text{ и } K(x,y,x_1,y_1)=K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1) \text{ если } \alpha\neq 0,$$
$$K(x,y,x_1,y_1)=K_{0\beta}(x,y,x_1,y_1) \text{ если } \alpha=0.$$

Здесь $K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1)$ выписывается в явном виде через резольвенты интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Лемма 1.2. Для регулярного решения задачи В справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)}+\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)}\le c\|f\|_0, \qquad (7)$$

где c - независящая от $u(x,y)$ константа, а через $\|\ \|_l$ обозначена норма в пространстве Соболева $W_2^l(\Omega)$ и $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$.

Через W обозначим множество регулярных решений задачи В.

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи В, если существует последовательность $\{u_n\}$ функции $u_n\in W$ такая, что u_n и Lu_n сходиться в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Через $\mathbf{L}$ - обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W выражением (2).

Согласно определению сильного решения, u - сильное решение задачи В, тогда и только тогда, когда $u\in D(\mathbf{L})$. Здесь $u\in D(\mathbf{L})$- область определения оператора Λ. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Для любой функции $Q(x,t)\in C^1([0,1]\times[0,1])$ и $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи В. Это решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega)\cap W_2^{1,2}(\Omega_1)\cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяет неравенству (7) и представимо в виде (6).

Сформулируем основной результат подраздела 1.1.

Теорема 1.3. Интегральный оператор в правой части (6), т.е.

$$\mathbf{L}^{-1}f(x,y)=\iint\limits_{\Omega} K(x,y;x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)\,dx_1dy_1,$$

является вольтерровым (вполне непрерывным и квазинильпотентным) в $L_2(\Omega)$.

Следствие 1.1. Задача B является вольтерровой задачей.

Следствие 1.2. Для любого комплексного числа λ уравнение

$$\mathbf{L}u - \lambda u = f(x, y)$$

однозначно разрешимо при всех $f \in L_2(\Omega)$.

В подразделе 1.2 доказана сильная разрешимость и существование собственных значении одного варианта аналога задачи Трикоми со специальными условиям склейвания для параболо- гиперболического уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение (1). Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,0)$, $A_0 = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ - характеристиками AC: $x + y = 0$ и BC: $x - y = 1$ уравнения.

Рассмотрим следующий аналог задачи Трикоми для параболо – гиперболического уравнения.

Задача B2. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0 \tag{8}$$

$$u_x + u_y\Big|_{BC} = 0 \tag{9}$$

и условием склеивания на линиях изменения типа

$$u_x(x,+0) = u_x(x,-0), \quad u_y(x,+0) = \alpha u_y(x,-0) - \beta\int_0^x u_y(t,-0)\,dt, \ 0 < x < 1 \tag{10}$$

где $\alpha, \beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Обозначим через $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, а через W - множество функций из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(\overline{\Omega}_0) \cap C^{2,2}(\overline{\Omega}_1)$, удовлетворяющих уравнению и условиям (8)- (9), также условием склеивания (10).

Функцию $u \in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u_n \in W$, такая, что $\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \to 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь и далее через $\|\cdot\|_l$ обозначена норма в пространстве С.Л. Соболева $W_2^l(\Omega)$, где $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Теорема 1.4. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение u задачи B2. Это решение принадлежит классу $W^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega_0) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le c\|f\|_0$$

и представляется в виде

$$u(x,y)=\iint_{\Omega} \mathrm{K}(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1 dy_1, \tag{11}$$

где $K \in L_2(\Omega\times\Omega)$

Отметим, что в ходе доказательства всех вышеприведенных теорем, где участвует представление типа (11), ядра выписываются в явном виде через резольвенты некоторых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Основным результатом подраздела является доказательство существования собственных значений поставленной задачи.

Теорема 1.5. Пусть $\alpha>0,\ \beta>0$. Существует $\lambda\in C$ такое, что уравнение

$$Lu=\lambda u$$

имеет нетривиальное решение $u\in W$.

При доказательстве этой теоремы используются пердставления (11), теорема В.Б. Лидского о совпадении матричного и спектрального следов ядерного оператора [55], и формула Гаала вычисления следа ядерного оператора, представимого в виде произведения двух оператроов Гильберта-Шмидта [56].

Следующий подраздел посвящен доказательству сильной разрешимости для одного варианта аналога задачи Трикоми с другим видом интегрального условия склеивания.

Рассмотрим уравнение (1) в конечной области Ω, описанный в подразделе 1.2.

Задача В3. Найти решение уравнения (1) из класса функций

$$W=\left\{u(x,y): u\in C(\overline{\Omega})\cap C^{1,1}(\overline{\Omega}_0\cup\overline{\Omega}_1)\cap C^{1,2}(\Omega_0)\cap C^{2,2}(\Omega_1)\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{AA_0\cup A_0B_0}=0$$

$$u\big|_{AC}=0$$

и условием сопряжения

$$u_x(x,+0)=u_x(x,-0),\quad u_y(x,+0)=\alpha u_y(x,-0)-\beta\int_x^1 u_y(t,-0)Q(x,t)\,dt,\ 0<x<1$$

где $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, $f(x,y)$, $Q(x,t)$ – заданные функции, $\alpha,\beta\in R$, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Методом интегралов энергии доказана следующая теорема

Теорема 1.6 Пусть

$$\alpha \ge 0, \quad Q(x,t) = Q_1(x)Q_2(t), \quad Q_2(1) = 0, \quad \beta Q_1(x)Q_2(x) \le 0, \quad \frac{\beta Q_1(0)}{Q_{2'}'(0)} \le 0, \quad \beta\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)' \le 0.$$

Тогда если существует решение задачи, то оно единственно.

Теорема 1.7 Пусть выполнены все условия теоремы 1.6. Если $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}), f(0,0) = 0$, $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$, то существует единственное решение задачи.

Лемма 1.3. Для регулярного решения задачи B3 верна следующая оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le c\|f\|_0 \tag{12}$$

Теорема 1.8. Пусть выполнены все условия теоремы 1.6 и 1.7 тогда для любой функций $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи B3. Это решение принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и верна оценка (12).

В подразделе 1.4 исследованы две локальные задачи для смешанного параболо- гиперболических уравнений дробного порядка

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - D_{0y}^{\alpha H(x)+2H(-x)}u = \lambda u \tag{13}$$

в области $\Omega_1 = \{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \Omega_2$. Здесь $\Omega = \Omega_1 \cup AA_0 \cup \Omega_2$ - характеристический треугольник с вершинами $A(0,0), A_0(0,1), C(-1/2, 1/2)$, $H(x)$ - функция Хевисайда,

$$D_{at}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{-\alpha+n-1} f(s)ds$$

- дробное производное в смысле Римана-Лиувилля порядка α функции f, заданной на $[a,b]$, где $n = [\alpha]+1$, $[\alpha]$ - целый часть α, $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \alpha > 0.$$

Для $\lambda > 0$ и $0 < \alpha \le 1$ мы сформулируем аналог задачи Трикоми следующем образом:

Задача AT. Найти решение уравнения (13) из следующего класса функций

$$W_1 = \{u : D_{0y}^{\alpha-1}u \in C(\overline{\Omega_1}), u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega_1), u_x(0^{\pm}, y) \in H(0,1), u \in C(\overline{\Omega_2}) \cap C^2(\Omega_2)\},$$

удовлетворяющие начальным условием

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x,y)=\omega(x), 0\le x\le 1$$

и краевыми условиями

$$u(-y/2, y/2)=\psi_1(y), 0\le y\le 1,$$

$$u(1,y)=\psi_2(y), 0\le y\le 1$$

а также условиям склеивания

$$u(0^-,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y u(0^+,t)(y-t)^{-\alpha}\,dt, 0<y\le 1,$$

$$\int_0^y u_x(0^-,t)J_0\left[\sqrt{\lambda}(y-t)\right]dt=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y u_x(0^+,t)(y-t)^{-\alpha}\,dt, 0<y<1.$$

с

Здесь $\omega(x), \psi_i(y) (i=1,2)$ - заданные функции, причем $\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}\psi_1(y)=\omega(0)$.

Теорема 1.9. Если

$$\omega(x)\in C^2[0,1],\ \ \psi_i(y)C^1[0,1]\cap C^2(0,1),\ \ (i=1,2),$$

то существует единственно решение задачи АТ.

Здесь также рассмотрена задача Геллерстеда для параболо-гиперболического уравнения с дифференциальным оператором дробного порядка.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{0y}^{\alpha}u-\lambda u, \Phi_0 \\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda u, \Phi_i\ (i=1,2) \end{cases} \tag{14}$$

в области $\Phi=\left(\bigcup_{k=0}^{2}\Phi_k\right)\cup \mathrm{I}_0$, где Φ_0 - область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0, x=1, y=1$ соответственно; Φ_1 - область, ограниченная сегментом AE оси x и характеристиками $AC_1: x+y=0, EC_1: x-y=r$ уравнения (14); Φ_2 - область, ограниченная отрезком EB оси x и характеристиками $EC_2: x-y=r, BC_2: x-y=1$ уравнения (14); I_0 - интервал $0<x<1$, I_1 - интервал $0<x<r$, а I_2 - интервал $r<x<1$.

Задача AG. Найти решение уравнения (14) из класса

$$W_2=\left\{u: D_{0y}^{\alpha-1}u\in C\left(\overline{\Phi_0}\right), u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Phi_0), u\in C\left(\overline{\Phi_i}\right)\cap C^2(\Phi_i)(i=1,2)\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1,$$

$$u\big|_{AC_1}=u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\varphi_3(x),\ \ 0\le x\le r,$$

$$u\big|_{EC_2}=u\left(\frac{x+r}{2},\frac{r-x)}{2}\right)=\varphi_4(x),\ \ r\le x\le 1$$

и условиям склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to+0}u(x,y),\ \ x\in\overline{\mathrm{I}_0},$$

$$\lim_{y\to0^+}\left[y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y\right]=\nu^+(x),\ \lim_{y\to0^-}u_y(x,y)=\nu^-(x), x\in\mathrm{I}_0.$$

Здесь $\varphi_j(\square)\left(j=\overline{1,4}\right)$ - заданные функции, причем $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha}\varphi_1(y)=\varphi_3(0)$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha}u(r,y)=\varphi_4(r)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.10. Если выполняются следующие условия

$$\lambda\ge 0,\varphi_i(y)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1),\varphi_j(x)\in C^1\left(\overline{\mathrm{I}_i}\right)\cap C^2(\mathrm{I}_i)(i=1,2;\ j=3,4)$$

то задача AG имеет единственное решение.

Результаты первого раздела опубликованы в работе [38-40; 45-47].

Во втором разделе доказывается сильная разрешимость локальных задач, в том числе задачи Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка.

В подразделе 2.1 рассмотрены вопросы сильной разрешимости локальных краевых задач для гиперболического уравнения третьего порядка в ограниченной области.

Пусть $\Omega\subset R^2$- конечная область, ограниченная отрезком $AB:0\le x\le 1$ оси $\acute{o}=0$, а при y<0 двумя характеристиками $\grave{A}\tilde{N}:\tilde{o}+\acute{o}=0$ и $\hat{A}\tilde{N}:\tilde{o}-\acute{o}=1$ гиперболического уравнения третьего порядка с простыми характеристиками

$$Lu=f(x,y) \tag{15}$$

где

$$Lu=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx}-u_{yy}\right)$$

Задача Коши. Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{16}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{17}$$

$$u_{yy}(x,0)=\mu(x), \quad 0\le x\le 1 \tag{18}$$

Здесь τ(x), ν(x) и μ(x)- заданные функции.

Задача Гурса. Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)\big|_{AC\cup BC}=0, \tag{19}$$

$$u_y(x,y)\big|_{AC\cup BC}=0$$

Задача Дарбу. Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=u_y(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1 \tag{20}$$

$$(u_x+u_y)\big|_{AC}=0, \qquad 0\le x\le \frac{1}{2} \tag{21}$$

$$(u_x-u_y)\big|_{BC}=0, \qquad \frac{1}{2}\le x\le 1 \tag{22}$$

Задача Коши- Гурса 1 (Дарбу 1). Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям (21)

$$u(x,y)\big|_{AC}=u(x,-x)=0, \quad 0\le x\le \frac{1}{2} \tag{23}$$

Задача Коши- Гурса 2 (Дарбу 2). Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям (21) и (23)

$$u_y(x,0)=0$$

Задача Коши- Гурса 3 (Дарбу 3). Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям (23) и

$$u(x,0)=u_{yy}(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1$$

Задача Коши- Гурса 4 (Дарбу 4). Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям (19) и

$$u_y(x,0)=u_{yy}(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1$$

Задача Коши и Гурса для линейного гиперболического уравнения третьего порядка общего вида изучены в [62]. В подразделе решение задачи Коши для уравнения (15) приводится удобной форме для дальнейшего рассмотрения.

Решение u(x,y) уравнения (15) будем называть регулярным, если функция u(x,y) обладает непрерывными производными, входящими оператор L.

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением рассматриваемой задачи, если существует последовательность регулярных решении $\{u_n\}$ этой задачи (u_n удовлетворяет соответствующие краевые условия), такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к $u(x,y)$ и $f(x,y)$.

Используя общее решенеие $u(x,y)=f_1(x)+f_2(x-y)+f_3(x+y)$ уравнения (15), где f_i - произвольные гладкие функции, нетрудно установить справедливость следующих теорем

Теорема 2.1. Пусть $\tau(x),\upsilon(x)\in C^2[0,1]$, $\mu(x)\in C^1[0,1]$ и $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям (16)- (18) и оно представимо в виде

$$u(x,y)=\tau(x)-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\upsilon(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x}(x+y-t)\mu(t)dt+\frac{1}{2}\int_{x}^{x-y}(x-y-t)\mu(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{y}^{0}dy_1\int_{x+y-y_1}^{x}(x_1+y_1-x-y)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int_{y}^{0}dy_1\int_{x}^{x-y+y_1}(x-y-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1$$

Теорема 2.2. Пусть $\tau(x)\in W_2^2(0,1)$, $\upsilon(x)\in W_2^1(0,1)$, $\mu(x)\in L_2(0,1)$ и $f(x,y)\in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное сильное решение задачи Коши и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\le C[\|\tau\|_{W_2^2(0,1)}+\|\upsilon\|_{W_2^1(0,1)}+\|\mu\|_{L_2(0,1)}+\|f\|_{L_2(\Omega)}]$$

где С- означает положительную постоянную не зависящий от $u(x,y)$.

Теорема 2.3. Для любой функций $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи Коши – Гурса 1 (Дарбу 1).

Теорема 2.4. Для любой функции $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи Коши - Гурса 1 (Дарбу 1). Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\le C\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{24}$$

Теорема 2.5. а) Для любой функций $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи Дарбу (19), (24)- (26). Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и оно удовлетворяет неравенству (28).

б) Для любой функций $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи Дарбу (15), (20)- (22) из класса $W_2^2(\Omega)$ и оно удовлетворяет неравенству (24).

В 2.2 изучена корректность аналога задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка

Пусть $\Omega\subset R^2$- конечная область, ограниченная отрезком $AB: 0\le x\le 1$ оси $\text{ó}=0$ и характеристиками $\text{ÀÑ}:\text{õ}+\text{ó}=0$ и $\text{ÂÑ}:\text{õ}-\text{ó}=1$ гиперболического уравнения (19).

Для уравнения (15) сформулируем и докажем корректность задачи Дирихле.

Задача D. Найти решение уравнения (15) удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad 0\le x\le 1 \tag{25}$$

$$u(x,y)\big|_{AC\cup BC}=0 \tag{26}$$

Вопросам разрешимости краевых задач для уравнений гиперболического типа посвящены многочисленные работы. Достаточно полный обзор полученных результатов по гиперболическим уравнениям содержится в книгах А.В. Бицадзе [6], А.М. Нахушева [14], М.С. Салахитдинова [12] и других. В большинстве своем, это были работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектом уравнений гиперболического типа второго порядка.

Локальные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка исследовано в работе Б.М. Айбекова [66].

Близкие задачи рассмотренные в данной работе для гиперболического уравнения второго порядка в областях с отходом от характеристики изучены в работе М.А. Садыбекова [64], а для параболо-гиперболического уравнения в работе М.С. Салахитдинова и А.С. Бердышева [65].

Функцию $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ называют регулярным решением задачи D, если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (15) в области Ω и в этой области удовлетворяет уравнению (15) и краевым условиям (25), (26).

Через W – обозначим множество функции из класса $u_{xxy},\ u_{yyy}\in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяющих условиям (25), (26).

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи D, если существует последовательность функции $u_n(x,y)\in W$ такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к $u(x,y)$ и $f(x,y)$.

Основным результатом работы является следующие теоремы:

Теорема 2.6. Для любой функции $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи D и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_2\le C\|f\|_0 \tag{27}$$

Теорема 2.7. Для любой функции $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи D. Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству (27).

Доказательство этой теоремы сводиться к функциональному уравнению вида

$$\varphi''(t)=\frac{1}{4}\varphi''\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{4}\varphi''\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)+F(t),\ 0\le t\le 1 \tag{28}$$

где

$$F(t)=\frac{1}{8}\int_t^1 f\left(\frac{t+\eta}{2},\frac{t-\eta}{2}\right)d\eta+\int_0^t f\left(\frac{\xi+t}{2},\frac{\xi-t}{2}\right)d\xi+2\int_{\frac{t-1}{2}}^0\left[f\left(\frac{t+1}{2},z\right)-f(t-z,z)\right]dz+$$

$$2\int_{-\frac{t}{2}}^0[f(t+z,\ z)-f(\frac{t}{2},\ z)]dz$$

При доказательстве разрешимости функционального уравнения (28) используются следующие леммы.

Лемма 2.1. Если $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$, тогда $F(t)\in C^1[0,1]$

Лемма 2.2. Если $F(t)\in C^1[0,1]$ то существует единственное решение уравнения (32) из класса $C^1[0,1]$

Лемма 2.3. Если $f(x,y)\in L_2(\Omega)$, то $F(t)\in L_2(0,1)$ и

$$\|F(t)\|_{L_2(0,1)}\le C\|f(x,y)\|_{L_2(\Omega)}$$

Лемма 2.4. Если $F(t)\in L_2(0,1)$, то существует единственное решение уравнения (28) из класса $L_2(0,1)$ и оно удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi''(t)\|_{L_2(0,1)}\le C\|F(t)\|_{L_2(0,1)}$$

Установлению неединственности решения аналога задачи Дарбу и корректности этой задачи с дополнительным условием для гиперболического уравнения третьего порядка посвящен подраздел 2.3.

Рассмотрим уравнение (15) в области Ω, описанной во втором подразделе.

В предыдущем подразделе для уравнения (15) доказаны теоремы о регулярной и сильной разрешимости задачи Дирихле, т.е. следующей задачи: найти решение уравнения (15) удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)|_{AB\cup AC\cup BC}=0$$

В аналогии, с гиперболическими уравнениями второго порядка, возникает вопрос можно ли поставить корректно аналог задачи Дарбу для уравнения (15), в частности можно ли краевое условие на АВ $u(x,0)=0,\ \ 0\le x\le 1$ заменить с условием

$$u_y(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1$$

Рассмотрена следующая задача.

Задача BN. Найти решение уравнения (19) удовлетворяющее условиям

$$u_y(x,y)\big|_{y=0}=0,\qquad 0\le x\le 1 \tag{29}$$

$$u(x,y)\big|_{AC\cup BC}=0 \tag{30}$$

Здесь показано, что однородная задача BN (19), (29)-(30) (когда $f(x,y)\equiv 0$) имеет бесчисленное множество нетривиальных решений вида

$$u(x,y)=\varphi(x)-\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

где $\varphi(x)$-достаточно гладкая функция удовлетворяющая условием

$$\varphi(x)=\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right),\qquad 0\le x\le\frac{1}{2},\qquad \varphi(0)=\varphi(1)=0$$

Отсюда, следует что для уравнения (15) краевое условие $u(x,y)\,\big|_{AB}=0$ сильнее (т.к. в этом случае задача однозначно разрешима) чем условие (29).

Поэтому рассмотрим следующую краевую задачу с дополнительными условиями.

Задача DN. Найти решение уравнения (15), удовлетворяющее краевым условиям (29), (30) и

$$(u_x+u_y)\big|_{AC}=0 \tag{31}$$

С учетом вышеизложенного справедливость следующей теоремы о сильной разрешимости задачи DN (19), (29)- (30), (31) доказывается по анологии с задачей Дирихле.

Теорема 2.8. Для любой функций $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи DN (19), (29)- (30), (31). Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет оценке.

$$\|u\|_2\le c\|f\|_0$$

В 2.4 рассмотрена краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка в области с характеристической границей.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) = f(x,y) \tag{32}$$

в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных x и y, ограниченной отрезком AB: y=0, 0<x<1 и при y<0 характеристиками AC: x+y=0, BC:x-y=1 уравнения (32)

Задача Н. Найти решение уравнения (32) удовлетворяющее условиям

$$u_y(x,0) + \alpha u_x(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{33}$$

$$u(x,y)\big|_{AC \cup BC} = 0 \tag{34}$$

Отметим, что вся граница области Ω (отрезки AB, BC, AC) являются характеристиками уравнения (32).

Основным результатом этого подраздела является следующая теорема.

Теорема 2.9. Пусть выполнены следующие условия

$$\alpha \neq \infty, \qquad \alpha \neq \pm 1$$

Тогда для любой функций $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи Н.

Под регулярным решением задачи Н будем понимать функцию $u(x,y)$ принадлежащую классу $C^1(\overline{\Omega})$ и имеющие непрерывные производные в Ω участвующие в уравнении (32), являющиеся решением этого уравнения в Ω и удовлетворяющих краевым условиям (33), (34)

Результаты второго раздела опубликованы в работах [41-43; 48-49].

В третьем разделе доказывается вольтерровость и сильная разрешимость краевых задач для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка.

В 3.1 доказана вольттеровость аналога задачи Трикоми для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка с интегральными условия сопряжения на линии изменении типа.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC: x + y = 0$ и $BC: x - y = 1$ параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

$$Lu = f(x,y) \tag{35}$$

где

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} lu = \frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$$

Задача N1. Найти решение уравнения (35), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{AA_0 \cup A_0B_0 \cup AC} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AA_0 \cup AC} = 0\ , \tag{37}$$

и условиям склеивания

$$u_x(x,+0) = u_x(x,-0),\ u_y(x,+0) = \alpha u_y(x,-0) + \beta\int_0^x u_y(t,-0)Q(x,t)dt,\ 0 < x < 1. \tag{38}$$

где n - внутренняя нормаль, $\alpha, \beta = const$, такие что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $Q(\cdot,\cdot)$ - заданная функция.

В подразделе доказывается сильная разрешимость задачи и отсутствие у нее собственных значений.

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л.Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$, и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$.

Функцию u из класса $C^1(\bar{\Omega})$ будем называть регулярным решением задачи N1 если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (35) в областях Ω_0 и Ω_1, и в этих областях удовлетворяет уравнению (35) и краевым условиям (36), (37), а также на линии изменения типа условием сопряжения (38). Здесь $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Теорема 3.1. Для любой функции $f(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$, $f(A) = 0$ существует единственное регулярное решение задачи N1 и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq c\|f\|_0 \tag{39}$$

и представимо в виде

$$u(x,y) = \iint_\Omega K(x,y,x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1 dy_1, \tag{40}$$

где $K(x,y,x_1,y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$, c - здесь и далее означает положительные, вообще говоря, разные постоянные.

Через W обозначим множество функций из класса

$$u \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_{xx,}, u_{yy} \in C(\overline{\Omega}_0), \qquad u_{xxx}, u_{yyx} \in C(\overline{\Omega}_1),$$

удовлетворяющих краевым условиям (36) и (37), а также на линии изменения типа условием сопряжения (38).

Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функции $\{u_n\}$, $u_n \in W$, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

Теорема 3.2. Для любой функции $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи. Это решение принадлежит классу $C(\overline{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$; удовлетворяет неравенству (39) и представимо в виде (40).

Через L обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора заданного равенством (35) на W. Из теоремы 3.2 следует, что оператор L- обратим, L^{-1}- определен на всем $L_2(\Omega)$ и вполне непрерывен. Поэтому спектр оператора L может состоять только из собственных значений.

Используя представление (40) и критерий А.Б.Нерсесяна вольтерровости интегральных операторов Гильберта-Шмидта [72], доказывается следующий основной результат подраздела- теорема об отсутствии собственных значений оператора L^{-1}.

Теорема 3.3. Обратный оператор L^{-1} задачи определяемый формулой (40) является вольтерровым (то есть вполне непрерывным, и квазинильпотентным).

Следствие 3.1. Задача является волътерровой краевой задачей.

Следствие 3.2. Для любого $\lambda \in C$, уравнение $Lu - \lambda u = f$ однозначно разрешимо при всех $f \in L_2(\Omega)$ в классе $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$

Последний подраздел посвящен обоснаванию силной разрешимости краевой задачи для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка с нехарктеристической границей изменения типа гиперболической части области.

Пусть $\Omega \subset R^2$ –конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC: x + y = 0$ и $BC: x - y = 1$ параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

$$Lu = f(x,y) \tag{41}$$

где

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial y} lu = \frac{\partial}{\partial y} \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$$

Задача N2. Найти решение уравнения (41), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,y)\big|_{A_0B_0}=0 \tag{42}$$

$$u\big|_{AA_0\cup AC}=0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC\cup BC}=0\ , \tag{44}$$

где n - внутренная нормаль.

Функцию u из класса $C^1(\bar{\Omega})$ будем называть р е г у л я р н ы м решением задачи N2 если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (41) в областях Ω_0 и Ω_1, и в этих областях удовлетворяет уравнению (41) и краевым условиям (42) - (44), и на линии перехода AB выполняется условия склеивания

$$u_{xx}(x,+0)=u_{xx}(x,-0)\ , \qquad \frac{\partial^2 u(x,+0)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u(x,-0)}{\partial y^2}, \qquad 0<x<1 \tag{45}$$

Доказаны следующие две теоремы о регулярной и сильной разрешимости.

Теорема 3.4. Для любой функции $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$, $f(A)=0$ существует единственное регулярное решение задачи N2 и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_2 \le c\|f\|_0 \tag{46}$$

c - здесь означает положительную постоянную.

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи N2, если существует последовательности $\{u_n\}$ регулярных решений задачи N2, такие, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к $u(x,y)$ и $f(x,y)$.

Теорема 3.5. Для любой функций $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи В. Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству (46)

Отличе этой задачи от задачи N1 подраздела 3.1 в условиях сопряжения вида (45). Результаты третьего раздела опубликованы в работе [44].

Автор выражает благодарность научному руководителю д. ф.- м. н., профессору Бердышеву А.С. и зарубежному научному консультанту доктору естественных наук (PhD), профессору A. F Cabada за постановку задач и внимание к работе.

Автор признателен Кримову Э.Т. за ценные советы и поддержку при работе над диссертацией.

1 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данный раздел посвящен изучению краевых задач со специальными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения второго порядка.

1.1 Сильная разрешимость и вольтерровость краевой задачи с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения

Пусть $\Omega \subset R^2$ – конечная область, ограниченная при плоскости $y > 0$ отрезками $AA_0,\ A_0B_0,\ BB_0$ прямых $x = 0,\ y = 1,\ x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ монотонной гладкой кривой $AC:\ y = -\gamma(x),\ 0 < x < l,\ 0{,}5 < l < 1,\ \gamma(0) = 0,\ l + \gamma(l) = 1$ и отрезком $BC: x - y = 1,\ l \le x < 1$ характеристики уравнения

$$Lu = f(x, y), \tag{1.1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Задача В. Найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,\ y)\big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \tag{1.3}$$

$$(u_x - u_y)\big|_{AC} = 0 \tag{1.4}$$

и условиям склеивания на линиях изменения типа

$$u_x(x,+0) = u_x(x,-0), \quad u_y(x,+0) = \alpha\, u_y(x,-0) + \beta \int_0^x u_y(t,-0) Q(x,t)\, dt, \ \ 0 < x < 1, \tag{1.5}$$

где $Q(x,t)$ - заданная функция и $Q(x,t) \in C^1([0,1] \times [0,1])$, $\alpha,\ \beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

В случае, когда кривая AC совпадает с характеристикой $x + y = 0$ и $\alpha = 1,\ \beta = 0$ задача В совпадает с классической задачей Трикоми для параболо-гиперболического уравнения нехарактеристической линией изменения типа, которая исследована в работе [22].

Классическая разрешимость задачи B с непрерывными условиями склеивания ($\alpha = 1,\ \beta = 0$) впервые установлена в работе [50], а сильная разрешимость в [24].

Различные свойства, в том числе вольтерровость краевых задач для смешанного параболо- гиперболического уравнения изучены в работах [29, 51-52].

Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_0, а гиперболическую - Ω_1.

Под регулярным решением задачи B в области Ω понимаем функцию

$$u(x,y) = C(\overline{\Omega}) \cap C^{1,1}(\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_1) \cap C^{1,2}(\Omega_0) \cap C^{2,2}(\Omega_1),$$

удоветворяющую уравнению (1.1) в областях Ω_0 и Ω_1 и краевым условиям (1.3)-(1.4) и условиям склеивания (1.5).

Относительно кривой AC всюду в дальнейшем предположим, что $x + \gamma(x)$ монотонно возрастают. Тогда в характеристических переменных $\xi = x + y,\ \eta = x - y$ уравнение кривой AC допускает представление $\xi = \lambda(\eta),\ 0 \le \eta \le 1$.

Теорема 1.1. Пусть $\gamma(x) \in C^1[0,l]$ и $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи B.

<u>Доказательство</u>. Регулярное в области Ω_1 решение задачи B ищем в виде

$$u(\xi,\ \eta) = \frac{1}{2}\left[\tau(\xi) + \tau(\eta) - \int_{\xi}^{\eta} \nu_1(t)dt\right] - \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1\ , \qquad (1.6)$$

где

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad f_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$
$$\tau(x) = u(x,-0), \qquad \nu_1(x) = u_y(x,-0) \qquad (1.7)$$

На основании (1.4) из (1.6) в силу обозначений (1.7) имеем

$$\nu_1(\eta) = \tau'(\eta) - 2\int_{\lambda(\eta)}^{\eta} f_1(\xi_1,\eta)d\xi_1,\ \ 0 \le \eta \le 1. \qquad (1.8)$$

В силу однозначной разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (1.1), удовлетворяющее условиям (1.3) и $u(x,0) = \tau(x)$, в области Ω_0 можно представить в виде

$$u(x,y) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x - x_1, y, y_1) f(x_1, y_1) dy_1 + \int_0^x G_{y_1}(x - x_1, y, 0)\tau(x_1)dx_1, \qquad (1.9)$$

где $\tau(0)=0$, а $G(x,y,y_1)$– функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате AA_0B_0B, которая имеет вид [12].

$$G(x,y,y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left\{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}\right\}-\exp\left\{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}\right\}\right]. \qquad (1.10)$$

Вычислив производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ в (1.9) и устремляя y к нулю внутри области Ω_0 получим

$$u_y(x,+0)=-\int_0^x k(x-t)u_x(t,+0)dt+F_0(x),$$

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n^2}{x}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{2}}}+\tilde{k}(x), \qquad (1.11)$$

$$F_0(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G_y(x-x_1,y,y_1)\Big|_{y=0} f(x_1,y_1)dy_1\,. \qquad (1.12)$$

Таким образом, основное функциональное соотношение между $\tau'(x)$ и $\nu_0(x)=u_y(x,+0)$, принесенное на отрезок AB из параболической части области имеет вид

$$\nu_0(x)=-\int_0^x k(x-t)\tau'(t)dt+F_0(x). \qquad (1.13)$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Из (1.8) и (1.13) в силу условия склеивания (1.5), получаем для $\tau'(x)$ интегральное уравнения

$$\tau'(x)+\int_0^x k_1(x,t)\tau'(t)dt=F_1(x)\,. \qquad (1.14)$$

здесь

$$k_1(x,t)=\frac{1}{\alpha}\left[k(x-t)+\beta Q(x,t)\right], \qquad (1.15)$$

$$F_1(x)=\frac{1}{\alpha}F_0(x)+2\int_{\lambda(x)}^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1+\frac{2\beta}{\alpha}\int_0^x Q(x,t)dt\int_{\lambda(t)}^t f(\xi_1,t)d\xi_1 \qquad (1.16)$$

Таким образом, задача В эквивалентно (в смысле однозначной разрешимости) редуцирована к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода (1.14).

Ограничения наложенные на функции $\gamma(x)$ и $Q(x,t)$, а также на правую часть уравнения (1.1) позволяет утверждать, что в силу (1.11) и (1.15) $k_1(x,t)$ - ядро со слабой особенностью. Значить существует единственное решение уравнения (1.14) и $\tau'(x) \in C^1(0,1)$. После нахождения $\tau(x)$ (в силу (1.3) $\tau(0)=0$) и $\nu_0(x),\ \nu_1(x)$, формула Даламбера и формула решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности дают нам решения задачи B из искомого класса в случае, когда $\alpha \neq 0$.

Решения уравнения (1.14) представимо в виде

$$\tau'(x) = \int_0^x \Gamma(x,t) F_1(t)dt + F_1(x), \tag{1.17}$$

где $\Gamma(x,t)$ - резольвента интегрального уравнения (1.14)

$$\Gamma(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k_{1n}(x,t),\ \ k_{11}(x,t) = k_1(x,t),\ k_{1n+1}(x,t) = \int_0^x k_1(x,z) k_{1n}(t,z)dz\,.$$

Из (1.17) с учетом $\tau(0)=0$ имеем

$$\tau(x) = \int_0^x \Gamma_1(x,t) F_1(t)dt\,,$$

где

$$\Gamma_1(x,t) = 1 + \int_t^x \Gamma(z,t)dz\,.$$

Из формулы (1.6) в силу (1.8) нетрудно получить

$$u(x,y) = \tau(\xi) + \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 \int_{\lambda(\eta_1)}^{\xi} f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1. \tag{1.18}$$

Теперь подставляя найденное выражение $\tau(x)$ в (1.18) с учетом (1.12) и (1.16) после некоторых несложных преобразовании получим

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \frac{1}{\alpha}\int_0^{\xi} dx_1 \int_0^1 G_1(\xi - x_1, y_1) f(x_1,y_1)dy_1 + 2\int_0^{\xi} d\eta_1 \int_{\lambda(\eta_1)}^{\eta_1} \Gamma_1(\xi,\eta_1) f_1(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 \\ & + \frac{2\beta}{\alpha}\int_0^{\xi} d\eta_1 \int_{\lambda(\eta_1)}^{\eta_1} G_0(\xi - \eta_1, \eta_1) f_1(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 + \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 \int_{\lambda(\eta_1)}^{\xi} f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где

$$G_1(x,y_1)=\int_0^x \Gamma_1(x,t)G_y(t,y_1,0)dt,\; G_0(x,\eta)=\int_0^x Q(z+\eta,\eta)\Gamma_1(x,z)dz.$$

Аналогично, подставляя значение $\tau(x)$ в (1.9) имеем

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\int_0^x dx_1\int_0^1 G_2(x-x_1,y,y_1)f(x_1,y_1)dy_1+2\int_0^x d\eta_1\int_{\lambda(\eta_1)}^{\eta_1} G_1(x-\eta_1,y)f_1(\xi_1,\eta_1)d\xi_1\\&+\frac{2\beta}{\alpha}\int_0^x d\eta_1\int_{\lambda(\eta_1)}^{\eta_1} G_{01}(x-\eta_1,\eta_1)f_1(\xi_1,\eta_1)d\xi_1,\end{aligned}\tag{1.20}$$

где

$$G_2(x,y,y_1)=G(x,y,y_1)+\frac{1}{\alpha}\int_0^x G_1(t,y_1)G_y(x-t,y,0)dt,$$

$$G_{01}(x,\eta_1)=\int_0^x G_y(x_1,y_1,0)G_0(x-x_1,\eta_1)dx_1.$$

Из (1.19) и (1.20) легко получить, что

$$u(x,y)=\iint_\Omega K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1,$$

где

$$\begin{aligned}K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1)=&\theta(y)\left\{-\theta(y_1)\theta(x-x_1)G_2(x-x_1,y,y_1)+\theta(-y_1)\theta(x-\eta_1)\left[G_1(x-\eta_1,y)+\frac{2\beta}{\alpha}G_{01}(x-\eta_1,\eta_1)\right]\right\}+\\&+\theta(-y)\left\{\theta(y_1)\theta(\xi-x_1)G_1(\xi-x_1,y_1)+\theta(-y_1)\left[\frac{1}{2}\theta(\eta-\eta_1)\theta(\eta_1-\xi)\theta(\xi-\xi_1)+\right.\right.\\&\left.\left.+\theta(\xi-\eta_1)\left[\Gamma_1(\xi,\eta_1)+\frac{\beta}{\alpha}G_0(\xi-\eta_1,\eta_1)\right]\right]\right\},\end{aligned}$$

где $\theta(y)=1,\ y>0,\ \theta(y)=0,\ y<0.$

Пусть $\alpha=0$ и $\beta\neq 0$. Из функциональных соотношении (1.8) и (1.13) в силу условия склеивания (1.5) при $\alpha=0$ имеем

$$-\int_0^x k(x-t)\tau'(t)dt+F_0(x)=\beta\int_0^x[\tau'(t)-2\int_{\lambda(t)}^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1]Q(x,t)dt$$

или

$$\int_0^x \tau'(t)[k(x-t)+\beta Q(x,t)]dt = F_0(x)+2\beta\int_0^x dt\int_{\lambda(t)}^t Q(x,t)\,f_1(\xi_1,t)d\xi_1.$$

Учитывая вид функции $k(x-t)$ последнее уравнение перепишем в виде

$$\int_0^x \frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1/2}} = \sqrt{\pi}\left[F_0(x)+2\beta\int_0^x dt\int_{\lambda(t)}^t Q(x,t)\,f_1(\xi_1,t)d\xi_1 - \int_0^x (\tilde{k}(x-t))dt+\beta Q(x,t)dt\right]. \quad (1.1.21)$$

Уравнению (1.21) обращая как интегральное уравнение Абеля получим

$$\tau'(x)=\frac{F_0(0)}{\sqrt{\pi x}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^x \frac{F_0'(t)dt}{\sqrt{x-t}}+2\beta\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t dz\int_{\lambda(z)}^z Q(t,z)\,f_1(\xi_1,z)d\xi_1\right.$$
$$\left.-\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \tau(z)\left[\tilde{k}(x-t)+\beta Q(t,z)\right]dz\right\}.$$

Отсюда с учетом, что $F_0(0)=0$, после некоторых преобразовании имеем

$$\tau'(x)+\int_0^x K_0(x,z)\tau'(z)dz = F_2(x)\,, \quad (1.22)$$

где

$$K_0(x,z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{Q(z,z)}{\sqrt{x-z}}+\int_0^{x-z}(x-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{k}(t-z)+\beta Q(t,z)\right]dt\right\},$$

$$F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dx_1\int_0^1\left[\int_0^{x-x_1}\frac{G_{yt}(t,y_1,0)}{\sqrt{x-x_1-t}}dt\right]f(x_1,y_1)dy_1+$$
$$\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^x d\eta_1\int_{\lambda(\eta_1)}^{\eta_1}\left[\frac{Q(\eta_1,\eta_1)}{\sqrt{x-\eta_1}}+\int_0^{x-\eta_1}\frac{Q_t(t,\eta_1)}{\sqrt{x-\eta_1-t}}dt\right]f_1(\xi_1,\eta_1)d\xi_1. \quad (1.23)$$

Так как ядро $K_0(x,z)$ является ядром со слабой особенностью, то решение уравнения (1.22) существует, единственно и представимо в виде

$$\tau'(x)=F_2(x)+\int_0^x R(x,z)F_2(z)dz\,, \quad (1.24)$$

где $R(x,z)$ - резольвента интегрального уравнения (1.22).

Далее поступая также как и выше, имеем

$$u(x,y)=\iint_\Omega K_{0\beta}(x,y,x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)dx_1dy_1\,,$$

где

$$K_{0\beta}(x,y,x_1,y_1)=\theta(y)\{\theta(y_1)\theta(x-x_1)[G(x-x_1,y,y_1)+G_4(x-x_1,x_1,y,y_1)]$$

$$+\theta(-y_1)\theta(x-\eta_1)G_5(x-\eta_1,y,\eta_1)\}+\theta(-y)\Bigg\{-\theta(y_1)\theta(\xi-x_1)G_3(\xi,x_1,y_1)$$

$$+\theta(-y_1)\left[\theta(\xi-\eta_1)Q_1(\xi,\eta_1)+\frac{1}{2}\theta(\eta-\eta_1)\theta(\eta_1-\xi)\theta(\xi-\xi_1)\right]\Bigg\},$$

$$G_3(x,x_1,y_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x-x_1}\Bigg[\frac{G_y(z,y_1,0)}{\sqrt{z}}+\int_0^z\Bigg\{\frac{G_{ys}(s,y_1,0)}{\sqrt{z-s}}+R(z+x_1,s+x_1)\Bigg[\frac{G_y(s,y_1,0)}{\sqrt{s}}$$

$$+\int_0^s\frac{G_{yt}(t,y_1,0)}{\sqrt{s-t}}dt\Bigg]\Bigg\}ds\Bigg]dz,$$

$$Q_1(x,\eta_1)=\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x-\eta_1}\Bigg[\frac{Q(\eta_1,\eta_1)}{\sqrt{z}}+\int_0^z\Bigg\{\frac{Q_s(s,\eta_1)}{\sqrt{z-s}}+R(z+\eta_1,s+\eta_1)\Bigg[\frac{Q(\eta_1,\eta_1)}{\sqrt{s}}$$

$$+\int_0^s\frac{Q_t(t,\eta_1)}{\sqrt{s-t}}dt\Bigg]\Bigg\}ds\Bigg]dz,$$

$$G_4(t,x_1,y_1,y)=\int_0^t G_3(s,x_1,y_1)G_y(t-s,y,0)ds,$$

$$G_5(x,y,\eta_1)=\int_0^x G_y(x-x_1,y,0)Q_1(x_1,\eta_1)dx_1.$$

Таким образом, мы частично доказали справедливость следующей леммы.

Лемма 1.1. Регулярное решение задачи В представимо в виде

$$u(x,y)=\iint_\Omega K(x,y,x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{1.25}$$

где

$$K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)\text{ и }K(x,y,x_1,y_1)=K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1)\text{ если }\alpha\neq 0,$$
$$K(x,y,x_1,y_1)=K_{0\beta}(x,y,x_1,y_1)\text{ если }\alpha=0.$$

Покажем теперь, что $K(x,y;x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$. Легко видеть, что в формуле (1.25) в ядре все слагаемы ограничены, за исключением первого, в котором не ограничено слагаемое $G(x-x_1,y,y_1)$. Поэтому покажем, что

$$\theta(y)\theta(y_1)\theta(x-x_1)G(x-x_1,y,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$$

Этот факт вообще известен [26]. Однако для удобства чтения мы ее приводим.

Из представления (1.10) функции Грина $G(x-x_1,y,y_1)$ следует, что для этого достаточно в нем оценить слагаемое при $n=0$:

$$B(x-x_1,y,y_1)=\theta(y)\theta(y_1)\theta(x-x_1)\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}}\times$$
$$\times\left[\exp\left\{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(y+y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\}\right]$$

Заметим, что

$$+\le B(x-x_1,y,y_1)\le\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}}e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}}$$

Пользуясь этим, вычисляем

$$\|B\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^x dx_1\int_0^1|B(x-x_1,y,y_1)|^2dy_1=$$
$$=\int_0^1dy\int_0^1dy_1\int_0^1dx\int_0^x|B(x,y,y_1)|^2dx_1\le$$
$$\le\int_0^1dy\int_0^1dy_1\int_0^1|B(x,y,y_1)|^2dx\le\frac{1}{4\pi}\int_0^1dy\int_0^1dy_1\int_0^1\frac{1}{x}e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4x}}dx=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^1dy\int_0^1\frac{dx}{x}\int_0^1e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4x}}dy_1.$$

Заменяя $\dfrac{y-y_1}{2\sqrt{x}}=y_2$, далее имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1dy\int_0^1\frac{dx}{x}\int_{\frac{y-1}{2\sqrt{x}}}^{\frac{y}{2\sqrt{x}}}e^{-y_2^2}2\sqrt{x}dy_2\le$$
$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^1dy\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y_2}dy_2=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}C\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}<\infty\,.$$

Следовательно, $K(x,y;x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$. Лемма 1.1 доказано полностью.

Лемма 1.2. Если $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$, $f(0,0)=0$ и $Q(x,y)\in C^1([0,1]\times[0,1])$ то $F_{\alpha\beta}(x)\in C^1[0,1]$ и $F_{\alpha\beta}(0)=0$.

Доказательство. Используя явный вид функций Грина (1.10), нетрудно установить, что функция $F_{\alpha\beta}(x)$, определенные формулами (1.16), (1.23) принадлежит классу $C^1[0,1]$ и $F_{\alpha\beta}(0)=0$. Лемма 1.2 доказано.

Лемма 1.3. Пусть $Q(x,y)\in C^1([0,1]\times[0,1])$ и $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ тогда $F_{\alpha\beta}(x)\in L_2(\Omega)$ и

$$\left\|F_{\alpha\beta}(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C\|f\|_0 \tag{1.26}$$

где $F_{\alpha\beta}(x)=\begin{cases} F_1(x), & \alpha\ne 0 \\ F_2(x), & \alpha=0. \end{cases}$

Доказательство. Через $\omega(x,y)$ обозначим решение в Ω_0 задачи

$$\omega_x-\omega_{yy}=f(x,y), \qquad \left.\omega\right|_{AA_0\cup A_0B_0\cup AB}=0 \tag{1.27}$$

Очевидно, что $F_0(x)=\lim\limits_{y\to 0}\omega_y(x,y)$.

Известно [53], что решение задачи (1.27) в классе $W_2^{1,2}(\Omega_0)$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|^2_{L_2(\Omega_0)}+\|\omega_x\|^2_{L_2(\Omega_0)}+\|\omega_y\|^2_{L_2(\Omega_0)}+\|\omega_{yy}\|^2_{L_2(\Omega_0)}\le C\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)} \tag{1.28}$$

Используя очевидное равенство

$$\omega_y(x,0)=\omega_y(x,y)-\int_0^y\omega_{yy}(x,t)dt$$

получаем

$$\|\omega_y(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_0)}=\int_0^1\left|\omega_y(x,0)\right|^2dx=\int_0^1dy\int_0^1\left|\omega_y(x,0)\right|^2dx\le C\left[\|\omega_y(x,y)\|^2_{L_2(\Omega_0)}+\|\omega_{yy}(x,y)\|^2_{L_2(\Omega_0)}\right] \tag{1.29}$$

Из (1.1.28) и (1.1.29) имеем

$$\left\|F_0(x)\right\|_{L_2(0,1)}=\left\|\omega_y(x,0)\right\|_{L_2(0,1)}\le C\|f\|_{L_2(\Omega_0)} \tag{1.1.30}$$

Теперь в силу леммы 1.3, (1.16) и (1.23) используя известные неравенства Коши- Буняковского, с учетом (1.30), нетрудно получить оценку (1.26), что и доказывает лемму 1.3.

Лемма 1.4. Для регулярного решения задачи B справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)}+\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)}\le c\|f\|_0, \tag{1.31}$$

где c - независящая от $u(x,y)$ константа, а через $\|\ \|_l$ обозначена норма в пространстве Соболева $W_2^l(\Omega)$ и $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$.

Доказательство. В силу леммы 1.3 из (1.17) и (1.24) имеем

$$\|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)}\le C\|F_{\alpha\beta}(x)\|_{L_2(0,1)}\le C\|f\|_0$$

Отсюда и из свойств решений первой начально- краевой задачи для уравнения теплопроводности и формулы (1.18) следует, что решение задачи В удовлетворяет неравенству (1.31). Лемма 1.4 доказана.

Через W обозначим множество регулярных решений задачи В.

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи В, если существует последовательность $\{u_n\}$ функции $u_n\in W$ такая, что u_n и Lu_n сходиться в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Через $\mathbf{L}$ - обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W выражением (1.2).

Согласно определению сильного решения, u - сильное решение задачи В, тогда и только тогда, когда $u\in D(\mathbf{L})$.

Теорема 1.2. Для любой функции $Q(x,t)\in C^1([0,1]\times[0,1])$ и $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи В. Это решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega)\cap W_2^{1,2}(\Omega_1)\cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяет неравенству (1.31) и представимо в виде (1.25).

Доказательство. Так как $C_0^1(\overline{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ существует последовательность функции $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$ таких, что $\|f_n-f\|_0\to 0$, $n\to\infty$. Здесь $C_0^1(\overline{\Omega})$ - множество дифференцируемых в области Ω функции, равных нулю в окрестности $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ - граница области Ω).

При $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$ нетрудно, что $F_{\alpha\beta n}(x)\in C^1[0;1]$. Поэтому уравнение (1.14) и (1.22) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтера второго рода в пространстве $C^1[0;1]$. Следовательно, $\tau_n'(x)=u_{nx}(x,0)\in C^1[0;1]$. Из свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Дарбу для волнового уравнения, принимая во внимание представления (1.6) и (1.9), получаем, что $u_n\in W$ для всех $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$.

В силу неравенства (1.31) имеем $\|u_n-u\|_{W_2^1(\Omega_0)}+\|u_n-u\|_{W_2^1(\Omega_1)}\le c\|f_n-f\|_0\to 0$. Следовательно, $\{u_n\}$ - есть последовательность, отвечающая определению сильного решения, задача В - сильно разрешимо для любой правой части f, и сильное решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega)\cap W_2^{1,2}(\Omega_1)\cap C(\overline{\Omega})$. Теорема 1.1.2 доказана.

Теорема 1.3. Интегральный оператор в правой части (1.25), т.е.

$$\mathbf{L}^{-1} f(x,y) = \iint_{\Omega} K(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1 dy_1, \tag{1.32}$$

является вольтерровым (вполне непрерывным и квазинильпотентным) в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.3 нам достаточно показать, что оператор $\mathbf{L}^{-1}$, определенный формулой (1.32), является квазинильпотентным, так как вполне непрерывность этого оператора следует из того, что $K(x,y;x_1,y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Покажем, что $\mathbf{L}^{-1}$ - квазинильпотентный, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathbf{L}^{-n}\right\|_0^{\frac{1}{n}} = 0 , \tag{1.33}$$

где

$$\mathbf{L}^{-n} = \mathbf{L}^{-1}\left[\mathbf{L}^{-(n-1)}\right] \quad , \quad n = 1,2,3... \quad .$$

Из (1.32) непосредственным вычислением, нетрудно получить, что

$$\mathbf{L}^{-n} f(x,y) = \iint_{\Omega} K_n(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1 dy_1 , \tag{1.34}$$

где

$$K_n(x,y;x_1,y_1) = \iint_{\Omega} K(x,y;x_2,y_2) K_{(n-1)}(x_2,y_2,x_1,y_1) dx_2 dy_2 \quad , K_1(x,y;x_1,y_1) = K(x,y;x_1,y_1).$$

Лемма 1.5. Для итерированных ядер $K_n(x,y;x_1,y_1)$ имеет место оценка

$$\left|K_n(x,y;x_1,y_1)\right| \le (\sqrt{\pi} M)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{(x-x_1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} , \quad n = 1,2,3... , \tag{1.35}$$

где $M = \max\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega \\ (x_1,y_1)\in\Omega}} \left|\sqrt{x-x_1}\, K(x,y;x_1,y_1)\right|$, $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по n. При $n=1$ неравенство (1.35)

$$\left|K_1(x,y;x_1,y_1)\right| \le M (x-x_1)^{-\frac{1}{2}}$$

следует из представления ядра $K(x,y;x_1,y_1)$ с учетом представления функции Грина (1.10).

Пусть (1.35) справедливо для $n=k-1$. Докажем справедливость этой формулы для $n=k$. Используя неравенство (1.35), при $n=1$ и $n=k-1$ имеет

$$|K_k(x,y;x_1,y_1)| = \left|\iint\limits_{\Omega} K(x,y;x_2,y_2)K_{(k-1)}(x_2,y_2,x_1,y_1)dx_2dy_2\right| \le$$

$$\le \iint\limits_{\Omega} |K(x,y;x_2,y_2)|\cdot\left|K_{(k-1)}(x_2,y_2;x_1,y_1)\right|dx_2dy_2 \le$$

$$\le \iint\limits_{\Omega} \theta(x-x_2)M(x-x_2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\theta(x_2-x_1)\cdot(\sqrt{\pi}\mathrm{M})^{k-1}(\frac{3}{2})^{k-2}\times$$

$$\times\frac{(x_2-x_1)^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{k-1}{2})}dx_2dy_2 \le M^k(\sqrt{\pi})^{k-1}(\frac{3}{2})^{k-2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{k-1}{2})}\int\limits_{x_1}^{x}dx_2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1}(x-x_2)^{-\frac{1}{2}}(x_2-x_1)^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}}dy.$$

Заменяя $x_2 = x_1 + (x-x_1)$, далее получим

$$|K_k(x,y;x_1,y_1)| \le M^k(\sqrt{\pi})^{k-1}(\frac{3}{2})^{k-1}\frac{(x-x_1)^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(\frac{k-1}{2})}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \sigma^{-\frac{1}{2}}(1-\sigma)^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}}d\sigma = (\sqrt{\pi}M)^k(\frac{3}{2})^{k-1}\frac{(x-x_1)^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(\frac{k}{2})},$$

что и доказывает лемму 1.5.

Используя последовательно известное неравенство Шварца и лемму 1.5 (неравенство (1.35)), из представления (1.34) имеем

$$\|\mathbf{L}^{-n}f\|_0^2 = \iint\limits_{\Omega}|\mathbf{L}^{-n}f|^2dxdy = \iint\limits_{\Omega}\left[\iint\limits_{\Omega}K_n(x,y;x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1\right]^2dxdy \le$$

$$\le \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\iint\limits_{\Omega}|f(x_1,y_1)|^2dx_1dy_1\right)\left(\iint\limits_{\Omega}|K_n(x,y;x_1,y_1)|^2dx_1dy_1\right)\right]dxdy \le \left(\frac{3}{2}\sqrt{\pi}M\right)^{2n}\frac{1}{n(n-1)\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\|f\|_0^2.$$

Отсюда получаем

$$\|\mathbf{L}^{-n}\|_0 \le (\frac{3}{2}\sqrt{\pi}M)^n\cdot\frac{1}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}.$$

Из последнего нетрудно установить равенство (1.33). Теорема 1.3 доказана.

Следствие 1.1. Задача B является вольтерровой задачей.

Следствие 1.2. Для любого комплексного числа λ уравнение

$$\mathbf{L}u - \lambda u = f(x, y) \tag{1.36}$$

однозначно разрешимо при всех $f \in L_2(\Omega)$.

В силу обратимости оператора $\mathbf{L}$, однозначная разрешимость уравнения (1.36) эквивалентна однозначной разрешимости уравнения

$$u - \lambda \mathbf{L}^{-1} u = \mathbf{L}^{-1} f,$$

которая является уравнением типа Вольтерра второго рода. Это и доказывает следствие 1.2 из теоремы 1.3.

1.2 Сильная разрешимость и существование собственных значений краевой задачи с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0{,}0)$, $A_0 = (0{,}1)$, $B_0 = (1{,}1)$, $B(1{,}0)$, а при $y < 0$ - характеристиками AC: $x + y = 0$ и BC: $x - y = 1$ уравнения

$$Lu = \begin{Bmatrix} u_x - u_{yy}, \ y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, \ y < 0 \end{Bmatrix} = f(x, y) \tag{1.37}$$

Рассмотрим следующий аналог задачи Трикоми для параболо – гиперболического уравнения.

Задача B2. Найти решение уравнения (1.37), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0 \tag{1.38}$$

$$u_x + u_y\big|_{BC} = 0 \tag{1.39}$$

и условием склеивания на линиях изменения типа

$$u_x(x, +0) = u_x(x, -0), \quad u_y(x, +0) = \alpha u_y(x, -0) - \beta \int_0^x u_y(t, -0)\, dt, \ 0 < x < 1 \tag{1.40}$$

где $\alpha, \beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Обозначим через $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, а через W - множество функций из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(\overline{\Omega}_0) \cap C^{2,2}(\overline{\Omega}_1)$, удовлетворяющих уравнению и условиям (1.38)- (1.39), также условием склеивания (1.40).

Функцию $u \in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u_n \in W$, такая, что $\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \to 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь и далее через $\|\cdot\|_l$ обозначена норма в пространстве С.Л. Соболева $W_2^l(\Omega)$, где $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Теорема 1.4. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение u задачи В2. Это решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega) \cap W_2^{1,2}(\Omega_0) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le c\|f\|_0 \tag{1.41}$$

и представляется в виде

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} \mathrm{K}(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1 dy_1, \tag{1.42}$$

где $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$

Доказательство: В силу однозначной разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Дарбу для волнового уравнения решение уравнения (1.37) представимо в виде

$$u(x,y) = \begin{cases} \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x-x_1,y,y_1) f(x_1,y_1) dy_1 + \int_0^x G_{y_1}(x-x_1,y,0)\tau(x_1)dx_1, \ y > 0 \\ \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_\eta^1 f_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 + \tau(\eta), \ y < 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$, $\tau(0) = 0$, $f_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, а $G(x-x_1,y,y_1)$ - функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате AA_0B_0B, представимая в виде [54]:

$$G(x,y,y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{ -\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x} \right\} \right] \tag{1.44}$$

Вычислив производную $\frac{\partial u}{\partial y}$, и устремляя y к нулю, внутри области Ω_0 получим соотношения между $\tau(x)$ и $v_1(x)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)$ перенесенное из параболической части

$$v_1(x)=-\int_0^x k(x-t)\tau'(t)\,dt+\Phi_0(x), \tag{1.45}$$

где

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{x}}, \tag{1.46}$$

$$\Phi_0(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G_0(x-x_1,y_1)f(x_1,y_1)dy_1, \tag{1.47}$$

$$G_0(x,y_1)\equiv G_y(x,y_1,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(y_1+2n)e^{-\frac{(y_1+2n)}{4x}} \tag{1.48}$$

Аналогично находим интегро-дифференциальное соотношение между $\tau(x)$ и $v_2(x)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0)$, перенесенное на отрезок AB из гиперболической части Ω_1. Оно имеет вид

$$v_2(x)=-\tau'(x)-2\int_x^1 f_1(x,t)\,dt,\quad 0<x<1 \tag{1.49}$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Из (1.45) и (1.49) в силу условия склеивания (1.40), получаем для $\tau'(x)$ интегральное уравнения

$$\tau'(x)+\int_0^x k_1(x,t)\tau'(t)dt=F(x). \tag{1.50}$$

здесь

$$k_1(x,t)=\frac{1}{\alpha}\left[k(x,t)+\beta\right], \tag{1.51}$$

$$F(x)=-\frac{1}{\alpha}\Phi_0(x)-2\int_x^1 f_1(x,\eta_1)d\eta_1+\frac{2\beta}{\alpha}\int_0^x dt\int_t^1 f_1(x,\eta_1)d\eta_1 \tag{1.52}$$

Таким образом, задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению типа Вольтера второго рода (1.50). Так как ядро $k(x,t)$ представимо в виде $k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+\tilde{k}(x)$, где $\tilde{k}(x)\in C^\infty[0;1]$, то $k(x)$ - ядро со слабой особенностью. Поэтому существует единственное решение уравнения (1.50) и оно имеет вид

$$\tau'(x)=F(x)+\int_0^x \Gamma(x,t)F(t)\,dt \tag{1.53}$$

где $\Gamma(x)$ - резольвента уравнения (1.50)

$$\Gamma(x)=\sum_{j=1}^{\infty}k_j(x),\ k_1(x)=k(x),$$

$$k_{j+1}(x)=\int_0^x k_1(x-t)k_j(t)\,dt,\ j\in N.$$

Из (1.53), с учетом $\tau(0)=0$, после несложных преобразований получим

$$\tau(x)=-\frac{1}{\alpha}\int_0^x dx_1\int_0^1 G_1(x-x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)\,dy_1-$$
$$-2\int_0^x d\xi_1\int_{\xi_1}^1 \Gamma_1(x,\xi_1)\,f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1+\frac{2\beta}{\alpha}\int_0^x d\xi_1\int_{\xi_1}^1 f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1\int_{\xi_1}^x \Gamma_1(x,t)\,dt \tag{1.54}$$

где

$$\Gamma_1(x,t)=1+\int_t^x \Gamma(z,t)\,dz \tag{1.55}$$

$$G_1(x-x_1,y_1)=\int_{x_1}^x G_0(t-x_1,y_1)\Gamma_1(x,t)\,dt.$$

Подставляя (1.54) в (1.43), получим формулу (1.42), где

$$\mathrm{K}(x,y;x_1,y_1)=\theta(y)\{\theta(y_1)\theta(x-x_1)G_2(x-x_1,y,y_1)-\theta(-y_1)[\theta(x-\xi_1)G_3(x-\xi_1,y)+$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}\theta(x-\xi_1)G_4(x-\xi_1,y)]\}+\theta(-y)\Big\{-\frac{1}{\alpha}\theta(y_1)\theta(\eta-x_1)G_1(\eta-x_1,y_1) \tag{1.56}$$
$$+\theta(-y_1)\left[\frac{1}{2}\theta(\eta-\xi_1)\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta_1-\eta)-\theta(\eta-\xi_1)\left[\Gamma_1(\eta,\xi_1)+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt\right]\right]\Big\}$$

где

$$G_1(x-x_1,y_1)=\int_{x_1}^x \Gamma_1(x,t)G_0(t-x_1,y_1)\,dt,$$

$$G_2(x-x_1,y)=G(x-x_1,y,y_1)-\frac{1}{\alpha}\int_{x_1}^x G_{y_1}(x-t,y,0)G_1(t-x_1,y_1)\,dt,$$

$$G_3\left(x-\xi_1, y\right)=\int_{\xi_1}^{x} G_{y_1}\left(x-t, y, 0\right)\Gamma_1\left(t, \xi_1\right)dt,$$

$$G_4\left(x-\xi_1, y\right)=\int_{\xi_1}^{x} dt\int_{\xi_1}^{x} G_{y_1}\left(x-t, y, 0\right)\Gamma_1\left(t, z\right)dz,$$

$$\theta(y)=1,\ y>0 \text{ и } \theta(y)=0,\ y<0.$$

Поступая также как и в подразделе 1.1, устанавливается $\mathrm{K}(x, y; x_1, y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться также в справедливости оценки

$$\|F(x)\|_{L_2(0,1)}\le C\|f\|_0.$$

Поэтому из (1.50) имеем

$$\|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)}\le C\|F(x)\|_{L_2(0,1)}\le C\|f\|_0.$$

Отсюда и из свойств решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности следует, что решение задачи принадлежит классу $W_2^1(\Omega)\cap W_2^{1,2}(\Omega_0)\cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет неравенству (1.41).

Покажем, что найденное решение будет сильным. Так как $C_0^1(\overline{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ существует последовательность функции $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$ таких, что $\|f_n-f\|\to 0$, $n\to 0$. Обозначим $u_n=L^{-1}f_n$.

При $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$ нетрудно видеть, что $F_n(x)\in C^1[0;1]$. Здесь через $F_n(x)$ обозначено аналогичное выражение (1.52), где $f(x,y)$ надо заменить $f_n(x,y)$. Поэтому уравнение (1.50) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтера второго рода в пространстве $C^1[0;1]$. Следовательно, $\tau_n'(x)=u_x(x,0)\in C^1[0;1]$. Из свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Дарбу для волнового уравнения, принимая во внимания представление (1.42), получаем, что $u_n\in W$ для всех $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$.

В силу неравенства (1.41) имеем $\|u_n-u\|_{W_2^1(\Omega_0)}+\|u_n-u\|_{W_2^1(\Omega_1)}\le c\|f_n-f\|_0\to 0$. Следовательно, $\{u_n\}$ - есть последовательность, отвечающая определению сильного решения, задача - сильно разрешима для любой правой части f, и сильное решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega)\cap W_2^{1,2}(\Omega_0)\cap C(\overline{\Omega})$. Теорема 1.4 доказана.

Из теоремы 1.4 следует, что оператор L задачи обратим, и обратный оператор L^{-1} является оператором Гильберта-Шмидта. Естественно возникает вопрос о существовании собственных значений оператора L^{-1}, следовательно, и задачи B2.

Теорема 1.5. Пусть $\alpha > 0,\ \beta > 0$. Существует $\lambda \in C$ такое, что уравнение

$$Lu = \lambda u$$

имеет нетривиальное решение $u \in W$.

Доказательство: Через L обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W равенством (1.37). Из теоремы 1.4 следует, что L - обратим и L^{-1} - определяемый формулой (1.42) оператор Гильберта – Шмидта. Тогда оператор $L^{-2} \equiv \left(L^{-1}\right)^2$ - ядерный в $L_2(\Omega)$. Поэтому для оператора L^{-2} применением результата В.Б.Лидского о совпадении матричного и спектрального следов.

Лемма 1.6. [55] Если оператор T - ядерный в гильбертовым пространстве H, тогда, каков бы ни был ортонормированный базис $\varphi_i\left(i = 1,2,...\right)$ в H, справедливо равенство

$$SpT \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(T\varphi_k, \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(T\right), \tag{1.57}$$

где λ_k - собственные значения T.

Известно также, что, если T - ядерный оператор в $L_2(\Omega)$, представленный как произведение $T = KR$ двух операторов Гильберта – Шмидта:

$$\left(Kf\right)\!(z) = \int\limits_{\Omega} K\left(z, z_1\right) f\left(z_1\right) dz_1,$$

$$\left(Rf\right)\!(z) = \int\limits_{\Omega} R\left(z, z_1\right) f\left(z_1\right) dz_1,$$

то имеет место формула Гаала вычисления следа [56]

$$SpT = \int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_{\Omega} K\left(z, z_1\right) R\left(z_1, z\right) dz_1\right] dz\ . \tag{1.58}$$

Из (1.57) и (1.58) получаем ,что

$$SpL^{-2} = \iint\limits_{\Omega} dxdy \iint\limits_{\Omega} K\left(x, y; x_1, y_1\right) K\left(x_1, y_1; x, y\right) dx_1 dy_1 .$$

Из (1.57) имеем

$$K\left(x, y; x_1, y_1\right) K\left(x_1, y_1; x, y\right) = \theta\left(y\right)\theta\left(-y_1\right)\theta\left(x-\xi_1\right)\theta\left(\eta_1 - x\right)\left[\frac{1}{\alpha}G_1(\eta_1 - x, y)G_3(x-\xi_1, y) +\right.$$

$$\left. +\frac{\beta}{\alpha}G_1\left(\eta_1 - x, y\right)G_4\left(x-\xi_1, y\right)\right] + \theta\left(-y\right)\theta\left(y_1\right)\theta\left(\eta - x_1\right)\theta\left(x_1 - \xi\right)\left[\frac{1}{\alpha}G_1(\eta - x_1, y_1)G_3(x_1 - \xi, y_1) +\right.$$

$$+\frac{\beta}{\alpha^2}G_1(\eta-x_1,y_1)G_4(x_1-\xi,y_1)\Bigg]+\theta(-y)\theta(-y_1)\Bigg\{-\frac{1}{2}\theta(\eta-\xi_1)\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta_1-\eta)\theta(\eta_1-\xi)\times$$

$$\times\left[\Gamma_1(\eta_1,\xi)-\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)\,dt\right]-\frac{1}{2}\theta(\eta-\xi_1)\theta(\eta_1-\xi)\theta(\xi-\xi_1)\theta(\eta-\eta_1)\left[\Gamma_1(\eta,\xi_1)-\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)\,dt\right]+$$

$$+\theta(\eta-\xi_1)\theta(\eta_1-\xi)\Bigg[\Gamma_1(\eta_1,\xi)\Gamma_1(\eta,\xi_1)+\frac{\beta}{\alpha}\Gamma_1(\eta_1,\xi)\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt+$$

$$+\frac{\beta}{\alpha}\Gamma_1(\eta,\xi_1)\int_{\xi}^{\eta_1}\Gamma(\eta_1,t)dt+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\int_{\xi}^{\eta_1}\Gamma(\eta_1,t)dt\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt\Bigg]\Bigg\}$$

Поэтому

$$SpL^{-2}=\frac{2}{\alpha}\iint_{\Omega_1}dxdy\iint_{\Omega_2}\theta(x-\xi_1)\theta(\eta_1-x)\left[G_1(\eta_1-x,y)G_4(x-\xi_1,y)+\frac{\beta}{\alpha}G_1(\eta_1-x,y)G_3(x-\xi_1,y)\right]dx_1dy_1-$$

$$-\iint_{\Omega_2}dxdy\iint_{\Omega_2}\theta(\eta-\xi_1)\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta_1-\eta)\theta(\eta_1-\xi)\left[\Gamma_1(\eta_1,\xi)+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)\,dt\right]dx_1dy_1+$$

$$+\iint_{\Omega_2}dxdy\iint_{\Omega_2}\theta(\eta-\xi_1)\theta(\eta_1-\xi)\Bigg[\Gamma_1(\eta_1,\xi)\Gamma_1(\eta,\xi_1)+\frac{\beta}{\alpha}\Gamma_1(\eta_1,\xi)\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt+$$

$$+\frac{\beta}{\alpha}\Gamma_1(\eta,\xi_1)\int_{\xi}^{\eta_1}\Gamma(\eta_1,t)dt+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\int_{\xi}^{\eta_1}\Gamma(\eta_1,t)dt\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt\Bigg]dx_1dy_1=\sum_{k=1}^{3}I_k. \tag{1.59}$$

Покажем, что $\sum_{k=1}^{3}I_k>0$. Действительно,

$$I_3+I_2=\frac{1}{4}\int_0^1 d\eta\int_0^{\eta}d\xi\int_0^1 d\xi_1\int_{\xi_1}^1\theta(\eta-\xi_1)\theta(\eta_1-\xi)\Bigg[\Gamma_1(\eta,\xi_1)\Gamma_1(\eta_1,\xi)+\frac{\beta}{\alpha}\Gamma_1(\eta_1,\xi)\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt$$

$$+\frac{\beta}{\alpha}\Gamma_1(\eta,\xi_1)\int_{\xi}^{\eta_1}\Gamma(\eta_1,t)dt+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\int_{\xi}^{\eta_1}\Gamma(\eta_1,t)dt\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)dt\Bigg]-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^1 d\eta\int_0^{\eta}d\xi\int_0^1 d\xi_1\int_{\xi_1}^1\theta(\eta-\xi_1)\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta_1-\eta)\theta(\eta_1-\xi)\left[\Gamma_1(\eta_1,\xi)+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)\,dt\right]d\eta_1=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 d\eta\int_0^{\eta}d\xi\int_0^{\eta}d\xi_1\int_{\xi_1}^1\theta(\eta_1-\xi)\left[\Gamma_1(\eta_1,\xi)+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)\,dt\right]\times$$

$$\times\left\{\Gamma_1(\eta,\xi_1)+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi}^{\eta}\Gamma(\eta_1,t)dt-\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta_1-\eta)\right\}d\eta_1>0, \tag{1.60}$$

так как $\Gamma_1(\eta-\xi_1)\geq 1,\ \alpha>0,\ \beta>0$ то

$$\Gamma_1(\eta,\xi_1)+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\xi_1}^{\eta}\Gamma(\eta,t)\,dt-\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta_1-\eta)>0,.$$

Рассмотрим теперь I_1. Имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{\alpha}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 d\xi_1\int_{\xi_1}^1 \theta(x-\xi_1)\theta(\eta_1-x)\left[G_1(\eta_1-x,y)G_4(x-\xi_1,y)+\frac{\beta}{\alpha}G_1(\eta_1-x,y)G_3(x-\xi_1,y)\right]d\eta_1 = \\
&= \frac{2}{\alpha}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x d\xi_1\int_x^1 G_1(\eta_1-x,y)\left[G_4(x-\xi_1,y)+\frac{\beta}{\alpha}G_3(x-\xi_1,y)\right]d\eta_1 = \\
&= \frac{2}{\alpha}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x d\xi_1\int_0^{1-x} G_1(x-\xi_1,y)\left[G_4(\eta_2,y)+\frac{\beta}{\alpha}G_3(\eta_2,y)\right]d\eta_2 = \\
&= \frac{2}{\alpha}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left(\int_0^x G_1(\xi_2,y)\,d\xi_2\right)\left(\int_0^{1-x}\left[G_4(\eta_2,y)+\frac{\beta}{\alpha}G_3(\eta_2,y)\right]d\eta_2\right).
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Функцию G_1 представим в виде:

$$G_1(\xi,y)=\int_0^{\xi}G_0(t,y)\,dt+\int_0^{\xi}G_0(t,y)\,dt\int_0^{\xi-t}\Gamma(\tau)\,d\tau. \tag{1.62}$$

Принимая во внимание (1.47), исследуем первое слагаемое. Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\xi}G_0(t,y)\,dt &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\xi}\frac{y+2n}{t^{3/2}}e^{-\frac{(y+2n)^2}{4t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\pm\infty}e^{-t^2}dt = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}e^{-t^2}dt+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{+\infty}e^{-t^2}dt = \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty}e^{-t^2}dt-\sum_{n=-1}^{\infty}\int_{-\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty}e^{-t^2}dt\right] = \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty}e^{-t^2}dt--\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2n-y+2}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty}e^{-t^2}dt\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2+yn}{2\sqrt{\xi}}}^{\frac{2n+2-y}{2\sqrt{\xi}}}e^{-t^2}dt.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^{\xi} G_0(t,y)dt \geq 0. \qquad (1.63)$$

Причем равенство в (1.63) достигается на $y=1$, то есть

$$\int_0^{\xi} G_0(t,y)dt \not\equiv 0.$$

Тогда, учитывая, что $\Gamma(\tau)>0$, относительно второго слагаемого в (1.62) имеем

$$\int_0^{\xi} G_0(t,y)dt \int_0^{\xi-t} \Gamma(\tau)d\tau = \int_0^{\xi} \Gamma(\tau)d\tau \int_0^{\xi-\tau} G_0(t,y)dt \geq 0 \quad (\not\equiv 0).$$

Анологично также можно показат, что второй множитель в (1.61) будет положительным. Поэтому, из (1.61) с учетом того, что оба множителя положительный получаем, что $I_1>0$, как интеграл по положительному направлению от неотрицательной и тождественно не равной нулю функции. Из (1.58)-(1.60) следует, что $SpL^{-2}>0$.

Тогда в силу (1.56), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\left(L^{-2}\right) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2\left(L^{-1}\right) > 0,$$

где $\lambda_k\left(L^{-2}\right)$ - собственные значения оператора L^{-2}. Это означает, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} > 0$, где λ_k - собственные значения задачи (1.37)-(1.39). Отсюда следует существование собственных значений аналога задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения. Таким образом, теорема 1.5 доказана.

1.3 Разрешимость локальной задачи с интегральными условиями сопряжения на линии изменения типа

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{Bmatrix} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{Bmatrix} = f(x, y) \qquad (1.64)$$

в конечной области Ω, ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x = 0,\ \ y = 1,\ \ x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC:\ x + y = 0$ и $BC:\ x - y = 1$ уравнения (1.64).

Задача В3. Найти решение уравнения (1.64) из класса функций

$$W = \left\{u(x, y) : u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{1,1}\left(\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_1\right) \cap C^{1,2}\left(\Omega_0\right) \cap C^{2,2}\left(\Omega_1\right)\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0 \qquad (1.65)$$

$$u\Big|_{AC} = 0 \qquad (1.66)$$

и условием сопряжения

$$u_x(x, +0) = u_x(x, -0), \quad u_y(x, +0) = \alpha u_y(x, -0) - \beta \int\limits_x^1 u_y(t, -0) Q(x, t)\, dt,\ \ 0 < x < 1 \qquad (1.67)$$

где $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $f(x, y)$, $Q(x, t)$ – заданные функции, $\alpha, \beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Это задача в случае, когда $\beta = 0,\ \alpha = 1$ совпадает с классической задачей Трикоми для уравнения (1.64) и является вольтерровой задачей (см. подраздел 1.1).

Различные краевые задачи с непрерывными и разрывными условиями склеивания исследованы во многих работах. Информацию об этих работ можно найти в монографии [13]. Отметим работы [19; 28-29; 47;52], где изучены вопросы разрешимости краевых задач с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболических уравнений.

Мы исследуем задачу в следующих двух случаях: 1) $\alpha = 0,\ \beta \neq 0;$ 2) $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$.

1 Получение основных функциональных соотношений на линии изменения типа

В области Ω_0 решение 1-краевой задачи для уравнения (1.64) представимо в виде [51]:

$$u(x,y)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G(x-x_1,y,y_1)f(x_1,y_1)dy_1+\int_0^x G_{y_1}(x-x_1,y,0)\tau_1(x_1)dx_1, \tag{1.68}$$

где $\tau_1(x)=u(x,+0)$,

$G(x,y,y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[exp\left\{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}\right\}-exp\left\{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}\right\}\right]$ – функция Грина 1-краевой задачи для уравнения (1.64) в области Ω_0.

Вычислив производную u_y и устремляя y к нулю получим

$$\nu_1(x)=-\int_0^x k(x-t)\tau_{1'}(t)dt+\Phi_0(x), \tag{1.69}$$

где

$$u_y(x,+0)=\nu_1(x),$$

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}exp\left(-\frac{n^2}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+\tilde{k}(x),$$

$$\Phi_0(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G_0(x-x_1,y_1)f(x_1,y_1)dy_1,$$

$$G_0(x,y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(y_1+2n)exp\left(-\frac{(y_1+2n)^2}{4x}\right).$$

В области Ω_1 решение ищем в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left[\tau_2(\xi)+\tau_2(\eta)-\int_\xi^\eta \nu_2(t)dt\right]-\int_\xi^\eta d\xi_1\int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, \tag{1.70}$$

где $\xi=x+y,\eta=x-y$, $f_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)$, $\tau_2(x)=u(x,-0)$, $u_y(x,-0)=\nu_2(x)$.

Используя условие (1.66) находим

$$\nu_2(\eta)=\tau_{2'}(\eta)-2\int_0^\eta f_1(\xi_1,\eta)d\xi_1. \tag{1.71}$$

(1.71) подставим в условие сопряжения (1.67) и получим

$$\nu_1(x)=\alpha\tau_{1'}(x)+\beta\int_x^1\tau_{1'}(t)Q(x,t)dt-2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1-2\beta\int_x^1\left(\int_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1\right)Q(x,t)dt. \quad (1.72)$$

2 Доказательство единственности решения задачи

Умножим уравнение $u_x-u_{yy}=0$ на функцию u и интегрируем по области Ω_0. Применяя формулу Грина, после использования условия (1.65), имеем

$$\iint_{\Omega_0}u_y^2dxdy+\frac{1}{2}\int_0^1u^2(1,y)dy+\int_0^1\tau_1(x)\nu_1(x)dx=0. \quad (1.73)$$

Учитывая (1.72) в однородном случае, получим

$$I=\int_0^1\tau_1(x)\nu_1(x)dx=\alpha\int_0^1\tau_1(x)\tau_1(x)dx+\beta\int_0^1\tau_1(x)dx\int_x^1\tau_{1'}(t)Q(x,t)dt=I_1+I_2.$$

Легко можно убедиться, что если $\alpha\geq 0$, то $I_1\geq 0$. Используя формулу интегрирования по частьям I_2 напишем следующим образом:

$$I_2=\beta\int_0^1\tau_1(x)\left[\tau_1(1)Q(x,1)-\tau_1(x)Q(x,x)\right]dx-\beta\int_0^1\tau_1(x)dx\int_x^1\tau_1(t)Q_t(x,t)dt=I_{2,1}-I_{2,2}.$$

Пусть $Q(x,1)=0$. Если $\beta Q(x,x)\leq 0$, то $I_{2,1}\geq 0$. Если далее предположим, что $Q(x,t)=Q_1(x)Q_2(t)$, то $I_{2,2}=-\beta\int_0^1\tau_1(x)Q_1(x)dx\int_x^1\tau_1(t)Q_2'(t)dt$. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1\tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2=-2\int_x^1\tau_1(t)Q_2'(t)\times\tau_1(x)Q_2'(x)dt,$$

то интегрируя по частьям, после несложных преобразований имеем

$$I_{2,2}=-\frac{\beta}{2}\frac{Q_1(0)}{Q_2'(0)}\left(\int_0^1\tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2-\frac{\beta}{2}\int_0^1\left(\int_x^1\tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'dx.$$

Если $\dfrac{\beta Q_1(0)}{Q_2'(0)}\leq 0,\ \beta\left(\dfrac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'\leq 0$, то $I_{2,2}\geq 0$.

Учитывая вышеполученные условия, получим, что $I \geq 0$. Тогда из (1.73) получим, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_0$. Учитывая искомий класс функции и решение задачи Коши получим, что $u(x,y) \equiv 0$ и в области $\overline{\Omega}_1$. И так, мы можем заключить, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$.

Теперь сформулируем только что доказанное утверждение в виде теоремы.

Теорема 1.6 Пусть

$$\alpha \geq 0, \quad Q(x,t) = Q_1(x)Q_2(t), \quad Q_2(1) = 0, \quad \beta Q_1(x)Q_2(x) \leq 0, \quad \frac{\beta Q_1(0)}{Q'_{2'}(0)} \leq 0, \quad \beta \left(\frac{Q_1(x)}{Q'_2(x)} \right)' \leq 0.$$

Тогда если существует решение задачи, то оно единственно.

Замечание. В качестве примера для такой функции $Q(x,t)$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 1.6 приведем следующую функцию:

$$Q(x,t) = -x(1-t)^p, 0 < p < 1.$$

3 Существование решения задачи

Справедлива следующая теорема о существовании решения задачи.

Теорема 1.7 Пусть выполнены все условия теоремы 1.6. Если $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}), f(0,0) = 0$, $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$, то существует единственное решение задачи.

Доказательство: (1.72) подставим в (1.69):

$$\alpha\tau_{1'}(x) + \beta\int_x^1 \tau_{1'}(t)Q(x,t)dt + \int_0^x \tau_{1'}(t)k(x-t)dt =$$
$$= \Phi_0(x) + 2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1 + 2\beta\int_x^1 Q(x,t)dt\int_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1 \tag{1.74}$$

При $\beta = 0, \alpha \neq 0$ уравнение (1.74) будет интегральным уравнением Вольтерра 2-рода с ядром $k(x)$, которая имеет слабую особенность, а правая часть непрерывно дифференцируема. Поэтому в этом случае задача будет однозачно разрешима.

В случае, когда $\alpha = 0, \beta \neq 0$ из (1.74) сначало получим интегральное уравнение Абеля, потом действуя по стандартному методу получим интегральное уравнение Фредгольма 2-рода вида

$$\tau'(x) + \int_0^1 K_1(x,z)\tau'(z)dz = \Phi_1(x), \tag{1.75}$$

а в случае, когда $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ сразу из (1.74) получим интегральное уравнение вида

$$\tau'(x)+\int_0^1 K_2(x,z)\tau'(z)dz=\Phi_2(x), \tag{1.76}$$

где

$$\tau(x)=\tau_1(x)=\tau_2(x)\,,$$

$$K_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{dt}{\sqrt{x-t-z}}\,\frac{\partial\tilde{k}(t)}{\partial t}dt+\beta\frac{Q(z,z)}{\sqrt{x-z}}, & 0\le z\le x,\\ \displaystyle-\beta\int_z^1\frac{\dfrac{\partial Q(t,z)}{\partial t}}{\sqrt{x-t}}dt, & x\le z\le 1,\end{cases} \tag{1.77}$$

$$K_2(x,z)=\frac{1}{\alpha}\begin{cases}k(x-t), & 0\le z\le x,\\ \beta Q(t,z), & x\le z\le 1,\end{cases} \tag{1.78}$$

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^x dx_1\int_0^1\left[\int_0^{x-x_1}\frac{\dfrac{\partial G_0(t,y_1)}{\partial t}}{\sqrt{x-x_1-t}}dt\right]f(x_1,y_1)dy_1+\right.$$

$$+2\beta\left[\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{x-t}}\int_t^1\frac{\partial Q(t,z)}{\partial t}dz\int_0^z f_1(\xi_1,z)d\xi_1-\right. \tag{1.79}$$

$$\left.\left.-\int_0^x d\xi_1\int_0^{x-\xi_1}\frac{Q(\xi_1+t,\xi_1+t)}{\sqrt{x-t-\xi_1}}\,f_1(\xi_1,\xi_1+t)dt\right]\right\},$$

$$\Phi_2(x)=\frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^x dx_1\int_0^1 G_0(x-x_1,y)f(x_1,y_1)dy_1+2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1+\right. \tag{1.80}$$

$$\left.+2\beta\int_x^1 Q(x,t)dt\int_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1\right\}$$

Легко можно убедиться, что если выполнены условия теоремы 1.6 и 1.7, то из единственности и из свойств (1.77)- (1.80) следует одназначный разрешимость интегральных уравнении Фредгольма второго рода (1.75) и (1.76) в классе непрерывно дифференцируемых функции. После определения функции $\tau(x)$, функции $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$ находятся по формулам (1.69) и (1.71) соответственно. После нахождения этих функций, решение задачи можно восстановить в области Ω_0 находится как решение 1-краевой задачи (1.78), а в области Ω_1 как решение задачи Коши по формуле (1.70). Теорема 1.7 доказана.

Из теоремы 1.7 следует справедливость следующей леммы.

Лемма 1.7. Для регулярного решения задачи В3 верна следующая оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le c\|f\|_0 \tag{1.81}$$

Здесь $\| \ \|_l$ обозначает норму в пространстве Соболева $W_2^l(\Omega)$ и $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$ и $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$ тогда из (1.79) и (1.80) нетрудно установить, что $\Phi_1(x) \in C^1[0,1], \Phi_2(x) \in C^1[0,1]$

$$\|\Phi_i(x)\|_{L_2(0,1)} \le C\|f(x,y)\|_0, \quad i = 1,2.$$

Тогда, так как (1.75) и (1.76) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода и в силу единственности решения задачи В3 эти уравнения однозначно разрешимы и в пространстве $L_2(0,1)$, для них верны следующие оценки

$$\|\tau(x)\|_{W_2^2(0,1)} \le C\|\Phi_i(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad i = 1,2$$

В силу последнего представления решения задачи В3 в области Ω_0 по формуле (1.68), а в области Ω_1 по формуле (1.70), получаем верность утверждения леммы 1.7. Лемма 1.7 доказана.

С учетом единственности решения задачи В3 можно доказать справедливость следующей теоремы о сильной разрешимости задачи В3. (Определение сильного решения задачи а вводятся анологично как и в подразделе 1.1)

Теорема 1.8. Пусть выполнены все условия теоремы 1.6 и 1.7 тогда для любой функций $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи В3. Это решение принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и верна оценка (1.81).

1.4 Аналог задач Трикоми и Геллерстедта для смешанного параболо-гиперболических уравнений дробного порядка

1 Аналог задачи Трикоми для смешанного параболо- гиперболических уравнений дробного порядка

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - D_{0y}^{\alpha H(x)+2H(-x)}u = \lambda u \tag{1.82}$$

в области $\Omega_1 = \{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \Omega_2$. Здесь $\Omega = \Omega_1 \cup AA_0 \cup \Omega_2$ - характеристический треугольник с вершинами $A(0,0)$, $A_0(0,1)$, $C(-1/2,1/2)$, $H(x)$ - функция Хевисайда,

$$D_{at}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_{a}^{t} (t-s)^{-\alpha+n-1} f(s) ds$$

- дробное производное в смысле Римана-Лиувилля порядка α функции f, заданной на $[a,b]$, где $n=[\alpha]+1$, $[\alpha]$ - целый часть α, $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0 .$$

Для $\lambda > 0$ и $0 < \alpha \le 1$ мы сформулируем аналог задачи Трикоми следующем образом:

Задача AT. Найти решение уравнения (1.82) из следующего класса функций

$$W_1 = \left\{u : D_{0y}^{\alpha-1} u \in C(\overline{\Omega_1}), u_{xx}, D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_1), u_x(0^{\pm}, y) \in H(0,1), u \in C(\overline{\Omega_2}) \cap C^2(\Omega_2)\right\},$$

удовлетворяющие начальным условием

$$\lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} u(x,y) = \omega(x), 0 \le x \le 1 \tag{1.83}$$

и краевыми условиями

$$u(-y/2, y/2) = \psi_1(y), 0 \le y \le 1, \tag{1.84}$$

$$u(1,y) = \psi_2(y), 0 \le y \le 1 \tag{1.85}$$

а также условиям склеивания

$$u(0^-, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{y} u(0^+, t)(y-t)^{-\alpha} dt, 0 < y \le 1, \tag{1.86}$$

$$\int_{0}^{y} u_x(0^-, t) J_0\left[\sqrt{\lambda}(y-t)\right] dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{y} u_x(0^+, t)(y-t)^{-\alpha} dt, 0 < y < 1. \tag{1.87}$$

Здесь $\omega(x), \psi_i(y) (i=1,2)$ - заданные функции, причем $\lim\limits_{y \to 0} y^{1-\alpha} \psi_1(y) = \omega(0)$.

Решение задачи Коши для уравнения (1.82) в области Ω_2 представляется в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left\{\tau^-(y+x)+\tau^-(y-x)+\int_{y-x}^{y+x}\nu^-(t)J_0\left[\sqrt{\lambda\left[(y-t)^2-x^2\right]}\right]dt+\right.$$
$$\left.+x\lambda\int_{y-x}^{y+x}\tau^-(t)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda\left[(y-t)^2-x^2\right]}\right]}{\sqrt{\lambda\left[(y-t)^2-x^2\right]}}dt\right\} \tag{1.88}$$

где $J_k[\square]$ - функция Бесселя первого рода порядка k, $\tau^-(y)=u(-0,y)$, $\nu^-(y)=u_x(-0,y)$.

Мы вычислим, $u\left(-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)$ чтобы использовать условие (1.83):

$$u\left(-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)==\frac{1}{2}\left\{\tau^-(0)+\tau^-(y)-\int_0^y\nu^-(t)J_0\left[\sqrt{\lambda t(t-y)}\right]dt+\lambda\frac{y}{2}\int_0^y\tau^-(t)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda t(t-y)}\right]}{\sqrt{\lambda t(t-y)}}dt\right\} \tag{1.89}$$

Учитывая условие (1.83) и интегральный оператор вида [58]

$$B_{mx}^{n,\sqrt{\lambda}}\left[f(x)\right]=f(x)+\int_m^x f(t)\left(\frac{x-m}{t-m}\right)^{1-n}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\sqrt{\lambda(t-m)(t-x)}\right]dt, m,n=0,1, \tag{1.90}$$

запишем (1.89) следующим образом

$$\psi_1(y)=\frac{1}{2}\left\{\psi_1(0)+B_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[\tau^-(y)\right]-\int_0^y B_{0t}^{1,\sqrt{\lambda}}\left[\nu^-(t)\right]dt\right\}. \tag{1.91}$$

Теперь используем интегральный оператор вида

$$A_{mx}^{n,\sqrt{\lambda}}\left[f(x)\right]=f(x)-\int_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda(x-m)(x-t)}\right]dt, m,n=0,1, \tag{1.92}$$

который является взаимно-обратным с оператором определенный по формуле (1.90). Применяя оператор (1.92) к обеим сторонам равенства (1.91), получим

$$A_{mx}^{n,\sqrt{\lambda}}\left[f(x)\right]=f(x)-\int_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda(x-m)(x-t)}\right]dt, m,n=0,1 \tag{1.93}$$

Имея в виду следующие свойства операторов (1.90) и (1.92)

$$A_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left\{B_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[f(y)\right]\right\}=f(y), A_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left\{\int_0^y B_{0t}^{1,\sqrt{\lambda}}\left[f(t)\right]dt\right\}=\int_0^y f(t)J_0\left[\sqrt{\lambda}(y-t)\right]dt,$$

мы получим

$$2A_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[\psi_1(y)\right]=\psi_1(0)+\tau^-(y)-\int_0^y \nu^-(t)J_0\left[\sqrt{\lambda}(y-t)\right]dt. \qquad (1.94)$$

Учитывая теперь условия склеивания (1.86) и (1.87), получим

$$D_{0y}^{\alpha-1}\nu^+(y)=D_{0y}^{\alpha-1}\tau^+(y)-2A_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[\psi_1(y)\right]+\psi_1(0). \qquad (1.95)$$

Применяя оператор $D_{0y}^{1-\alpha}$ к обеим частям равенства (1.95) и учитывая следующий закон композиции [57-58]

$$D_{at}^{\alpha}D_{at}^{\beta}f(t)=D_{at}^{\alpha+\beta}f(t), \beta\le 0,$$

имеем

$$\tau^+(y)=\nu^+(y)+\psi_1^*(y), \quad 0<y<1, \qquad (1.96)$$

где

$$\psi_1^*(y)=D_{0y}^{1-\alpha}\left\{2A_{0y}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[\psi_1(y)\right]-\psi_1(0)\right\}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{xx}-D_{0y}^{\alpha}u-\lambda u=0 \\ u_x(0,y)=\nu^+(y), \quad u(1,y)=\psi_2(y), \quad \lim\limits_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x,y)=\omega(x). \end{cases} \qquad (1.97)$$

Решение этой задачи имеет вид [59]

$$u(x,y)=\int_0^1 \omega(\xi)G(x,y,\xi,0)d\xi-\int_0^y \nu^+(\eta)G(x,y,0,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^y \psi_2(\eta)G_\xi(x,y,1,\eta)d\eta-\lambda\int_0^1\int_0^y u(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta, \qquad (1.98)$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)+e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right] \qquad (1.99)$$

- функция Грина задачи (1.97),

$$e_{1,\beta}^{1,\beta}(z) = \Phi(-\beta, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(-\beta n + \beta)}$$

- функция Райта [60], $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Рассматривая (1.98) как интегральное уравнение относительно функции $u(x,y)$, мы напишем решение через резольвенты ядра $\lambda G(x,y,\xi,\eta)$:

$$u(x,y) = P(x,y) - \int_0^y \nu^+(\eta) K_1(x,y,\eta) d\eta \tag{1.100}$$

где

$$\begin{gathered} P(x,y) = \int_0^1 \omega(\xi) G(x,y,\xi,0) d\xi + \int_0^y \int_0^1 \int_0^1 \omega(\xi) G(s,t,\xi,0) R(x,y,\xi,0) d\xi ds dt \\ + \int_0^y \psi_2(\eta) \left[G(x,y,1,\eta) + \int_\eta^y \int_0^1 G(s,t,1,\eta) R(x,y,1,\eta) ds dt \right] d\eta, \end{gathered} \tag{1.101}$$

$$K_1(x,y,\eta) = G(x,y,0,\eta) + \int_\eta^y \int_0^1 G(s,t,0,\eta) R(x,y,0,\eta) ds dt, \tag{1.102}$$

$R(x,y,\xi,\eta)$ - резольвента ядра $\lambda G(x,y,\xi,\eta)$.
Из (1.100), устремив x к 0^+, мы получим

$$u(0^+, y) = \tau^+(y) = P(0^+, y) - \int_0^y \nu^-(\eta) K_1(0^+, y, \eta) d\eta. \tag{1.103}$$

Учитывая функциональное соотношение (1.96), из (1.103) имеем

$$\nu^+(y) + \int_0^y \nu^+(\eta) K_1(y,\eta) d\eta = \psi_1^*(y) - P(0,y). \tag{1.104}$$

Равенство (1.104) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно функции $\nu^+(y)$. Так как ядро $K_1(y,\eta)$ имеет слабую особенность и правая сторона непрерывно дифференцируемая, то мы можем заключать, что (1.104) - однозначно разрешима [61], и его решение представимо в виде

$$\nu^{+}(y)=\Psi(y)+\int_0^y \Psi(\eta)K_2(y,\eta)d\eta$$

где $\Psi(y)=\psi_1^*(y)-P(0,y), K_2(y,\eta)$ - резольвента ядра $K_1(y,\eta)$.

После нахождения функции $\nu^{+}(y)$, учитывая (1.96) или (1.103) мы можем найти функцию $\tau^{+}(y)$. Потом, используя условия склеивания (1.86)- (1.87) мы находим функции $\tau^{-}(y),\nu^{-}(y)$. Наконец, решение задачи AT в области Ω_1 определим по формуле (1.100), а в области Ω_2 по формуле (1.88). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.9. Если

$$\omega(x)\in C^2[0,1],\psi_i(y)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)(i=1,2),$$

то существует единственно решение задачи AT и определяется формулой (1.100) и (1.88) в областях Ω_1, Ω_2, соответственно.

2 Аналог задачи Геллерстеда для параболо-гиперболического уравнения с дифференциальным оператором дробного порядка

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{0y}^{\alpha}u-\lambda u, \Phi_0 \\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda u, \Phi_i (i=1,2) \end{cases} \tag{1.105}$$

в области $\Phi=\left(\bigcup_{k=0}^{2}\Phi_k\right)\cup \mathrm{I}_0$, где Φ_0 - область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0, x=1, y=1$ соответственно; Φ_1 - область, ограниченная сегментом AE оси x и характеристиками $AC_1: x+y=0, EC_1: x-y=r$ уравнения (1.105); Φ_2 - область, ограниченная отрезком EB оси x и характеристиками $EC_2: x-y=r, BC_2: x-y=1$ уравнения (1.105); I_0 - интервал $0<x<1$, I_1 - интервал $0<x<r$, а I_2 - интервал $r<x<1$.

Задача AG. Найти решение уравнения (1.105) из класса

$$W_2=\left\{u: D_{0y}^{\alpha-1}u\in C\left(\overline{\Phi_0}\right), u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Phi_0), u\in C\left(\overline{\Phi_i}\right)\cap C^2(\Phi_i)(i=1,2)\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{1.106}$$

$$u\big|_{AC_1}=u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\varphi_3(x),\ \ 0\le x\le r, \tag{1.107}$$

$$u\big|_{EC_2} = u\left(\frac{x+r}{2}, \frac{r-x)}{2}\right) = \varphi_4(x),\ r \le x \le 1 \tag{1.108}$$

и условиям склеивания

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau^+(x),\ \lim_{y\to 0^-} u(x,y) = \tau^-(x), x \in \overline{\mathrm{I}_0}, \tag{1.109}$$

$$\lim_{y\to 0^+}\left[y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y\right] = \nu^+(x),\ \lim_{y\to 0^-} u_y(x,y) = \nu^-(x), x \in \mathrm{I}_0. \tag{1.110}$$

Здесь $\varphi_j(\cdot)\left(j=\overline{1,4}\right)$ - заданные функции, причем $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha}\varphi_1(y) = \varphi_3(0)$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha}u(r,y) = \varphi_4(r)$.

Теорема 1.10. Если выполняются следующие условия

$$\lambda \ge 0, \varphi_i(y) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1), \varphi_j(x) \in C^1\left(\overline{\mathrm{I}_i}\right) \cap C^2(\mathrm{I}_i)(i=1,2;\ j=3,4)$$

то задача AG имеет единственное решение.

Доказательство: Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau^+(x),\ \lim_{y\to-0} u(x,y) = \tau^-(x),\ x \in \overline{\mathrm{I}_0},\\
&\lim_{y\to+0}\left[y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y\right] = \nu^+(x),\ \lim_{y\to-0} u_y(x,y) = \nu^-(x),\ x \in \mathrm{I}_0.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1.105) в областях $\Phi_i\,(i=1,2)$ в случае $\lambda \ge 0$ имеет следующий вид

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\tau^-(x+y) + \tau^-(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \nu^-(t) J_0\left[\sqrt{\lambda\left[(x-t)^2 - y^2\right]}\right]dt + \right. \tag{1.112}$$

$$\left. + \lambda y \int_{x-y}^{x+y} \tau^-(t) \frac{J_1\left[\sqrt{\lambda\left[(x-t)^2 - y^2\right]}\right]}{\sqrt{\lambda\left[(x-t)^2 - y^2\right]}}dt\right\}$$

Используя краевые условия (1.107), (1.108) и условия склеивания (1.109), (1.110), из (1.112) получим

$$\nu^+(x) = \tau^+(x) + \varphi_3^*(x),\ x \in \mathrm{I}_1, \tag{1.113}$$

$$\nu^+(x) = \tau^+(x) + \varphi_3^*(x),\ x \in \mathrm{I}_2, \tag{1.114}$$

где

$$\varphi_3^*(x)=\varphi_3(0)-A_{0x}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[2\varphi_3(x)\right],\varphi_4^*(x)=\varphi_4(r)-A_{rx}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[2\varphi_4(x)\right]$$

Устремляя y к нулю, из уравнения (1.105) получим

$$\nu^+(y)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\tau^{+''}(x)-\lambda\tau^+(x)\right]. \qquad (1.115)$$

Для доказательства единственности решения задачи AG, нам нужно оценить следующий интеграл:

$$\mathbf{I}=\int_0^1\tau^+(x)\nu^+(x)dx. \qquad (1.116)$$

Учитывая однородный случай условия (1.106) и принимая во внимание обозначение (1.111), после несложных преобразований имеем

$$\mathbf{I}=-\int_0^1\left\{\left[\tau^{+'}(x)\right]^2+\lambda\left[\tau^+(x)\right]^2\right\}dx. \qquad (1.117)$$

Если $\lambda\geq 0$, тогда $\mathbf{I}\leq 0$. С другой стороны, если будем учитывать однородные случаи равенств (1.113) и (1.114), то легко можно убедиться, что $\mathbf{I}\geq 0$. Поэтому, мы можем заключить, что $\mathbf{I}\geq 0$. Основываясь на (1.117) можем утвердить, что $\tau^+(x)=0$ для $x\in\overline{\mathrm{I}_0}$. Из решения первой краевой задачи следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Phi_0}$. Далее, основываясь на решениях задачи Коши в гиперболических частях рассматриваемой области получим, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Phi}$.

Учитывая функциональные соотношения (1.113)- (1.114) и условия (1.106)-(1.108), мы получим следующие задачи:

$$\begin{cases}\tau^{+''}(x)-(\lambda+\Gamma(1+\alpha))\tau^+(x)=\varphi_3^*(x)\Gamma(1+\alpha),\\ \tau^+(0)=\varphi_3(0),\tau^+(r)=\varphi_4(r),x\in\overline{\mathrm{I}_1},\end{cases} \qquad (1.118)$$

и

$$\begin{cases}\tau^{+''}(x)-(\lambda+\Gamma(1+\alpha))\tau^+(x)=\varphi_4^*(x)\Gamma(1+\alpha),\\ \tau^+(r)=\varphi_4(r),\tau^+(1)=\lim\limits_{y\to+0}y^{1-\alpha}\varphi_2(y),x\in\overline{\mathrm{I}_1}.\end{cases} \qquad (1.119)$$

Задачи (1.118) и (1.119) являются модельными задачами и решаются легко. После нахождения функции $\tau^+(x)$ при $x\in\overline{\mathrm{I}_0}$, функции $\nu^+(x)$ и $\tau^-(x),\nu^-(x)$ могут быть найдены с помощью формул (1.115) и (1.109), (1.110) соответственно. Теорема 1.10 доказана.

2 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В данном разделе исследуются локальные краевые задачи, а также задача Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.

2.1 Сильная разрешимость краевых задач для гиперболического уравнения третьего порядка

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная отрезком $AB: 0 \le x \le 1$ оси ó = 0, а при y<0 двумя характеристиками ÀÑ: õ + ó = 0 и ÂÑ: õ − ó = 1 гиперболического уравнения третьего порядка с простыми характеристиками

$$Lu = f(x, y) \tag{2.1}$$

где

$$Lu = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} - u_{yy}\right)$$

Задача Коши. Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2.2}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2.3}$$

$$u_{yy}(x,0) = \mu(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2.4}$$

Здесь τ(x), ν(x) и μ(x)- заданные функции.

Задача Гурса. Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям

$$u(x, y)\big|_{AC \cup BC} = 0, \tag{2.5}$$

$$u_y(x, y)\big|_{AC \cup BC} = 0$$

Задача Дарбу. Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = u_y(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \tag{2.6}$$

$$(u_x + u_y)\big|_{AC} = 0, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \tag{2.7}$$

$$(u_x - u_y)\big|_{BC} = 0, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \tag{2.8}$$

Задача Коши- Гурса 1 (Дарбу 1). Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям (2.6)

$$u(x,y)\big|_{AC} = u(x,-x) = 0, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

Задача Коши- Гурса 2 (Дарбу 2). Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям (2.7) и (2.9)

$$u_y(x,0) = 0$$

Задача Коши- Гурса 3 (Дарбу 3). Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям (2.9) и

$$u(x,0) = u_{yy}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

Задача Коши- Гурса 4 (Дарбу 4). Найти решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям (2.5) и

$$u_y(x,0) = u_{yy}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

Задача Коши и Гурса для линейного гиперболического уравнения третьего порядка общего вида изучены в [62]. В данном подразделе решение задачи Коши для уравнения (2.1) приводится удобной форме для дальнейшего рассмотрения.

Решение u(x,y) уравнения (2.1) будем называть регулярным, если функция u(x,y) обладает непрерывными производными, входящими оператор L.

Функцию $u(x,y) \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением рассматриваемой задачи, если существует последовательность регулярных решении $\{u_n\}$ этой задачи (u_n удовлетворяет соответствующие краевые условия), такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к $u(x,y)$ и $f(x,y)$.

Через $W_2^l(\Omega)$ - обозначим пространство С.Л.Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$; $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ - пространство квадратично суммируемых в Ω функций.

Используя общее решенеие $u(x,y) = f_1(x) + f_2(x-y) + f_3(x+y)$ уравнения (2.1), где f_i- произвольные гладкие функции, нетрудно установить справедливость следующих теорем

Теорема 2.1. Пусть $\tau(x), \upsilon(x) \in C^2[0,1]$, $\mu(x) \in C^1[0,1]$ и $f(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (2.1) удовлетворяющее условиям (2.2)- (2.4) и оно представимо в виде

$$u(x,y)=\tau(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\upsilon(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x}(x+y-t)\mu(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x-y}(x-y-t)\mu(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}dy_1\int\limits_{x+y-y_1}^{x}(x_1+y_1-x-y)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}dy_1\int\limits_{x}^{x-y+y_1}(x-y-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1 \quad (2.10)$$

Теорема 2.2. Пусть $\tau(x)\in W_2^2(0,1)$, $\upsilon(x)\in W_2^1(0,1)$, $\mu(x)\in L_2(0,1)$ и $f(x,y)\in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное сильное решение задачи Коши и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\le C[\|\tau\|_{W_2^2(0,1)}+\|\upsilon\|_{W_2^1(0,1)}+\|\mu\|_{L_2(0,1)}+\|f\|_{L_2(\Omega)}]$$

где С- означает положительную постоянную не зависящий от $u(x,y)$.

Используя формулу (2.10) можно установить теоремы о разрешимости сформулированных задач. Исследуем задачу Дарбу 1.

Из формулы (2.10), когда $\tau(x)=\upsilon(x)=0$, в силу условия (2.9), имеем

$$\int\limits_0^x t\mu(t)dt+\int\limits_x^{2x}(2x-t)\mu(t)dt=2F(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2} \quad (2.11)$$

где $F(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{0}dy_1\int\limits_{-y_1}^{x}(x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1-\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{0}dy_1\int\limits_{x}^{2x+y_1}(2x-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1$

После двукратного дифференцирования (2.11), получим

$$\mu(t)-\frac{1}{2}\mu\left(\frac{t}{2}\right)=F''\left(\frac{t}{2}\right),\ 0\le t\le 1 \quad (2.12)$$

Таким образом, исследуемая задача в смысле однозначной разрешимости эквивалентно редуцирована к функциональному уравнению (2.12).

Непосредственным вычислением, нетрудно установить справедливость следующих лемм.

Лемма 2.1. Если $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$, то $F''(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]$

Лемма 2.2. Пусть $F(x)\in C^3\left[0,\frac{1}{2}\right]$, тогда существует единственное решение уравнения (2.12) из класса $C^1[0,1]$

Доказательство леммы 2.2 следует из результатов работы [63]. Отметим, что в работах [63-65] изучены более общие функциональные уравнения.

Теорема 2.3. Для любой функций $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи Коши – Гурса 1 (Дарбу 1).

Доказательство теоремы 2.3 следует из лемм 2.1-2.2.

Теорема 2.4. Для любой функции $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи Коши - Гурса 1 (Дарбу 1). Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{2.13}$$

Доказательство корректности выше сформулированных задач можно провести аналогично

Теорема 2.5. а) Для любой функций $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи Дарбу (2.1), (2.6)- (2.8). Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и оно удовлетворяет неравенству (2.13).

б) Для любой функций $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи Дарбу (2.1), (2.6)- (2.8) из класса $W_2^2(\Omega)$ и оно удовлетворяет неравенству (2.13).

Любое регулярное решение уравнения (2.1) можно представит в виде

$$\begin{gathered}
u(x,y)=\tau(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x}(x+y-t)\mu(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x-y}(x-y-t)\mu(t)dt+ \\
+\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}dy_1\int\limits_{x+y-y_1}^{x}(x_1+y_1-x-y)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}dy_1\int\limits_{x}^{x-y+y_1}(x-y-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1
\end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\begin{aligned}
&u(x,0)=\tau(x), \qquad 0\le x\le 1\\
&u_y(x,0)=\nu(x), \quad 0\le x\le 1\\
&u_{yy}(x,0)=\mu(x), \quad 0\le x\le 1
\end{aligned}$$

Используя формулу (2.14) докажем теорему 2.5.

Доказательство теоремы 2.5. В (2.14) пологая $\tau(x)=\nu(x)\equiv 0$ непосредственным вычислением имеем

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+y}\mu(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x-y}\mu(t)dt-\int\limits_{0}^{x}\mu(t)dt+\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \tag{2.15}$$

$$u_y(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x+y}\mu(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^{x-y}\mu(t)dt+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{2.16}$$

где

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int_y^0 dy_1\int_{x+y-y_1}^{x}(x_1+y_1-x-y)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int_y^0 dy_1\int_x^{x-y+y_1}(x-y-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1 \tag{2.17}$$

Из (2.15)- (2.16) в силу (2.7) и (2.8) после дифференцирования получим

$$\mu(x)=\frac{d}{dx}\left[\left.\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}\right],\qquad 0\le x\le\frac{1}{2}$$

$$\mu(x)=\frac{d}{dx}\left[\left.\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)\right|_{y=x-1}\right],\qquad \frac{1}{2}\le x\le 1$$

Из (2.17) непосредственным вычислением имеем

$$\frac{d}{dx}\left[\left.\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}\right]=-\int_{-x}^{0}f(x,y_1)dy_1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left.\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)\right|_{y=x-1}\right]=-\int_{x-1}^{0}f(x,y_1)dy_1$$

Таким образом

$$\mu(x)=\begin{cases}-\int_{-x}^{0}f(x,y_1)dy_1, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\[2ex] -\int_{x-1}^{0}f(x,y_1)dy_1, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases} \tag{2.18}$$

Теперь из последнего нетрудно установить, что $\mu(x)\in C^1[0,1]$ если $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$. Отсюда в силу формулы (2.14), (когда $\tau(x)=\nu(x)\equiv 0$) получим $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$ и оценку (2.13). Пункт a) теоремы 2.5 доказана. Теперь докажем сильную разрешимость задачи Дарбу (2.1), (2.6)-(2.8).

Из (2.18) легко получаем, что $\mu(x)\in L_2(0,1)$ и

$$\|\mu(x)\|_{L_2(0,1)} \le C\| f(x,y)\|_0$$

если $f(x,y)\in L_2(\Omega)$

С учетом последнего из формулы (2.14), используя известные неравенство Коши- Буняковского непосредственным вычислением получаем справедливость оценки (2.13). Далее при наличии оценки (2.13) сильная разрешимость задачи Дарбу (2.1), (2.6)- (2.8) доказывается стандартным методом. Теорема 2.5 доказано полностью.

Используя формулу (2.10) по аналогичной схеме можно установить теоремы о разрешимости сформулированных задач.

2.2 Сильная разрешимость задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка

Данный подраздел посвящен изучению корректности задачи типа Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.

Пусть $\Omega\subset R^2$ - конечная область, ограниченная отрезком $AB: 0\le x\le 1$ оси $ó=0$ и характеристиками $ÀÑ: õ+ó=0$ и $ÂÑ: õ-ó=1$ гиперболического уравнения

$$Lu = f(x,y) \tag{2.19}$$

где

$$Lu=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx}-u_{yy}\right)$$

Для уравнения (2.19) сформулируем и докажем корректность одной локальной задачи.

Задача D. Найти решение уравнения (2.19) удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad 0\le x\le 1 \tag{2.20}$$

$$u(x,y)\big|_{AC\cup BC}=0 \tag{2.21}$$

Вопросам разрешимости краевых задач для уравнений гиперболического типа посвящены многочисленные работы. Достаточно полный обзор полученных результатов по гиперболическим уравнениям содержится в книгах А.В. Бицадзе [6], А.М. Нахушева [14], М.С. Салахитдинова [12] и других. В большинстве своем, это были работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектом уравнений гиперболического типа второго порядка.

Локальные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка исследовано в работе Б.М. Айбекова [66].

Близкие задачи рассмотренные в данной работе для гиперболического уравнения второго порядка в областях с отходом от характеристики изучены в работе М.А. Садыбекова [64], а для параболо-гиперболического уравнения в работе М.С. Салахитдинова и А.С. Бердышева [65].

Функцию $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ называют регулярным решением задачи D, если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (2.19) в области Ω и в этой области удовлетворяет уравнению (2.19) и краевым условиям (2.20), (2.21).

Через W – обозначим множество функции из класса $u_{xxy},\ u_{yyy}\in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяющих условиям (2.20), (2.21).

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи D, если существует последовательность функции $u_n(x,y)\in W$ такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к $u(x,y)$ и $f(x,y)$.

Через $W_2^l(\Omega)$ - обозначим пространство С.Л.Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$; $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$ - пространство квадратично суммируемых в Ω функций.

Основным результатом подраздела является следующие теоремы:

Теорема 2.6 Для любой функции $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи D и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_2 \le C\|f\|_0 \tag{2.22}$$

и представимо в виде

$$u(x,y)=\iint\limits_{\Omega} K(x,y,x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{2.23}$$

где $K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$.

В (2.22) и в дальнейшем через C будем обозначать положительную постоянную, не зависящую от $u(x,y)$, не обязательно одну и ту же.

Теорема 2.7 Для любой функции $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи D. Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству (2.22) и может быть представлено в виде (2.23).

Доказательство теоремы 2.7**:** Нетрудно, установить, что решение уравнения (2.19), удовлетворяющее условиям (2.21), в области Ω имеет вид

$$u(\xi,\eta)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\eta}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\xi+1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\int_0^{\xi}d\xi_1\int_{\eta}^{1}d\eta_1\int_0^{\frac{\xi_1-\eta_1}{2}} f\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},z\right)dz, \tag{2.24}$$

где $\xi = x + y,\ \ \eta = x - y,\ \ u(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right),\ \ \varphi(x)$ - произвольная функция из класса $C^3[0,1]$. Не ограничивая общности можно предполагать, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиями

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Удовлетворяя в (2.24) условию (2.20), имеем

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \varphi(t) + \varphi\left(\frac{t+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\int_0^t d\xi \int_t^1 d\eta \int_0^{\frac{\xi-\eta}{2}} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, z\right) dz \tag{2.25}$$

Дифференцируя (2.25) дважды получим

$$\varphi''(t) = \frac{1}{4}\varphi''\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{4}\varphi''\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) + F(t),\ \ 0 \le t \le 1 \tag{2.26}$$

где

$$\begin{gathered} 8F(t) = \int_t^1 f\left(\frac{t+\eta}{2}, \frac{t-\eta}{2}\right) d\eta + \int_0^t f\left(\frac{\xi+t}{2}, \frac{\xi-t}{2}\right) d\xi + \\ + \int_t^1 d\eta \int_0^{\frac{t-\eta}{2}} f_t'\left(\frac{t+\eta}{2}, z\right) dz - \int_0^t d\xi \int_0^{\frac{\xi-t}{2}} f_t'\left(\frac{\xi+t}{2}, z\right) dz \end{gathered} \tag{2.27}$$

Лемма 2.1. Если $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, тогда $F(t) \in C^1[0,1]$

Доказательство леммы 2.1.: В представлении функций $F(t)$ в (2.27) преобразуем третий и четвертый слагаемые следующим образом.

$$\begin{gathered} \int_0^t d\xi \int_0^{\frac{\xi-t}{2}} f_t'\left(\frac{\xi+t}{2}, z\right) dz = \int_{-\frac{t}{2}}^0 dz \int_0^{t+2z} f_t'\left(\frac{\xi+t}{2}, z\right) d\xi = 2\int_{-\frac{t}{2}}^0 dz \int_0^{t+2z} \frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\frac{\xi+t}{2}, z\right) d\left(\frac{\xi+t}{2}\right) = \\ = 2\int_{-\frac{t}{2}}^0 \left[f\left(\frac{\xi+t}{2}, z\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=t+2z} \right] dz = 2\int_{-\frac{t}{2}}^0 [f(t+z,\ z) - f(\frac{t}{2},\ z)] dz, \end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\int_t^1 d\eta \int_0^{\frac{t-\eta}{2}} f_t'\left(\frac{t+\eta}{2}, z\right)dz = \int_{\frac{t-1}{2}}^0 dz \int_{t-2z}^1 f_t'\left(\frac{t+\eta}{2}, z\right)d\eta = 2\int_{\frac{t-1}{2}}^0 dz \int_{t-2z}^1 \frac{\partial}{\partial\eta} f\left(\frac{t+\eta}{2}, z\right)d\left(\frac{\eta+t}{2}\right) =$$

$$= 2\int_{\frac{t-1}{2}}^0 \left[f\left(\frac{t+\eta}{2}, z\right)\Bigg|_{\eta=t-2z}^{\eta=1} \right]dz = 2\int_{\frac{t-1}{2}}^0 \left[f\left(\frac{t+1}{2}, z\right) - f(t-z, z)\right]dz \tag{2.29}$$

Теперь из выражения (2.27) и с учетом вышеприведенных вычислений, нетрудно установить справедливость леммы 2.1.

Лемма 2.2. Если $F(t)\in C^1[0,1]$ то существует единственное решение уравнения (2.26) из класса $C^1[0,1]$

Доказательство леммы 2.2: Введем в рассмотрение оператор, действующий по формуле

$$A\theta(t) = \frac{1}{4}\left[\theta\left(\frac{t}{2}\right) + \theta\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\right], \tag{2.30}$$

где

$$\varphi''(t) = \theta(t) \tag{2.31}$$

Нетрудно убедиться, что

$$A^n\theta(t) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\theta\left(\frac{t+k}{2^n}\right) \tag{2.32}$$

С учетом (2.30) и (2.31) уравнение (2.26) запишем в виде

$$[E-A]\theta(t) = F(t), 0\le t\le 1 \tag{2.33}$$

где *E*- тождественный оператор.

Нетрудно установить, что оператор

$$B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{2.34}$$

является формально обратным к оператору $B = E - A$. Поэтому покажем, непрерывность оператора $B^{-1} = (E-A)^{-1}$ в соответствующем пространстве C[0,1].

Из (2.32) методом математической индукции, нетрудно установить, что

$$\left\|A^n\theta(t)\right\|_{C[0,1]} \le \frac{1}{2^n}\max_{0\le t\le 1}\left|\theta(t)\right| = \frac{1}{2^n}\left\|\theta(t)\right\|_{C[0,1]} \tag{2.35}$$

Поэтому

$$\left\|A^n\right\|_{C[0,1]\to C[0,1]} \le \frac{1}{2^n}. \tag{2.36}$$

следовательно, в силу (2.34)

$$\left\|B^{-1}\right\|_{C[0,1]\to C[0,1]} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

что и показывает непрерывность оператора B^{-1} в пространстве $C[0,1]$.

Рассмотрим теперь уравнение (2.33) в $C^1[0,1]$. Очевидно, что если $F(t)\in C^1[0,1]$, то дифференцируя уравнение (2.33) мы получим, аналогичное уравнение $\theta'(t)$, однозначный разрешимость в пространстве $C[0,1]$ устанавливается точно также как и выше. Лемма 2.2 доказано.

Таким образом, в силу леммы 2.1 и 2.2, мы установили, что если $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$ то $\varphi(x)\in C^3[0,1]$. Тогда из представления (2.24) мы получим регулярную разрешимость задачи D. С учетом (2.28) и (2.29) из (2.27) нетрудно, доказать справедливость следующей леммы.

Лемма 2.3. Если $f(x,y)\in L_2(\Omega)$, то $F(t)\in L_2(0,1)$ и

$$\left\|F(t)\right\|_{L_2(0,1)} \le C\left\|f(x,y)\right\|_{L_2(\Omega)}$$

Лемма 2.4. Если $F(t)\in L_2(0,1)$, то существует единственное решение уравнения (2.33) из класса $L_2(0,1)$ и оно удовлетворяет неравенству

$$\left\|\theta(t)\right\|_{L_2(0,1)} \le C\left\|F(t)\right\|_{L_2(0,1)} \tag{2.37}$$

Доказательство леммы 2.4: Рассмотрим уравнение (2.33) в пространстве $L_2(0,1)$. Из (2.32) непосредственным вычислением нетрудно, убедится, что

$$\left\|A^n\theta(t)\right\|_{L_2(0,1)} = \frac{1}{2^{2n}}\left[\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\theta\left(\frac{t+k}{2^n}\right)\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\int_0^1\theta^2\left(\frac{t+k}{2^n}\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left\|\theta(t)\right\|_{L_2(0,1)} \le \frac{1}{2^n}\left\|\theta(t)\right\|_{L_2(0,1)}$$

поэтому

$$\left\| A^n \right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \le \frac{1}{2^n}$$

Отсюда в силу (2.34) следует ограниченность оператора B^{-1} в $L_2(0,1)$ и справедливость оценки (2.37). Это и доказывает лемму 4.

В силу леммы 2.3 и 2.4 из (2.24) нетрудно показать справедливость оценки (2.22) если $f(x,y)\in L_2(\Omega)$. Для завершения доказательства теоремы 1.6 покажем, что решение задач D представим в виде (2.23).

Действительно, в силу (2.30)- (2.32) из (2.33) имеем

$$\varphi''(t) = B^{-1}F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^{2^k-1} F\left(\frac{t+i}{2^k}\right)$$

Отсюда, с учетом $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ и (2.2.12) имеем

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^{2^k-1} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{t} (t-z) F\left(\frac{z+i}{2^k}\right) dz \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^{2^k-1} \left(\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{t} (t-z) dz \left[\int_{\frac{z+i-2^k}{2^{k+1}}}^{0} f\left(\frac{z+i+2^k}{2^{k+1}}, y_1\right) dy_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-\frac{z+i}{2^{k+1}}}^{0} f\left(\frac{z+i}{2^{k+1}}, y_1\right) dy_1 \right]\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^{2^k-1} \left(\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{t} (t-z) dz \int_{\frac{z+i-2^k}{2^{k+1}}}^{0} f\left(\frac{z+i+2^k}{2^{k+1}}, y_1\right) dy_1 + \right. \tag{2.38}$$

$$\left. + \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{t} (t-z) dz \int_{-\frac{z+i}{2^{k+1}}}^{0} f\left(\frac{z+i}{2^{k+1}}, y_1\right) dy_1 \right)$$

Теперь поставляя (2.38) в (1.24), после некоторых преобразовании имеем (2.23), где

$$
\begin{aligned}
K(x,y,x_1,y_1) = {} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=0}^{2^k-1} \Bigg\{ \Bigg[\theta\left(y_1 - \frac{1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+i-2^k}{2^{k+1}} - y_1\right) + \\
& + \theta\left(y_1 - \frac{x+i-2^k}{2^{k+1}}\right) \theta\left(\frac{x+i+2^k}{2^{k+1}} - x_1\right)\Bigg] \theta\left(x_1 - \frac{1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) x + \left[\theta\left(y_1 + \frac{x+i}{2^{k+1}}\right) \theta\left(-\frac{1+2i}{2^{k+2}} - y_1\right) + \right. \\
& \left. + \theta\left(y_1 + \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(x_1 - \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right)\right] \theta\left(\frac{x+i}{2^{k+1}} - x_1\right) x + \frac{1}{2}\left[\theta\left(y_1 - \frac{1+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x-y+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}} - y_1\right) + \right. \\
& \left. \theta\left(y_1 - \frac{x-y+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x-y+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}} - x_1\right)\right] \theta\left(x_1 - \frac{1+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}}\right)(x-y) + \\
& + \frac{1}{2}\left[\theta\left(y_1 + \frac{x-y+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(-\frac{1+2i}{2^{k+2}} - y_1\right) + \theta\left(y_1 + \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(x_1 - \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right)\right] \theta\left(\frac{x-y+2i}{2^{k+2}} - x_1\right)(x-y) + \\
& + \frac{1}{2}\left[\theta\left(y_1 - \frac{1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+y+1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}} - y_1\right) + \right. \\
& \left. + \theta\left(y_1 - \frac{x+y+1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+y+1+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}} - x_1\right)\right] \theta\left(x_1 - \frac{1+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}}\right)(x+y+1) + \\
& + \frac{1}{2}\left[\theta\left(y_1 + \frac{x+y+1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(-\frac{1+2i}{2^{k+2}} - y_1\right) + \theta\left(y_1 + \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(x_1 - \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right)\right] \theta\left(\frac{x+y+1+2i}{2^{k+2}} - x_1\right)(x+y+1) + \\
& + \left[\theta\left(y_1 - \frac{1+2i-2^{k+1}}{2^{k+1}}\right) \theta\left(\frac{x+i-2^k}{2^{k+1}} - y_1\right) + \theta\left(y_1 + \frac{1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x-y+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}} - y_1\right) \right. \\
& \left. + \theta\left(y_1 - \frac{1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+y+1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}} - y_1\right)\right] \theta\left(x_1 - \frac{1+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}}\right)(-2^{k+1}x_1 + 2^k + i) + \\
& + \left[\theta\left(y_1 - \frac{x+i-2^k}{2^{k+1}}\right) \theta\left(\frac{x+i-2^k}{2^{k+1}} - x_1\right) + \theta\left(y_1 - \frac{x-y+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x-y+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}} - x_1\right) \right. \\
& \left. + \theta\left(y_1 - \frac{x+y+1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+y+1+2i-2^{k+1}}{2^{k+2}} - x_1\right)\right] \theta\left(x_1 - \frac{1+2i+2^{k+1}}{2^{k+2}}\right)(-2^{k+1}x_1 + 2^k + i) + \\
& + \left[\theta\left(y_1 - \frac{x+i}{2^{k+1}}\right) \theta\left(\frac{x+i}{2^{k+1}} - x_1\right) + \theta\left(y_1 + \frac{x-y+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x-y+2i}{2^{k+2}} - x_1\right) + \right. \\
& \left. + \theta\left(y_1 + \frac{x+y+1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+y+1+2i}{2^{k+2}} - x_1\right)\right] \theta\left(-\frac{1+2i}{2^{k+2}} - y_1\right)(-2^{k+1}x_1 + i) + \\
& + \left[\theta\left(x_1 - \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+i}{2^{k+1}} - x_1\right) + \theta\left(x_1 - \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x-y+2i}{2^{k+2}} - x_1\right) + \right. \\
& \left. + \theta\left(x_1 - \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right) \theta\left(\frac{x+y+1+2i}{2^{k+2}} - x_1\right)\right] \theta\left(y_1 + \frac{1+2i}{2^{k+2}}\right)(-2^{k+1}x_1 + i) \Bigg\} + \\
& + \left[\theta\left(\frac{1}{2} - x_1\right)(x_1 + y_1) + \theta\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)(1 - x_1 + y_1)\right] \theta\left(-\frac{x-y}{2} - y_1\right) + \\
& + \left[\theta(x_1 - y_1 - x + y) \theta\left(\frac{x-y}{2} - x_1\right)(x_1 - y_1 - x + y) + \theta\left(x_1 - \frac{x-y}{2}\right) \theta(-y_1 - x_1)(x_1 + y_1)\right] \theta\left(y_1 + \frac{x-y}{2}\right) + \\
& + \left[\theta(x_1 + y_1 - x - y) \theta\left(\frac{x+y+1}{2} - x_1\right)(x_1 + y_1 - x - y) + \theta\left(x_1 - \frac{x+y+1}{2}\right)(1 - x_1 + y_1)\right] \theta\left(y_1 - \frac{x+y-1}{2}\right) + \\
& + [\theta(x_1 - y_1 - x + y) \theta(x - x_1)(x_1 - y_1 - x + y) + \theta(x_1 - x) \theta(x + y - y_1 - x_1)(x_1 + y_1 - x - y)] \theta(y_1 - y)
\end{aligned}
$$

Теорема 2.6 доказано полностью.

Для доказательства теоремы 2.7 покажем, что найденное при $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ решение задачи D является сильным.

Заметим, что в силу результатов лемм 2.3- 2.4 и представления решения по формуле (2.24) следует выполнение неравенства (2.22) при всех $f(x,y)\in L_2(\Omega)$. Из оценки (2.22) следует также единственность сильного решения задачи D. В силу плотности в $L_2(\Omega)$ множества

$$C_0^1(\overline{\Omega})=\left\{ f(x,y): f(x,y)\in C^1(\Omega),\ f\big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\partial\Omega}\right\}$$

где $\partial\Omega$ граница области Ω, для любой функций $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует последовательность $f_n(x,y)\in C_0^1(\Omega)$, такая что $\| f_n(x,y)-f(x,y)\|_0\to 0$ при $n\to\infty$.

Через $u_n(x,y)$ обозначим регулярное решение задачи D для уравнения (2.19) с правой частью $f_n(x,y)$, а через $\varphi_n(t)$решения уравнения (2.26).

Здесь $F_n(t)$ отличается от функции $F(t)$ тем, что вместо $f(x,y)$ надо писать $f_n(x,y)$.

В силу леммы 2.1 и 2.2 имеем $\varphi_n(t)\in C^3[0,1]$, следовательно, согласно формуле (2.24) получаем $u_n(x,y)\in W$ при всех $f_n(x,y)\in C_0^1(\Omega)$.

В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ последовательность $f_n(x,y)$ будет фундаментальной. Из линейности уравнения (2.19) и оценки (2.22) получаем, что

$$\|u_n-u_m\|_2\le C\| f_n(x,y)-f_m(x,y)\|_0,$$

то есть последовательность $\{u_n(x,y)\}$ будет фундаментальной в $W_2^1(\Omega)$. Принимая во внимание полноту пространства $W_2^2(\Omega)$, получаем, что существует единственный предел $u\in W_2^2(\Omega)$ последовательности $\{u_n(x,y)\}$, который и будет искомым сильным решением задачи D для уравнения (2.19) с правой частью $f(x,y)\in L_2(\Omega)$. Теорема 2.7 доказано.

2.3 О неединственности решения аналога задачи Дарбу для гиперболического уравнения третьего порядка

Рассмотрим уравнение

$$Lu=f(x,y), \tag{2.39}$$

где

$$Lu=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx}-u_{yy}\right),$$

в области Ω ограниченная отрезком $AB: 0 \le x \le 1$ оси $y = 0$ и двумя характеристиками $AC: x + y = 0$ и $BC: x - y = 1$ гиперболического уравнения третьего порядка с простыми характеристиками

В предыдущем подразделе для уравнения (2.39) доказаны теоремы о регулярной и сильной разрешимости задачи Дирихле, т.е. следующей задачи: найти решение уравнения (2.39) удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y)\big|_{AB \cup AC \cup BC} = 0$$

Возникает вопрос в аналогии, с гиперболическими уравнениями второго порядка, можно ли поставить корректно аналог задачи Дарбу для уравнения (2.39), в частности можно ли краевое условие на АВ $u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$ заменить с условием

$$u_y(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача BN. Найти решение уравнения (2.39) удовлетворяющее условиям

$$u_y(x, y)\big|_{y=0} = 0, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{2.40}$$

$$u(x, y)\big|_{AC \cup BC} = 0 \tag{2.41}$$

Пусть $f(x, y) \equiv 0$. Тогда общее решение уравнения (2.39) удовлетворяющее условием (2.41) можно представить в виде

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(x + y) + \psi(x - y) \tag{2.42}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$-достаточно гладкие функций, причем не ограничивая общности можно предполагать $\psi(0) = \psi(1) = 0$. В (2.42) удовлетворяя условие (2.41) получим

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(2x) = 0, \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \\ \varphi(x) + \psi(2x - 1) = 0, \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

В этих уравнениях произведя замену переменных $2x = t, \quad 2x - 1 = t$, имеем

$$\begin{cases} \psi(t) + \varphi\left(\dfrac{t}{2}\right) = 0, & 0 \le t \le 1 \\ \\ \psi(t) + \varphi\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = 0, & 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.43}$$

Из (2.43) легко получить, что

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \varphi\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{2.44}$$

Пусть $\varphi(x)$ произвольная функция удовлетворяющая условие (2.44), тогда из (2.43) получим $\psi(t) = \varphi\left(\dfrac{t}{2}\right), \quad 0 \le t \le 1$

Подставляя найденное значение $\psi(t)$ в (2.42) получим

$$u(x, y) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\varphi(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \qquad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \tag{2.45}$$

Таким образом, мы установили, что однородная задача BN (2.39)-(2.41) при выполнении условия (2.44) имеет бесчисленное нетривиальное решение вида (2.45).

Отсюда, следует что для уравнения (2.39) краевое условие $\Big|_{AB} = 0$ сильнее (т.к. в этом случае задача однозначно разрешима) чем условие (2.40).

Поэтому рассмотрим следующую краевую задачу с дополнительными условиями.

Задача DN. Найти решение уравнения (2.39), удовлетворяющее краевым условиям (2.40), (2.41) и

$$(u_x + u_y)\Big|_{AC} = 0 \tag{2.46}$$

Нетрудно установить, что любое решение уравнения (2.39) удовлетворяющее условие (2.40) можно представить в виде

$$u(x, y) = \tau(x) - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x}(x + y - t)\mu(t)dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{x-y}(x - y - t)\mu(t)dt + F(x, y) \tag{2.47}$$

где $\tau(x) = u(x,0), \qquad \mu(x) = u_{yy}(x,0), \qquad 0 < x < 1$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int_y^0 dy_1 \int_{x+y-y_1}^{x}(x_1+y_1-x-y)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int_y^0 dy_1 \int_x^{x-y+y_1}(x-y-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1 \quad (2.48)$$

В (2.47) удовлетворяя условие (2.41), после двукратного дифференцирование имеем

$$\begin{cases} \tau''(x)+2\mu(2x)-\mu(x)+\dfrac{d^2}{dx^2}F(x,-x)=0, \quad 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ \\ \tau''(x)+2\mu(2x-1)-\mu(x)+\dfrac{d^2}{dx^2}F(x,x-1)=0, \quad \dfrac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases} \qquad (2.49)$$

Теперь в (2.47) удовлетворяя условию (2.46), получим

$$\tau'(x)-\int_0^x \mu(t)dt+\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}=0, \qquad 0<x<\frac{1}{2}$$

или

$$\tau''(x)-\mu(x)=-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F(x,-x)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,-x)}{\partial y}\right], \qquad 0<x<\frac{1}{2} \qquad (2.50)$$

Из первого уравнения (2.49) и (2.50). Легко находим, что

$$\mu(t)=R(t), \qquad 0\le t\le 1$$

где

$$R(t)=\frac{d}{dx}\left.\left[\frac{\partial F(x,-x)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,-x)}{\partial y}\right]\right|_{x=\frac{t}{2}}-\left.\frac{d^2}{dx^2}F(x,-x)\right|_{x=\frac{t}{2}}=$$

$$=-\int_{-\frac{t}{2}}^{0} f\left(\frac{t}{2},y_1\right)dy_1-2\int_{-\frac{t}{2}}^{0} f(t+y_1,y_1)dy_1+\int_{-\frac{t}{2}}^{0} f\left(\frac{t}{2},y_1\right)dy_1=-2\int_{-\frac{t}{2}}^{0} f(t+y_1,y_1)dy_1$$

После нахождения $\mu(t),\ t\in[0.,1]$ из (2.49) с учетом $\tau(0)=\tau'(0)=0$ однозначно находим $\tau(x)$.

Если $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$ то из вышеизложенного следует, что $\mu(t)\in C^1[0.,1]$ u $\tau(x)\in C^3[0.,1]$

Если $f(x,y)\in L_2(\Omega)$, то $\mu(t)\in L_2(0,1),\ \ \tau(x)\in W_2^2(0,1)$ и справедливо неравенство

$$\|\tau(x)\|_{W_2^2(0,1)}\le C\|f(x,y)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\mu(t)\|_{L_2(0,1)}\le \|f(x,y)\|_{L_2(\Omega)}$$

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л.Соболева со скалярным произведением $(,)$, и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$.

С учетом вышеизложенного справедливость следующей теоремы о сильной разрешимости задачи DN (2.39)-(2.41), (2.46) доказывается стандартным методом.

Теорема 2.8. Для любой функций $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи DN (2.39)-(2.41), (2.46). Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет оценке.

$$\|u\|_2 \le c\|f\|_0$$

2.4 О разрешимости краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка в области с характеристической границей.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) = f(x, y) \tag{2.51}$$

в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных x и y, ограниченной отрезком AB: y=0, 0<x<1 и при y<0 характеристиками AC: x+y=0, BC:x-y=1 уравнения (2.51)

Задача H: Найти решение уравнения (2.51) удовлетворяющее условиям

$$u_y(x, 0) + \alpha u_x(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{2.52}$$

$$u(x, y)\big|_{AC \cup BC} = 0 \tag{2.53}$$

Отметим, что вся граница области Ω (отрезки AB, BC, AC) являются характеристиками уравнения (2.51). Действительно, уравнение характеристик имеет вид

$$dy((dy)^2 - (dx)^2) = 0$$

Отсюда находим следующие три семейства характеристик уравнения y=const, x+y=const, x-y=const прямые y=0, x+y=0, x-y=1 являются характеристиками уравнения (2.51) и локальные условия задаются на этих характеристиках. Задача H в случае когда $\alpha = 0$ рассмотрена в работе [32]. Также, отметим что при $\alpha = \infty$ условие (2.52) имеет следующий вид

$$u_x(x,0) = 0 \text{ или } u(x,0)=0$$

и задачу H называют задачей Дирихле.

Поэтому задачу H (2.51)-(2.53) будем называть обобщенным задачей Дарбу- Дирихле

Основным результатом этого подраздела является следующая теорема.

Теорема 2.9. Пусть выполнены следующие условия

$$\alpha \neq \infty, \qquad \alpha \neq \pm 1 \tag{2.54}$$

Тогда для любой функций $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$ существует единственное регулярное решение обобщенной задачи Дарбу- Дирихле.

Под регулярным решением задачи Дарбу- Дирихле будем понимать функцию $u(x,y)$ принадлежащую классу $C^1(\overline{\Omega})$ и имеющие непрерывные производные в Ω участвующие в уравнении (2.51), являющиеся решением этого уравнения в Ω и удовлетворяющих краевым условиям (2.52), (2.53)

Заметим что, условия (2.54) теоремы 2.51 на α является существенным и при нарушений этих условий, утверждение теоремы не верно.

Например, если $\alpha = \infty$, ò.å. $\alpha^{-1} = 0$ то однородная задача Дирихле в области Ω имеет нетривиальное решение

$$u(x,y) = y(x+y)(x-y-1)$$

Впервые построенное О. Зикировым [62]

Докозательство теоремы 2.9. Из уравнения (2.51) в области Ω имеем

$$(u_{xx} - u_{yy}) = \int_{-y}^{x} f(t,y)\,dt + w(y) \tag{2.55}$$

где w(y)- произвольная функция из класса $C^1\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

В (2.55) сделаем замену переменных по формуле

$$\xi = x+y, \quad \eta = x-y$$

то имеем

$$-u_{\xi\eta} = f_0(\xi,\eta) + w_0(\xi-\eta) \tag{2.56}$$

где

$$u(x,\,y) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right); \qquad 4f_0(\xi,\eta) = \int_{-\frac{\xi-\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta}{2}} f\left(t, \frac{\xi-\eta}{2}\right)dt;$$

$$4w_0(t) = w\left(\frac{t}{2}\right)$$

Обозначим

$$u(x,0)=\tau(x), \quad u_y(x,0)=\nu(x) \tag{2.57}$$

Известно, что задача Коши (2.56)-(2.57) имеет единственное решение и представимо по формуле Даламбера.

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left[\tau(\xi)+\tau(\eta)-\int_{\xi}^{\eta}\nu(t)dt\right]-F(\xi,\eta)-\overline{w}(\xi,\eta) \tag{2.58}$$

где

$$F(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\eta} f_0(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 \tag{2.59}$$

$$\overline{w}(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\eta} w_0(\xi_1-\eta_1)\,d\eta_1 \tag{2.60}$$

При этом краевые условия (2.53) имеет вид

$$u(x,y)\big|_{AC}=u(\xi,\eta)\big|_{\xi=0}=0, \qquad u(x,y)\big|_{BC}=u(\xi,\eta)\big|_{\eta=1}=0 \tag{2.61}$$

В формуле (2.58) удовлетворяя условиям (2.61) имеем

$$\tau(0)+\tau(\eta)-\int_{0}^{\eta}\nu(t)dt=2F(0,\eta)+2\overline{w}(0,\eta) \tag{2.62}$$

$$\tau(\xi)+\tau(1)-\int_{\xi}^{1}\nu(t)dt=2F(\xi,1)+2\overline{w}(\xi,1) \tag{2.63}$$

Дифференцируя (2.62) и (2.63) имеем

$$\begin{cases}\tau'(t)-\nu(t)=2F'(0,t)+2\overline{w}'(0,t)\\ \tau'(t)+\nu(t)=2F'(t,1)+2\overline{w}'(t,1)\end{cases} \tag{2.64}$$

В силу (2.57) условие (2.52) преобразуется к виду

$$\nu(t)+\alpha\tau'(t)=0,\ 0<t<1 \tag{2.65}$$

Исключим из (2.64) и (2.65) функцию $\nu(t)$

$$\begin{cases}(1+\alpha)\tau'(t) = 2F'(0,t) + 2\overline{w}'(0,t) \\ (1-\alpha)\tau'(t) = 2F'(t,1) + 2\overline{w}'(t,1)\end{cases}$$

Из последних двух равенств имеем

$$\frac{1}{1-\alpha}\overline{w}'(t,1) - \frac{1}{1+\alpha}\overline{w}'(0,t) = \hat{O}(t) \tag{2.66}$$

где

$$\hat{O}(t) = \frac{1}{1+\alpha}F'(0,t) - \frac{1}{1-\alpha}F'(t,1) \tag{2.67}$$

из (2.66) с учетом обозначении (2.59) - (2.60) имеем

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(-\int_t^1 w_0(t-\eta_1)d\eta_1\right) - \frac{1}{1+\alpha}\left(\int_0^t w_0(\xi_1 - t)d\xi_1\right) = \Phi(t)$$

Отсюда, сначала дифференцируя, а затем после несложных преобазований имеем

$$\frac{1}{1-\alpha}w_0(t-1) - \frac{1}{1+\alpha}w_0(-t) = \Phi'(t),\ 0<t<1$$

В последнем сделаем инверсию t на 1-t. Тогда имеем

$$\begin{cases} w_0(t-1) - \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}w_0(-t) = (1-\alpha)\Phi'(t) \\ w_0(-t) - \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}w_0(-(1-t)) = (1-\alpha)\Phi'(1-t)\end{cases}$$

Отсюда однозначно, находим $w_0(-t)$ по формуле

$$w_0(-t) = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}\left[(1-\alpha)\Phi'(1-t) + \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha}\Phi'(t)\right]$$

После нахождения $w_0(t)$ неизвестные τ(x) и υ(x) легко находится из (2.64)

С учетом обозначении (2.59), (2.60) и (2.67) анализируя явные виды решении τ(x) и υ(x) легко установить, что решение задачи (2.51) - (2.53) определяемые по формуле (2.58) принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет краевым условиям (2.52) - (2.53)

Теорема 2.9. доказана.

3 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Раздел посвящен изучению краевых задач с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка.

3.1. Вольттеровость аналога задачи Трикоми для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка

Пусть $\Omega\subset R^2$ – конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=0$, $y=1$, $x=1$ соответственно, а при $y<0$ характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$ параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

$$Lu = f(x,y) \tag{3.1}$$

где

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} lu = \frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} u_x - u_{yy}, & y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}, & y<0. \end{cases}$$

Задача N1 Найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{AA_0\cup A_0B_0\cup AC} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AA_0\cup AC} = 0 , \tag{3.3}$$

и условиям склеивания

$$u_x(x,+0) = u_x(x,-0),\ u_y(x,+0) = \alpha u_y(x,-0) + \beta\int_0^x u_y(t,-0)Q(x,t)dt,\ 0<x<1. \tag{3.4}$$

где n - внутренняя нормаль, $\alpha,\beta = const$, такие что $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $Q(\cdot,\cdot)$ - заданная функция.

Задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с нехарактеристической линией изменения типа рассматривались в работах В.А.Елеева [67] (классическая разрешимость), Н.Ю.Капустина [68] (сильная разрешимость) и К.Б.Сабитова [69] (единственность решения задачи с комплексными коэффициентами).

Регулярная разрешимость, аналога задачи для уравнения в области с отходом от характеристики доказана в работе [25], а сильная разрешимость и вольтерровость - в [24].

Исследованию различных краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов второго и высокого порядка посвящены работы [12-13; 33; 70].

Классическая разрешимость задачи для однородного уравнения (3.1) с неоднородными граничными условиями (3.2) и (3.3) доказана в [71].

В данном разделе доказывается сильная разрешимость задачи и отсутствие у нее собственных значений.

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л.Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$, и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$.

Функцию u из класса $C^1(\bar{\Omega})$ будем называть *р е г у л я р н ы м* решением задачи N1 если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (3.1) в областях Ω_0 и Ω_1, и в этих областях удовлетворяет уравнению (3.1) и краевым условиям (3.2), (3.3), а также на линии изменения типа условием сопряжения (3.4). Здесь $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$.

Теорема 3.1. Для любой функции $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$, $f(A)=0$ существует единственное регулярное решение задачи N1 и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)}+\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)}\le c\|f\|_0 \tag{3.5}$$

и представимо в виде

$$u(x,y)=\iint_\Omega K(x,y,x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{3.6}$$

где $K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$, c - здесь и далее означает положительные, вообще говоря, разные постоянные.

Доказательство. В области Ω_0 рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (3.1) при $y>0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{AA_0\cup A_0B_0}=u_x\big|_{AA_0}=0,\quad u(x,0)=\tau(x)\,,\ \ 0\le x\le 1 \tag{3.7}$$

В силу однозначной разрешимости этой задачи, любое регулярное решение в области Ω_0 представимо в виде:

$$u(x,y)=\int_0^x dx_1\int_0^1 \bar{G}(x-x_1,y,y_1)f(x_1,y_1)dy_1+\int_0^x \bar{G}_{y_1}(x-x_1,y,0)\tau(x_1)dx_1, \qquad (3.8.)$$

где

$$\bar{G}(x-x_1,y,y_1)=\int_{x_1}^{x}G(t-x_1,y,y_1)dt,\qquad G(x,y,y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[e^{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}}-e^{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}}]$$

- функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате ABA_0B_0.

Дифференцируя (3.8) по y и переходя к пределу при $y\to 0$, с учетом $\tau(0)=\tau'(0)=0$, получаем

$$\nu_1(x)=-\int_0^x K(x-t)\tau'(t)dt+F_0(x),\quad 0<x<1, \tag{3.9}$$

где

$$\nu_1(x)=u_y(x,+0),\qquad 0\le x\le 1, \tag{3.10}$$

$$K(x)=(\pi x)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x}\right), \tag{3.11}$$

$$F_0(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 \bar{G}_y(x-x_1,0,y_1)f(x_1,y_1)dy_1. \tag{3.12}$$

Соотношение (3.9) является основным функциональным соотношением между $\tau'(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области Ω_0 на отрезок AB. Теперь рассмотрим уравнение (3.1) в области Ω_1. Из уравнения (3.1) при $y<0$ получим

$$u_{xx}-u_{yy}=\int_{-y}^{x}f(t,y)dt+\omega(y),$$

где $\omega(y)$- произвольная функция из класса $C^1\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

После замены переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, в последнем имеем

$$u_{\xi\eta}=f_0(\xi,\eta)+\omega_0(\xi-\eta), \tag{3.13}$$

где

$$u(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right),\qquad 4f_0(\xi,\eta)=\int_{-\frac{\xi-\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta}{2}}f\left(t,\frac{\xi-\eta}{2}\right)dt,\qquad 4\omega_0(\eta)=\omega\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

Краевые условия $u\big|_{AC} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{AC} = 0$, при этой замене принимают вид

$$u\big|_{\xi=0} = 0, \qquad u_\xi\big|_{\xi=0} = 0.$$

В силу однозначной разрешимости задачи Дарбу для волнового уравнения, любое регулярное решение уравнения (3.1) в области Ω_1 можно представить в виде

$$u(\xi,\eta) = \tau(\xi) - \int_0^\xi d\xi_1 \int_\eta^\xi [f_0(\xi_1,\eta_1) + \omega_0(\xi_1 - \eta_1)]d\eta_1. \tag{3.14}$$

В формуле (3.14) удовлетворяя условию $u_\xi\big|_{\xi=0} = 0,$ с учетом $\tau'(0) = 0$, однозначно определяем неизвестную функцию $\omega_0(\eta)$:

$$\omega_0(\eta) = -f(0,-\eta).$$

Теперь, подставляя найденное значение $\omega_0(\eta)$ в (3.14) с учетом обозначения, после упрощения, имеем

$$u(\xi,\eta) = \tau(\xi) + \frac{1}{2}\int_0^\xi dt \int_{\frac{t-\eta}{2}}^{\frac{t-\varepsilon}{2}} dy_1 \int_{-y_1}^{t-y_1} f(x_1,y_1)dx_1. \tag{3.15}$$

Из (3.15) имеем, с учетом (3.10)

$$\nu_2(x) = \tau'(x) - F_1(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{3.16}$$

где $\nu_2(x) = u_y(x,-0)$,

$$F_1(x) = \int_{-\frac{x}{2}}^0 dy_1 \int_{-y_1}^{x+y_1} f(x_1,y_1)dx_1. \tag{3.17}$$

Из (3.9) и (3.16), имея в виду условие склеивания (3.4) получим

$$\tau'(x) + \int_0^x K_1(x,t)\tau'(t)dt = F(x), \tag{3.18}$$

где

$$F(x)=\frac{1}{\alpha}F_0(x)+F_1(x)+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^x F_1(t)Q(x,t)dt,\ K_1(x,t)=\frac{1}{\alpha}\left[K(x-t)+\beta Q(x,t)\right]. \quad (3.19)$$

Лемма 3.2. *Если* $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ *и* $f(0,0)=0,$ *то* $F(x)\in C^2[0,1]$ и $F(0)=F'(0)=0.$

Доказательство. Из представления (3.17) легко видеть, что $F_1(x)\in C^2[0,1]$ и $F_1(0)=F_1'(0)=0$. Из (3.12) также легко следует, что $F_0(0)=0$. Дифференцируя (3.12) и используя явный вид функции Грина первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности $F_0'(x)$ запишем в виде

$$F_0'(x)=F_{01}(x)+F_{02}(x),$$

где

$$F_{01}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x dx_1\int_0^1 \frac{y_1}{(x-x_1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{y_1^2}{4(x-x_1)}}f(x_1,y_1)dy_1,$$

$$F_{02}(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 B(x-x_1,y_1)_1(x_1,y_1)dy_1,$$

$$B(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(y+2n)e^{-\frac{(y+2n)^2}{4x}}.$$

Здесь $B(x,y)\in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $B(0,y)=0$. Поэтому $F_{02}(x)\in C^\infty[0,1]$ и $F_{02}(0)=0$. Рассмотрим теперь $F_{01}(x)$. Произведя замену $x-x_1=t$, получаем

$$F_{01}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x dt\int_0^1 \frac{y_1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{y_1^2}{4t}}f(x-t,y_1)dy_1. \quad (3.20)$$

Очевидно, что $F_{01}(x)\in C[0,1]$ и $F_{01}(0)=0$. Дифференцируя (3.20), будем иметь

$$F_{01}'(x)=F_{11}(x)+F_{12}(x),$$

где

$$F_{11}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{y_1}{x^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{y_1^2}{4x}}f(0,y_1)dy_1, \quad (3.21)$$

$$F_{12}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x dt\int_0^1 \frac{y_1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{y_1^2}{4t}}f_x'(x-t,y_1)dy_1. \quad (3.22)$$

Так как $f(0,0)=0$, то $f(0,y)$ можно записать так

$$f(0,y_1)= f(0,y_1)- f(0,0)=\int_0^{y_1} f_y{}'(0,t)dt.$$

С учетом последнего, равенство (3.21) представим в виде

$$2\sqrt{\pi}F_{11}(x)=4\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{-t^2} f_y{}'(0,2\sqrt{xt})dt-\frac{2}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{4x}} f(0,1).$$

Очевидно, что последний интеграл является равномерно сходящимся по $x\in[0,1]$ и поэтому $F_{11}(x)\in C[0,1]$.

Сделав в (3.22) замену $t_1=\dfrac{y}{2\sqrt{t}}$, получаем

$$\sqrt{\pi}F_{12}(x)=2\int_0^1 dy_1 \int_{\frac{y_1}{2\sqrt{x}}}^{+\infty} f_x{}'(x-\frac{y_1}{4t_1^2})e^{-t_1^2}dt_1.$$

Так как последний интеграл является равномерно сходящимся по $x\in[0,1]$, то $F_{12}(x)\in C[0,1]$.

Из вышеизложенных фактов следует доказательство леммы 3.2.

С учетом (3.11) заключаем, что (3.18) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Так как $K(x-t)$ является ядром со слабой особенностью, в силу леммы 3.2 получаем, что существует единственное решение уравнения (3.18) из класса $C^2[0,1]$ и оно представимо в виде

$$\tau'(x)=F(x)+\int_0^x \Gamma(x-t)F(t)dt, \qquad 0\le x\le 1. \tag{3.23}$$

где $\Gamma(x)$ - резольвента интегрального уравнения (3.18)

$$\Gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K_n(x), \quad K_1(x)=K(x), \quad K_{n+1}(x)=\int_0^x K_1(x-t)K_n(t)dt.$$

Из (3.23), с учетом $\tau(0)=0$ имеем

$$\tau(x)=\int_0^x \Gamma_1(x-t)F(t)dt, \tag{3.24}$$

где

$$\Gamma_1(x)=1+\int_0^x \Gamma(t)dt.$$

Следствие 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.2. Тогда $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и $\tau(0)=\tau'(0)=0.$

Из (3.8), с учетом (3.12), (3.17) и (3.23), после несложных вычислений получаем

$$u(x,y)=\iint_\Omega K_0(x,y,x_1,y_1)\, f(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{3.25}$$

где

$$K_0(x,y,x_1,y_1)=\theta(y_1)\theta(x-x_1)G_5(\xi-x_1,0,y_1)+$$

$$+\left(y_1+\frac{x}{2}\right)\theta(x-x_1+y_1)\left\{G_6(\xi-x_1,0,y_1)+\int_{x_1-y_1}^{x}(t-x_1+y_1)\bar{G}_{y_1}(x-t,y,0)dt\right\}$$

Здесь $\theta(x)=1$, если $x>0$, $\theta(x)=0$, если $x<0$.

Рассмотрим выражение

$$2J(x,y)=\int_0^\xi dt\int_{\frac{t-\eta}{2}}^{\frac{t-\xi}{2}}dy_1\int_{-y_1}^{t-y_1}f(x_1,y_1)dx_1.$$

Отсюда с учетом $0<x_1+y_1<t,\ t-\eta<2y_1<t-\xi,\ 0<t<\xi$ имеем

$$x_1<x \tag{3.26}$$

Пусть $-\xi\le\xi-\eta$ или $x+3y\ge 0$, тогда

$$\begin{gathered}2J(x,y)=\left\{\int_{-\frac{\eta}{2}}^{-\frac{\xi}{2}}dy_1\int_{-y_1}^{\eta+y_1}(\eta-x_1+y_1)+\int_{-\frac{\xi}{2}}^{-\frac{\xi-\eta}{2}}dy_1\left[\int_{-y_1}^{\xi+y_1}(\eta-\xi)+\int_{\xi+y_1}^{\eta+y_1}(\eta-x_1+y_1)\right]+\right.\\
\left.+\int_{\frac{\xi-\eta}{2}}^{0}dy_1\left[\int_{-y_1}^{\xi+y_1}(-2y_1)+\int_{\xi+y_1}^{\xi-y_1}(\xi-x_1-y_1)\right]\right\}f(x_1,y_1)dx_1=\\
=2\iint_{\Omega_1}\theta(x-x_1)\theta(\xi-x_1-y_1)\theta(\eta-x_1+y_1)K_{11}(x,y,x_1,y_1)dx_1dy_1.\end{gathered} \tag{3.27}$$

Пусть $-\xi\ge\xi-\eta$ или $x+3y\le 0$, тогда

$$2J(x,y)=\left\{\int\limits_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}}dy_1\int\limits_{-y_1}^{\eta+y_1}(\eta-x_1+y_1)+\int\limits_{\frac{\xi-\eta}{2}}^{-\frac{\xi}{2}}dy_1\int\limits_{-y_1}^{\xi-y_1}(\xi-x_1-y_1)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\frac{\xi}{2}}^{0}dy_1\left[\int\limits_{-y_1}^{\xi+y_1}(-2y_1)+\int\limits_{\xi+y_1}^{\xi-y_1}(\xi-x_1-y_1)\right]\right\}f(x_1,y_1)dx_1= \tag{3.28}$$

$$=2\iint\limits_{\Omega_1}\theta(x-x_1)\theta(\xi-x_1-y_1)\theta(\eta-x_1+y_1)K_{12}(x,y,x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1$$

Таким образом, с учетом (3.15), (3.24) - (3.28), решение задачи в области Ω_1 можно представить в виде

$$u(x,y)=\iint\limits_{\Omega}K_1(x,y,x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{3.29}$$

где

$$K_1(x,y,x_1,y_1)=\theta(-y)\{\theta(y_1)\theta(\xi-x_1)[G_1(\xi-x_1,0,y_1)+G_3(\xi-x_1,y,y_1)]+$$
$$+\theta(-y_1)[\theta(x-x_1)\theta(\xi-x_1-y_1)\theta(\eta-x_1+y_1)K_{22}(x,y,x_1,y_1)+$$
$$\left.\left.+\theta(y_1+\frac{\xi}{2})\theta(\xi-x_1+y_1)\left\{\xi-x_1+y_1+\frac{\beta}{\alpha}\left(G_2(\xi-x_1,0,y_1)+G_4(\xi-x_1,y,y_1)\right)\right\}+\int\limits_{x_1-y_1}^{\xi}dt\int\limits_{x_1-y_1}^{t}\tilde{A}_1(t,z)dz\right]\right\}$$

здесь

$$K_{22}(x,y,x_1,y_2)=\begin{cases}K_{11}(x,y,x_1,y_1), & \tilde{o}+3y>0,\\ K_{12}(x,y,x_1,y_1), & \tilde{o}+3y<0.\end{cases}$$

Из (3.25) и (3.29) следует, что решение задачи в области Ω можно представить в виде (3.6). Здесь

$$K(x,y,x_1,y_1)=\theta(y)K_0(x,y,x_1,y_1)+\theta(-y)K_1(x,y,x_1,y_1).$$

Из представления (3.6) легко следует справедливость оценки (3.5). В силу следствия 3.3, из (3.8) и (3.15) нетрудно установить, что $u(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ и является регулярным решением задачи. Теорема 3.1 доказана.

Через W обозначим множество функций из класса

$$u\in C^1(\overline{\Omega}),\quad u_{xx},u_{yy}\in C(\bar{\Omega}_0),\qquad u_{xxx},u_{yyx}\in C(\bar{\Omega}_1),$$

удовлетворяющих краевым условиям (3.2) и (3.3), а также на линии изменения типа условием сопряжения (3.4).

Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *с и л ь н ы м* решением задачи, если существует последовательность функции $\{u_n\}$, $u_n \in W$, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

Теорема 3.2. Для любой функции $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи. Это решение принадлежит классу $C(\bar{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$; удовлетворяет неравенству (3.5) и представимо в виде (3.6).

Лемма 3.5. Если $f(x,y) \in L_2(\Omega)$,

$F(x) \in W_2^1(0,1)$ и $\|F(x)\|_{W_2^1(0,1)} \leq c\|f(x,y)\|_0$

Доказательство этой леммы с учетом (3.12) и (3.17) проводится аналогично, как и в пункте б) леммы 3.2.

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Из интегрального уравнения (3.18), в силу леммы 3.1 получаем, что $\tau(x) \in W_2^2(0,1)$, при всех $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.

В силу теоремы 3.1, с учетом результатов леммы 3.1, любое решение задачи из класса W представимо в виде (3.6). Из (3.6), с учетом гладкости $K(x,y,x_1,y_1)$, не трудно получить оценки (3.5). Единственность сильного решения задачи следует из (3.5).

Покажем теперь, что найденное решение $u(x,y)$ по формуле (3.6) будет сильным. Так как $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует последовательность функций $\{f_n\}, f_n \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ такая, что $\|f_n - f\|_0 \to 0$, при $n \to \infty$. Обозначим через u_n решение задачи для уравнения (3.1) с правой частью f_n. В силу теоремы 3.1 получаем, что $u_n \in W$ для всех $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. В силу неравенства (3.5) имеем

$$\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq c\|f_n - f\|_0 \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $\{u_n\}$ - есть последовательность, отвечающая определению сильного решения. Поэтому, задача сильно разрешима для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$. Так как $\tau(x) \in W_2^2(\Omega)$ при всех $f \in L_2(\Omega)$, то согласно формуле (3.8) и (3.15) сильное решение принадлежит классу $C(\bar{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$. Теорема 3.2 доказана.

Через L обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора заданного равенством (3.1) на W. Из теоремы 3.2 следует, что оператор L- обратим, L^{-1}- определен на всем $L_2(\Omega)$ и вполне непрерывен. Поэтому спектр оператора L может состоять только из собственных значений.

Основным результатом этого подраздела является следующая теорема об отсутствии собственных значений оператора L.

Теорема 3.3. Обратный оператор L^{-1} задачи определяемый формулой (3.6) является вольтерровым (то есть вполне непрерывным, и квазинильпотентным).

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.1 нами доказано, что $K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$. Поэтому, вполне непрерывность оператора L^{-1} следует из теоремы 3.2. Покажем, что L^{-1} оператор квазинильпотентный в $L_2(\Omega)$. В силу (3.25) и (3.29), в формуле (3.6) нетрудно заметить, что $K(x,y,x_1,y_1)\equiv\theta(x-x_1)K(x,y,x_1,y_1)$. Поэтому, далее доказательство теоремы 3.3 проводится, как и в теореме 3.2, с использованием критерия А.Б.Нерсесяна о вольтерровости интегральных операторов Гильберта-Шмидта [72]. Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.1. Задача является вольътерровой краевой задачей.

Следствие 3.2. Для любого $\lambda\in C$, уравнение $Lu-\lambda u=f$ однозначно разрешимо при всех $f\in L_2(\Omega)$ в классе $u\in C(\bar{\Omega})\cap W_2^1(\Omega)$

3.2 Сильная разрешимость краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

В данном подразделе доказывается сильная разрешимость задачи.

Пусть $\Omega\subset R^2$ –конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=0$, $y=1$, $x=1$ соответственно, а при $y<0$ характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$ параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

$$Lu=f(x,y) \tag{3.30}$$

где

$$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial y}lu=\frac{\partial}{\partial y}\begin{cases}u_x-u_{yy}, & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}, & y<0.\end{cases}$$

Задача N2. Найти решение уравнения (3.30), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,y)\big|_{A_0B_0}=0 \tag{3.31}$$

$$u\big|_{AA_0\cup AC}=0 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC\cup BC}=0\ , \tag{3.33}$$

где n - внутренная нормаль.

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л.Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$, и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$.

Функцию u из класса $C^1(\bar{\Omega})$ будем называть р е г у л я р н ы м решением задачи N2 если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (3.30) в областях Ω_0 и Ω_1, и в этих областях удовлетворяет уравнению (3.30) и краевым условиям (3.31) - (3.33), и на линии перехода AB выполняется условия склеивания

$$u_{xx}(x,+0)=u_{xx}(x,-0), \qquad \frac{\partial^2 u(x,+0)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u(x,-0)}{\partial y^2}, \qquad 0<x<1 \tag{3.34.}$$

Здесь $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$.

Теорема 3.4 Для любой функции $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$, $f(A)=0$ существует единственное регулярное решение задачи N2 и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_2\le c\|f\|_0 \tag{3.35}$$

c - здесь означает положительную постоянную.

Доказательство. Нетрудно установить, что любое регулярное решение уравнения (3.30) в области Ω_1 может быть представимо в виде

$$u(x,y)=\tau(x)-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\upsilon(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x}(x+y-t)\mu(t)dt+\frac{1}{2}\int_{x}^{x-y}(x-y-t)\mu(t)dt+F(x,y) \tag{3.36}$$

где

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int_{y}^{0}dy_1\int_{x+y-y_1}^{x}(x_1+y_1-x-y)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int_{y}^{0}dy_1\int_{x}^{x-y+y_1}(x-y-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1$$

$$\tau(x)=u(x,0),\qquad \upsilon(x)=u_y(x,0),\qquad \mu(x)=u_{yy}(x,0),\qquad 0\le x\le 1 \tag{3.37}$$

В формуле (3.36) удовлетворяя условию $u(x,y)|_{AC}=0$ имеем

$$\tau(x)-\frac{1}{2}\int_{0}^{2x}\nu(t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}t\mu(t)dt+\frac{1}{2}\int_{x}^{2x}(2x-t)\mu(t)dt+F(x,-x),\quad 0<x<\frac{1}{2} \tag{3.38}$$

где

$$F(x,-x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{0}dy_1\int_{-y_1}^{x}(x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1+\frac{1}{2}\int_{-x}^{0}dy_1\int_{x}^{2x+y_1}(2x-x_1+y_1)f(x_1,y_1)dx_1 \tag{3.39}$$

Дифференцируя соотношение (3.38) дважды, после некоторых преобразовании имеем

$$\nu'(t)-\mu(t)+\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{t}{2}\right)-\tau''\left(\frac{t}{2}\right)\right]=\frac{d^2}{dx^2}F(x,-x)\Big|_{x=\frac{t}{2}},\quad 0<t<1 \tag{3.40}$$

где

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x,-x)\Big|_{x=\frac{t}{2}}=2\int\limits_{-\frac{t}{2}}^{0} f(t+y_1,y_1)dy_1+\int\limits_{-\frac{t}{2}}^{0} f\left(\frac{t}{2},y_1\right)dy_1$$

Соотношение (3.40) является основным функциональным соотношением между $\tau(x), \upsilon(x)\ и\ \mu(x)$, принесенное из области Ω_1 на отрезок AB.

Теперь также в формуле (3.37) удовлетворяя условию (3.33), после двукратного дифференцирование получаем

$$\tau''(x)-\mu(x)=-\sqrt{2}\,\frac{d}{dx}\left[F_x(x,y)+F_y(x,y)\right]\Big|_{y=-x},\quad 0<x<\frac{1}{2}$$

$$\tau''(x)-\mu(x)=-\sqrt{2}\,\frac{d}{dx}\left[F_x(x,y)-F_y(x,y)\right]\Big|_{y=x-1},\quad \frac{1}{2}<x<1$$

С учетом (3.39) произведя необходимое вычисление, имеем

$$\tau''(x)-\mu(x)=\sqrt{2}\int\limits_{-x}^{0} f(x,y_1)dy_1,\quad 0<x<\frac{1}{2} \tag{3.41}$$

$$\tau''(x)-\mu(x)=\sqrt{2}\int\limits_{x-1}^{0} f(x,y_1)dy_1,\quad \frac{1}{2}<x<1 \tag{3.42}$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.30) в области Ω_0.

Пусть

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\vartheta(x,y) \tag{3.43}$$

Тогда в силу условия (3.31), $u(x,y)\big|_{AA_0}=0$ и $u_y(x,0)=\nu(x)$ для функции $\vartheta(x,y)$ получим следующую задачу

Задача Р. Найти решение уравнение

$$\vartheta_x-\vartheta_{yy}=f(x,y)$$

удовлетворяющий условиям

$$\vartheta(x,y)\big|_{AA_0\cup A_0B_0}=0$$

$$\vartheta(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1$$

Известно, что решение задачи P в области Ω_0 представимо в виде

$$\vartheta(x,y)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G(x-x_1,y,y_1)\,f(x_1,y_1)dy_1+\int_0^x G_{y_1}(x-x_1,y,0)\nu(x_1)dx_1,\ y>0 \qquad (3.44)$$

где $G(x-x_1,y,y_1)$ - функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате AA_0,B_0B имеющая вид:

$$G(x,y,y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}}-e^{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}}\right)$$

Вычислив производную $\vartheta_y(x,y)$ в (3.44) и устремив у к нулю, получим соотношение между $\nu(t)$ и $\mu(t)$ принесенное на AB из области Ω_0

$$\mu(t)=-\int_0^t k(t-z)\nu'(z)\,dz+\Phi_0(t),\quad 0<t<1 \qquad (3.45)$$

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n^2}{x}}\ , \qquad (3.46)$$

$$\Phi_0(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G_y(x-x_1,y,y_1)\Big|_{y=0}f(x_1,y_1)dy_1\ ,$$

В силу (3.43) из (3.44) получим представление решения задачи N2 в области Ω_0

$$u(x,y)=\tau(x)+\int_0^x dx_1\int_0^1\left[\int_0^y G(x-x_1,t,y_1)dt\right]f(x_1,y_1)\,dy_1+\int_0^x\left[\int_0^y G_{y_1}(x-x_1,t,0)dt\right]\nu(x_1)\,dx_1$$

(3.47)

Таким образом, мы относительно $\tau(x),\nu(t)$ и $\mu(t)$ имеем систему интегро-дифференциальных уравнений (3.40), (3.41), (3.42) и (3.45).

В силу (3.34), исключая из соотношении (3.40), (3.41) и (3.45) функции $\tau''(t)$ и $\mu(t)$ относительно $\nu'(t)$ получим следующую (эквивалентную к задаче N2) интегральную уравнение Вольтерра второго рода

$$\nu'(t)+\int_0^t k(t-z)\nu'(z)\,dz=P(t),\ 0<t<1 \qquad (3.48)$$

где

$$P(t)=\Phi_0(t)+\Phi_1(t)\,,\ \Phi_1(t)=2\int\limits_{-\frac{t}{2}}^{0} f(t+y_1,y_1)dy_1+\frac{\sqrt{2}-2}{2}\int\limits_{-\frac{t}{2}}^{0} f\left(\frac{t}{2},y_1\right)dy_1 \qquad (3.49)$$

Исследуем сначала свойства функций $\mathrm{P}(t)$. Имеет место

Лемма 3.6. а) если $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$ и $f(A)=0,$ то $P(t)\in C^1[0,1]$ и $P(0)=0;$

б) если $f(x,y)\in L_2(\Omega),$ то $P(t)\in L_2(0,1)$ и

$$\|P(t)\|_{L_2(0,1)}\le C\|f\|_0 \qquad (3.50)$$

Доказательство. Из (3.48) легко видеть, что $\hat{O}_1(t)\in C^1[0,1]$ и $\Phi_1(0)=0.$ Используя явный вид функций Грина функцию $\hat{O}_0(t)$ можно представить в виде

$$\hat{O}_0(t)=\hat{O}_{01}(t)+\hat{O}_{02}(t)$$

где

$$2\sqrt{\pi}\hat{O}_{01}(t)=\int\limits_0^t dx_1\int\limits_0^1 \frac{y_1}{(t-x_1)^{3/2}}e^{-\frac{y_1^2}{4(x-x_1)}}f(x_1,y_1)dy_1,$$

$$\hat{O}_{02}(t)=\int\limits_0^t dx_1\int\limits_0^1 B(t-x_1,y_1)f(x_1,y_1)dy_1.$$

Здесь

$$B(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(y+2n)e^{-\frac{(y+2n)^2}{4x}},$$

$$B(x,y)\in C^\infty(\overline{\Omega_0})\ \text{ и }\ B(0,y)=0.$$

Поэтому $\hat{O}_{02}(t)\in C^\infty[0,1]$ и $\Phi_{02}(0)=0.$

Рассмотрим теперь $\hat{O}_{01}(t).$ Произведя замену $t-x_1=z$ имеем

$$2\sqrt{\pi}\Phi_{01}(t)=\int\limits_0^t dz\int\limits_0^1 \frac{y_1}{z^{3/2}}e^{-\frac{y_1^2}{4z}}f(t-z,y_1)dy$$

Очевидно, что $\hat{O}_{01}(t)\in C[0,1]$ и $\Phi_{01}(0)=0.$ Непосредственным вычислением, с учетом $f(A)=0$ аналогично можно показать, что $\hat{O}_{01}(t)\in C^1[0,1].$ Таким образом, суммируя окончательно полученные выше факты, имеем $P(t)\in C^1[0,1]$ и $P(0)=0.$ Пункт а) леммы 3.6 доказан.

Перейдем к доказательству пункта б) леммы 3.6. Из (3.48), используя известные неравенства Коши – Буняковского, легко получаем, что

$$\hat{O}_1(t) \in L_2(0,1) \text{ и } \|\hat{O}_1(t)\|_{L_2(0,1)} \le c\|f\|_{L_2(\Omega_1)}.$$

Поступая аналогично как и в работе [26] нетрудно получить справедливость следующего неравенства

$$\|\hat{O}_0(x)\|_{L_2(0,1)} \le c\|f\|_{L_2(\Omega_0)}$$

Из последних двух неравенств, легко получим оценку (3.50), что и доказывает пункт б) леммы 3.6. Лемма 3.6 доказана полностью.

Следствие 3.3. Для любой функций $P(t) \in C^1[0,1]$ и $P(0)=0$ существует, единственное решение уравнения (3.47) и $\nu'(t) \in C^1[0,1]$ u $\nu'(0)=0$

Так как в силу (3.47) ядро $k(t)$-ядро со слабой особенностью, то существует единственное решение уравнения (3.48) из класса $C^1[0,1]$ и оно представимо в виде

$$\nu'(t) = P(t) + \int_0^t \Gamma(t-z)P(z)dz \tag{3.51}$$

где $\Gamma(t)$ - резольвента интегрального уравнения (3.48):

$$\Gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k_n(t), \quad k_1(t) = k(t)$$

$$k_{n+1}(t) = \int_0^t k_1(t-z)k_n(z)dz$$

Из краевого условия (3.32) и (3.33) имеем $\nu(0)=0$

Поэтому

$$\nu(x) = \int_0^x \Gamma_1(x-t)P(t)dt, \quad 0<t<1 \tag{3.52}$$

где

$$\Gamma_1(x) = 1 + \int_0^x \Gamma(t)dt$$

Подставляя (3.50) в (3.46)однозначно находим $\mu(x)$ и наконец подставляя $\mu(x)$ в (3.42) и (3.43) с учетом $\tau(0)=\tau'(0)=0$ находим $\tau(x)$

Так как $\Gamma(t)$ - резольвента интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью, то из (3.52) в силу леммы 3.6 получим $\nu(t) \in C^2[0,1]$ и

$$\|\nu'(t)\|_{L_2(0,1)} \le c\|P(t)\|_{L_2(0,1)} \le c\|f(x,y)\|_0 \tag{3.53}$$

Отсюда, и в силу (3.42), (3.43) и (3.46) получим $\mu(x) \in C^1[0,1], \ \tau(x) \in C^3[0,1]$

$$\|\mu(x)\|_{L_2(0,1)} \le c\|f(x,y)\|_0, \qquad \|\tau''(x)\|_{L_2(0,1)} \le c\|f(x,y)\|_0 \tag{3.54}$$

Теперь после нахождения $\tau(x), \nu(t)$ и $\mu(t)$ формула (3.36) и (3.48) дают нам регулярное решение задачи N2. С учетом (3.53) и (3.54) также из формулы (3.36) и (3.47), используя известные неравенство Коши- Буняковского непосредственным вычислением получаем справедливость оценки (3.35). Теорема 3.4 доказана.

Функцию $u(x,y) \in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи N2, если существует последовательности $\{u_n\}$регулярных решений задачи N2, такие, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к $u(x,y)$ и $f(x,y)$.

Теорема 3.5. Для любой функций $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи B. Это решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству (3.35)

Доказательство: Покажем, что найденное при $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ решение задачи N2 является сильным.

Заметим, что в силу результатов леммы 3.6 и представления решения по формуле (3.36), (3.47) следует выполнение неравенства (3.35) при всех $f \in L_2(\Omega)$. Из оценки (3.35) следует также единственность сильного решения задачи N2. В силу плотности в $L_2(\Omega)$ множества $\tilde{N}_0^1(\overline{\Omega})$-непрерывно дифференцируемых в Ω и обращающихся на границе области в нуль функции, для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует последовательность $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$такая что $\|f_n - f\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$.

Через u_n обозначим регулярное решение задачи B для уравнения (1) с правой частью $f_n(x,y)$, а через $\tau_n(x) = u_n(x,0),\ \nu_n(x) = u_{ny}(x,0),\ \mu_n(x) = u_{nyy}(x,0)$. В силу следствия 3.3 имеем

$$\tau_n(t) \in C^3[0,1], \tau_n(0) = \tau_n'(0) = 0, \nu_n(t) \in C^2[0,1], \quad \mu_n(t) \in C^1[0,1],,$$

следовательно, согласно формулам (3.36), (3.47) получаем, что $u_n(x,y)$будет регулярным решением задачи N2 при всех $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$последовательность f_n будет фундаментальной. Из линейности уравнения (3.30) и оценки (3.36) получаем, что $\|u_n - u_m\|_2 \le c\|f_n - f_m\|_0$, то есть последовательность $\{u_n\}$ будет фундаментальной в $W_2^2(\Omega)$. Принимая во внимание полноту пространства $W_2^2(\Omega)$, получаем, что существует единственный предел $u \in W_2^2(\Omega)$последовательности $\{u_n\}$, который и будет искомым сильным решением задачи N2 для уравнения (3.30) с правой частью $f \in L_2(\Omega)$.

Так как $\tau(x) \in W_2^2(0,1),\ \ \nu(x) \in W_2^1(0,1)\ u\ \ \mu \in L_2(0,1)$ для всех $f \in L_2(\Omega)$, то согласно формулам (3.36), (3.47) сильное решение принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$

Теорема 3.2.2 доказана.

Заключение

В диссертационной работе поставлены и исследованы вопросы регулярной и сильной разрешимости ряда краевых задач для гиперболических и смешанных параболо- гиперболических уравнении второго и третьего порядков. В частности установлены и вольтерровость, либо существование собственных значении аналогов задач Трикоми с интегральными условиями склеивания для параболо- гиперболического уравнения в ограниченной области.

Исследуемые краевые задачи эквивалентно редуцируются к интегро-функциональными уравнениям. Используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории функциональных уравнении.

Основные результаты диссертации:

– Доказана сильная разрешимость и вольтерровость аналога обобщенной задачи Трикоми с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения второго порядка.

– Доказана теорема о существовании собственных значений одной краевой задачи со специальными условиями склеивания для смешанного параболо- гиперболического уравнения.

– Найдены достаточные условия разрешимости для одного класса краевых задач с интегральными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения второго порядка.

– Доказана сильная разрешимость ряда локальных задач, в том числе задача Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.

– Доказана однозначная разрешимость и вольтерровость аналога задачи Трикоми со специальными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

– Для одного класса краевых задач для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка установлена однозначная (регулярная и сильная) разрешимость.

Список использованных источников

1 Чаплыгин С.А. О газовых струях. - М.: Гостехиздат, 1949. -148 с.

2 Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / пер. с итал. Ф.И. Франкль. - М.: Гостехиздат. 1947. - 140 с.

3 Gellerstedt S. Quellques problems mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy}=0$ // Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, - 1938, Vol. 3, № 26, article 132, - P.1-32.

4 Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. - 1950. - Т.70, № 3. - С.485-488.

5 Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Труды МИ АН СССР.- 1953.- Т.41. - 59 с.

6 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука. 1981. - 448 с.

7 Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. - М.: Наука. - 1973. - 711 с.

8 Protter M.H. Uniqueness theorem for Tricomi problem I, II // J.Rat.Mech. and Anal.- 1953. - Vol.2. - P.107-114; - 1955. - Vol.4. - P.721-732.

9 Morawetz C.Z. A week solution for a system of equations of elliptic-hiperbolic type // Comm. Pure and Appl. Math. - 1958. - Vol.11. - P.315-331.

10 Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - Киев: Наукова думка, 1965. - 805 с.

11 Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. - М.: Иностранная литература. 1961. - 208 с.

12 М.С. Салахитдинов. Уравнения смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: ФАН, 1974. - 164 с.

13 Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. - Ташкент: ФАН, 1979. - 240 с.

14 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 301 с.

15 Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для уравнения в частных производных гиперболического типа. –Шымкент: КазХТИ, 1992. - 328 с.

16 Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи матем.наук. – 1959. – Т. 14, №.3(87). - С.3-19.

17 Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. - М.: Гостехиздат, 1947. – 244 с.

18 Berdyshev A.S., Karimov E.T. Some non-local problems for the parabolic – hyperbolic type eguation with non-characteristic line of changing type //Central European Journal of Mathematics CEJM. – 2006. Vol. 4, №2. - P. 183-193.

19 Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. - 1997. - Т. 33, № 1. - С. 115–119.

20 Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. - 1961.- Т 4, № 11. - С. 99-104.

21 Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно- физический журнал. -1964. - Т 7, № 1. - С. 89-92.

22 Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 1. – С.56-63.

23 Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. -1989. –Т. 25, № 1. –С. 117-126.

24 Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д. Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо- гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. - 1992. – Т. 28, № 1. – С. 176-179.

25 Бердышев А.С. О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. – 1989, № 3. – С.14-18.

26 Бердышев А.С. Спектральные вопросы теории краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов: дис … д. ф.-м. н.: 010102 / Института математики АН РУ. – Ташкент, 1999. – 249 с.

27 Karimov E.T. Non-local problems with special gluing condition for the parabolic-hyperbolic type equation // PanAmerican Mathematical Journal. – 2007. - Vol. 17, № 2, - P. 11-20.

28 Eshmatov B.E., Karimov E.T. Boundary value problems with continuous and special gluing conditions for parabolic–hyperbolic type equations // Cent.Eur. J. Math. - 2007. - Vol. 5, № 4. – P. 741–750.

29 Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A. Nonlocal Problems with Special Gluing for a Parabolic- Hyperbolic Equation // Proceedings of the 6th International ISAAC Congress "Further Progress in Analysis". – Ankara, 2007, august 13-18. – P. 727-734.

30 Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. - 1990. – Т. 26, № 1. – С. 60-65.

31 Садыбеков М.А. Краевые задачи в областях с отходом от характеристики для уравнений гиперболического и смешанного типов второго порядка: дис … д. ф.-м. н.: 010102 / Института математики АН РУ. – Ташкент, 1993. – 270 с.

32 Садыбеков М. А., Айбеков В. М. О регулярных краевых задачах для гиперболического уравнелия третьего порядка в характеристическом треугольнике. Южно-Казахст.техн.ун-т. – Шымкент, 1997. - 18 с. - Деп. в КазгосИНТИ 20.05.97, № 7661.

33 Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо - гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

34 Мередов М.М. Об одной краевой задаче для одного класса смешанных уравнений высокого порядка // Доклады АН СССР. - 1973. –Т. 208, № 2. – С. 273-276.

35 Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределения собственных значений. - Шымкент: Ғылым, 1996. - 270 с.

36 Akhtaeva N.S., Berdyshev A.S. On a solvability of boundary-value problem for third order hyperbolic equation // Abstracts of the 3rd Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS). – Almaty, 2009, June 30 - July 4. - P. 187.

37 Ахтаева Н.С., Бердышев А.С. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка // Труды конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль Хорезми 2009». – Ташкент, 2009, сентябрь 18-21. – Т. 1. - С.57-58.

38 Akhtaeva N.S., Berdyshev A.S. An analogue of the Tricomi problem with integral gluing conditions for parabolic-hyperbolic equation // Abstracts of the 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS). - Baku, 2011, July 1-3. - P.179.

39 Ахтаева Н.С., Каримов Э.Т. Задача Геллерстедта со специальным условием склеивания интегрального вида для диффузионно- волнового уравнения дробного порядка // Тезисы научно- практического семинара «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа». - Самарканд, 2012, июль 5-6. - С. 43-44.

40 Ахтаева Н. С. Аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения дробного порядка // Тезисы международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения». - Астана, 2012, октябрь 2-5. – С. 112-113.

41 Ахтаева Н. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с простыми характеристиками // Тезисы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». - Стерлитамак, 2013, июнь 26-30. – С. 124-127.

42 Ахтаева Н. С. Локальные задачи для гиперболического уравнения третьего порядка // Тезисы международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений». – Новосибирск, 2013, август 18-24. – С. 96.

43 Ахтаева Н.С., Бердышев А.С. Сильная разрешимость краевых задач для гиперболического уравнения третьего порядка с простыми характеристиками // Тезисы международной научно-практической конференций «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт». - Тараз, 2013, сентябрь 27-28. – С. 149-152.

44 Ахтаева Н.С., Бердышев А.С. Сильная разрешимость краевой задачи для смешанного параболо- гиперболического уравнения третьего порядка // VI Международная конференция «Математическое моделирование и

информационные технологии в образовании и науке (ММ ИТОН)». - Алматы, 2013, октябрь 25-26. - Т. 1. - С. 27-32.

45 Akhtaeva N. S., Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E. T. On the Volterra property of a boundary problem with integral gluing condition for mixed parabolic-hyperbolic equation // Boundary value problems. - 2013. DOI: 10.1186 /1687-2770-2013-94. Импакт-фактор 0,92. http://www.boundaryvalueproblems.com/search/results?terms=akhtaeva

46 Ахтаева Н.С., Каримов Э.Т. О краевой задаче с условием сопряжения интегрального вида для смешанного параболо - гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник КазНУ имени аль-Фараби. Серия «Физико- математические науки». – Алматы, 2013. - № 2(77). – С. 64-70

47 Akhtaeva N.C., Berdyshev A. S., Karimov E. T. Boundary Value Problems with Integral Gluing Conditions for Fractional-Order Mixed-Type Equation // International Journal of Differential Equations. - 2011. doi:10.1155/2011/268465. 10 pages. http://www.hindawi.com/journals/ijde/2011/268465/

48 Ахтаева Н. С. Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа третьего порядка // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия «Физико-математические науки». – Алматы, 2012. - № 2 (38). – С. 35-41.

49 Ахтаева Н. С. Разрешимость локальных задач для гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия «Физико-математические науки». – Алматы, 2013. - №2 (42). – С.39-42.

50 Бердышев А.С. О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения // Известия АН УзССР. «Серия физ.-мат.наук». – Ташкент, 1989. - № 3. – С.14-18.

51 Berdyshev A.S., Cabada A., Kadirkulov B.J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Computers and Mathematics with Applications (CAMWA). – 2011. - Vol. 62. – P.3884-3893.

52 Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Theory, Methods & Applications (NATMA). – 2012. - Vol. 75, №6. – P. 3268-3273.

53 Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука. – 1983. – 424 с.

54 Тиханов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. – М.: Наука. - 1977. - 736 с.

55 Лидский В.Б. Несамосопряжённые операторы, имеющие след // Доклады АН СССР. -1959. – Т. 125, №. 3. – С. 485-488.

56 Aziz A.K., Schneider M. Frankl- Morawets problem in R^3 // SIAM J. Math. Anal. - 1979. –Vol. 10, № 5. – P. 913-921.

57 Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

58 Nieto Juan J., Abdelghani Ouahab, Ravi P.Agarwal, Mouffak Benchohra. Fractional Differential Equations and Inclusions. - Springer, 2011. - 354 p.

59 Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1430-1440.

60 Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1940. № 11. – P. 36–48.

61 Краснов М.Л. Интегральные уравнения: введение в теорию. М.: Наука, 1975. - 303 с.

62 Zikirov O.S. On Boundary–value Problem For Hyperbolic-Type Equation of The Third Order // Lietuvos Matematikos Rinkinys. - 2007. -Vol. 47, № 4. -P. 591 - 603.

63 Бердышев А.С. О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе – Самарского для смешанного параболо – гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 500-510.

64 Садыбеков М.А. О сопряженной задаче Дарбу // Доклады АНСССР. - 1990. - Т. 314, №2. - С. 304-306.

65 Салахитдинов М. С., Бердышев А.С. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения в области с отходом от характеристики // Доклады РАН. – 1992. - Т. 327, №3. - С.303-305.

66 Б.М. Айбеков. Задачи типа Дарбу и типа Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка. ЮКТУ. – Шымкент, 1997. - 14 с. - Деп.в КазгосИНТИ 20.05.97, № 7663.

67 Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. - 1977. –Т. 13, № 1. – С. 56-63.

68 Капустин Н.Ю. Оценка решения задачи Трикоми для системы уравнений параболо- гиперболического типа // Доклады АН СССР. - 1982. – Т. 265, № 3. – С. 524-525.

69 Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. - 1989. – Т. 25, № 1. – С. 117-126.

70 Моисеев Е.И. Уравнение смешанного со спектральным параметром. – М.: Изд-во МГУ, 1988. - 150 с.

71 Мамажанов М., Холмуродов Д. Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. - 1989. –Т .25, № 2. – С. 271-275.

72 Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера // Доклады АН СССР. - 1964. – Т. 155, № 5. – С. 1049-1051.