

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 534.2:537.8

На правах рукописи

**ЖАКИЕВ НУРХАТ КУАНДЫКОВИЧ**

**Изучение электромагнитных и акустических волновых полей в  
анизотропных пьезоэлектриках методом матрицанта**

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора философии (PhD) по специальности  
6D060400 – Физика

Научные консультанты  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор С. К. Тлеукенов  
кандидат физ.-мат. наук  
В. Г. Можяев

Республика Казахстан  
Астана, 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ</b> .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>1 СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ И МАТРИЦАНТ ОДНОРОДНЫХ СРЕД</b> .....	14
1.1 Уравнения Максвелла и уравнения движения для пьезоэлектрической среды .....	14
1.2 Структура матрицы коэффициентов для ромбической симметрии классов $mm2$ и $222$ .....	19
1.2.1 Неоднородность среды вдоль оси X.....	19
1.2.2 Неоднородность среды вдоль оси Y.....	24
1.2.3 Неоднородность среды вдоль оси Z.....	26
1.3 Структура матрицы коэффициентов для тетрагональной симметрии классов $4mm$ и $\bar{4}2m$ .....	27
1.4 Матрицант для однородных пьезосред. Аналитическое решение.....	32
<b>2 ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ</b> .....	37
2.1 Поверхности упругих и электромагнитных волновых векторов.....	37
2.2 Угол сноса между фазовой и групповой скоростями.....	41
2.3 Анизотропия плотности потока акустической энергии.....	48
<b>3 ЗАДАЧИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ</b> .....	52
3.1 Матрица <b>R</b> . Аналитическое решение задачи отражения и преломления.....	53
3.2 Расчет связанных волновых полей при отражении и преломлении.....	57
3.3 Отражение и преломление электромагнитной волны на границе жидкость – пьезоэлектрик.....	60
3.4 Отражение и преломление упругой SH волны на границе диэлектрик– пьезоэлектрик.....	66
3.5 Численный анализ элементов матрицы <b>G</b> .....	72
<b>4 ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА ГУЛЯЕВА-БЛЮСТЕЙНА</b> .....	76
4.1 Условия существования волн Гуляева-Блюстейна.....	77
4.1.1 Металлизированная поверхность .....	77
4.1.2 Свободная поверхность .....	79
4.2 Характеристики ПАВ Г-Б в ромбических кристаллах класса $mm2$ .....	82
4.3 Изменение угла среза. Численные расчеты характеристик. ....	84
4.4 Волна Гуляева-Блюстейна в тетрагональных пьезокристаллах.....	87

<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	90
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	93
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А – Список опубликованных работ</b> .....	101

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- ПАВ – поверхностная акустическая волна;  
Г-Б – Гуляева-Блюстейна;  
КЭМС - коэффициент электромеханической связи;  
ЭМ – электромагнитная;  
СДУ – система дифференциальных уравнений;  
TE, TM – компоненты электромагнитной волны с поляризациями:  
Transverse Electric, Transverse Magnetic;  
SH – поперечно-горизонтальная (shear-horizontal) упругая волна;  
SV – поперечно-вертикальная (shear-vertical) упругая волна;  
 $E_i$  – составляющая вектора напряженности электрического поля;  
 $H_i$  – составляющая вектора напряженности магнитного поля;  
 $B_i$  – составляющая вектора индукции магнитного поля;  
 $D_i$  – составляющая вектора индукции электрического поля;  
 $\epsilon_{ij}$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости кристалла;  
 $\mu_{ij}$  – компоненты тензора магнитной проницаемости кристалла;  
 $c_{ijkl}$  – упругие модули кристалла;  
 $e_{ijk}$  – пьезоэлектрические коэффициенты;  
 $\rho$  – плотность среды;  
 $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжения;  
 $\omega$  – угловая (радиальная, циклическая, круговая) частота;  
 $\vec{u}$  – вектор смещения;  
 $\vec{w}$  – вектор-столбец независимых переменных;  
 $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  
 $\mathbf{B}$  – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений;  
 $\mathbf{G}$  – матрица относительных коэффициентов отражения для амплитуд волновых компонентов: смещения, напряжения, напряженности электрического и магнитного полей;  
 $\mathbf{R}$  – матрица, описывающая связь волн на границе полупространства;  
матрицант  $\mathbf{T}$  – нормированная матрица фундаментальных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;  
 $b_{ij}$  – элементы матрицы коэффициентов;  
 $k_i$  – волновые векторы;  
 $R_i$  – обратная скорость;  
 $\psi$  – угол между углами распространения фазовой ( $\theta$ ) и групповой ( $\varphi$ ) скоростями (угол сноса потока энергии относительно нормали к волновому фронту);  
 $A$  – коэффициент концентрации, характеризующий анизотропию плотности потока акустической энергии, распространяющейся от точечного или линейного источника в кристалле.

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Теоретическое изучение распространения упругих волн в анизотропных средах с различными физическими свойствами, такими как пьезоэффект и др., является одной из фундаментальных задач акустики твердого тела и, в частности, акустоэлектроники. Входит в перечень приоритетных направлений исследования Государственной программы по форсированному индустриально-инновационному развитию Республики Казахстан на 2010 – 2014 годы [1].

Основные методы генерации акустических волн, традиционные для научных и прикладных исследований, основаны на использовании пьезоэлектрического эффекта. С середины 50-х годов XX века область приложения пьезоэлектриков существенно расширилась. Разнообразные физические явления, связанные с распространением и взаимодействием упругих волн и электрических полей в пьезоэлектрических средах, нашли широкое применение в различных устройствах акустоэлектроники и акустооптики, в беспроводных системах связи, в ультразвуковой дефектоскопии, акустической микроскопии и в разработке чувствительных элементов и датчиков [2-15].

Наличие в материальной среде прямого и обратного пьезоэффекта приводит к взаимосвязанности и взаимной генерации упругих и электромагнитных волн, но связанность таких пьезоупругих волн существенно усложняет задачу их анализа. Поэтому для решения данной задачи широко применяются приближенные методы. Развитый к настоящему времени математический аппарат акустики пьезокристаллических твердых тел в большинстве случаев ограничен рамками квазиэлектростатического приближения [2-8, 16-17]. Такое приближение не всегда, однако, применимо к задачам, в которых необходимо учитывать вклад электромагнитных волн, в частности, к задачам, соответствующим результатам недавно опубликованных статей [18-22]. В этих статьях сообщалось о прямом экспериментальном наблюдении электромагнитного излучения от акустических волн, распространяющихся в пьезоэлектрике, в том числе и в терагерцовом частотном диапазоне. Известны также экспериментальные наблюдения генерации акустической волны при воздействии электромагнитной волны на пьезоэлектрик [23-25]. В патенте [26] предложены схемы анализа упругой волны, возбужденной ЭМ волной на поверхности пьезоэлектрика. Отдельные вопросы пьезоэлектрической взаимосвязи упругих волн с электромагнитной волной изучались теоретически в статьях [27-39], но эти исследования охватывают далеко не весь круг разнообразных актуальных задач, для которых необходим учет такого рода взаимодействий. Если более ранние исследования проводились аналитическими методами для высокосимметричных кристаллов и для определенных срезов, то для более сложной анизотропии соответствующие системы дифференциальных уравнений (СДУ) решаются приближенными численными методами (методами конечных разностей, конечных элементов, методом Найстрема). В связи с изложенными фактами и обстоятельствами

актуальным и важным вопросом современной акустоэлектроники представляется решение акустических задач для пьезоэлектриков в полной электромагнитной постановке.

Следует отметить, что создание акустоэлектронных устройств помимо отмеченного взаимодействия упругих и электромагнитных волн требует учета и множества других факторов, влияющих на распространение акустических волн в твердом теле. В их число входят отражение, преломление, локализация, фокусировка и другие волновые эффекты [5, 40-42].

В настоящее время широко известна и доказана эффективность применения матричных методов для изучения волновых процессов различной природы и в различных структурах. Матричные методы применяются, например, при численном анализе уравнений дисперсии волн в периодических средах, для приближенного решения задач распространения волн в высокосимметричных анизотропных средах, развиваются методы исследования распространения волн в стратифицированных и многослойных структурах [43-55]. Основная проблема при этом заключается в получении матрицы фундаментальных решений – матрицанта.

Несмотря на широкое и давнее применение различных подходов матричного формализма, таких как решение Грина-Кристофеля, методы Стро-Барнета, Войгта [2, 56-58] вопрос о структуре матрицанта был впервые рассмотрен сравнительно недавно (по историческим меркам) в работах С.К. Тлеукунова [59-64]. На основе применения полиномов Чебышева-Гегенбауэра им был построен матрицант конечного периодически неоднородного слоя. Получено модифицированное условие для нахождения дисперсионных уравнений в периодических структурах при взаимной трансформации упругих волн [65-68]. Методом матрицанта исследованы задачи о распространении волн в анизотропных упругих, пьезоэлектрических, пьезомагнитных, магнитоэлектрических, термоупругих средах [65, 68-74].

Такие и подобные им усовершенствованные передовые аналитические подходы представляются более ценными по сравнению с численными решениями, поскольку позволяют глубже понять и изучить волновые процессы в упругой среде. Так, например, метод первых интегралов, предложенный В.Г. Можаяевым, дает возможность легко получать секулярные уравнения вплоть до ромбической симметрии, представить пьезоакустическое уравнение движения в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка, определять предельные объемные волны и секторы несуществования ПАВ Г-Б [75-80].

Изложенные соображения позволяют сделать вывод, что изучение связанных акустоэлектромагнитных волновых полей в анизотропных пьезоэлектрических средах применением усовершенствованных аналитических методов и в полной акустоэлектромагнитной постановке представляет собой сложную, но **актуальную** задачу современной акустоэлектроники.

Приведенные обоснования актуальности обсуждаемой темы показывают и доказывают перспективность теоретического исследования и практического использования электроупругих волн, распространяющиеся в пьезоэлектрических средах. Необходимо и важно, таким образом, выявить

общие закономерности распространения акустических волн в их связке с ЭМ волнами в пьезоэлектриках.

В настоящей работе в рамках линейной теории упругости и на основе представления решений в виде плоских волн изучается распространение взаимосвязанных акустических и электромагнитных волн в безграничных и ограниченных пьезодиэлектрических анизотропных средах. Данная тематика охватывает такие проблемы, как нахождение фазовых и групповых скоростей, поляризационных характеристик, исследование эффектов, связанных с отражением, преломлением, трансформацией акустических и электромагнитных волн на границе раздела сред, изучение условий существования ПАВ, расчет коэффициентов электромеханической связи.

**Целью работы** является проведение анализа распространения связанных акустических и электромагнитных волновых полей в безграничных и полуограниченных пьезоэлектрических средах тетрагональной и ромбической симметрии с использованием полной системы уравнений Максвелла на основе метода матрицанта.

Для достижения этой цели поставлены следующие **задачи исследования**:

– получить матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений для пьезоэлектрических сред тетрагональной и ромбической симметрии с использованием полной системы уравнений Максвелла и провести анализ связанных упругих и ЭМ волн в разных координатных плоскостях с учетом неоднородности среды вдоль одной из кристаллографических осей ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ );

– исследовать анизотропию пьезосред: получить для однородной пьезоэлектрической среды тетрагональной и ромбической симметрии аналитические значения фазовых и групповых скоростей связанных волн, построить индекатрисы; рассчитать угол отклонения групповой скорости от фазовой, распределение и плотность потока упругой энергии;

– аналитически решить задачу отражения и преломления электромагнитной волны от границы жидкость-пьезоэлектрик и провести численный анализ коэффициентов отражения, преломления и трансформации падающей ЭМ волны в упругую волну в зависимости от угла падения. Провести исследования эффекта акустического двойного лучепреломления без изменения ветви в случае падения SH волны на границу диэлектрика с пьезоэлектриком;

– определить условия существования поверхностных акустических волн (ПАВ) Гуляева-Блюстейна для пьезоэлектрического полупространства тетрагональной и ромбической симметрии с металлизированной и свободной границей. Исследовать характеристики этих волн: скорость, коэффициенты спадания упругой и электромагнитной парциальных волн, электромеханическую связь для двух геометрий а) X-срез, Y - направление распространения и б) Y-срез, X –направление распространения, также при плавном переходе от одной геометрии к другой путем поворота среза кристалла вокруг оси Z.

**Объектом исследования** являются связанные акустические и электромагнитные волны в пьезоэлектриках тетрагональной и ромбической симметрий.

**Предметом исследования** является изучение характеристик распространения связанных электромагнитных и акустических волновых процессов в пьезоэлектрических средах тетрагональной и ромбической симметрий.

**Метод исследования** – аналитический метод матрицанта, разработанный профессором С.К. Тлеукуновым. В основе метода лежит построение фундаментального решения исходной системы дифференциальных уравнений. Внутренняя симметрия матрицы коэффициентов позволяет получить все элементы матрицанта в случае однородных сред в явном аналитическом виде. Относится к математическим методам изучения фундаментальных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые результаты:

– Получены матрицы коэффициентов для пьезоэлектрических сред тетрагональной и ромбической симметрии в трехмерном и двумерном случаях распространения без использования предположения о квазистатичности электрических полей. Получены аналитические выражения для волновых векторов в однородной пьезоэлектрической среде тетрагональной и ромбической симметрии; построены поверхности волновых векторов и фазовых скоростей связанных электроупругих волн.

– Теоретически и экспериментально исследованы углы анизотропного сноса потока энергии (углы между фазовой и групповой скоростями) для SH-волн. Впервые получено явное аналитическое выражение для угла сноса в пьезоэлектриках ромбической симметрии. Рассчитаны групповые скорости, анизотропия плотности потока упругой энергии от линейного источника SH-волн.

– Аналитически решена задача отражения-преломления электромагнитной волны на границе жидкость-пьезоэлектрик, проведен численный анализ решения. Показано, что электромагнитная волна возбуждает упругие волны и рассчитаны энергетические коэффициенты трансформации в зависимости от угла падения.

– Исследованы потоки акустических полей при отражении и преломлении поперечно-горизонтальных упругих волн на границе диэлектрик-пьезоэлектрик. Показано, что в сильноанизотропных пьезоэлектриках в зоне вогнутости поверхности волновых векторов наблюдается двойное лучепреломление упругой волны без изменения волной ветви, предсказанное М.К. Балакиревым и И.А. Гилинским.

– Аналитически определены условия существования и характеристики поверхностных акустических волн Гуляева-Блюстейна (скорость, коэффициенты спадания) для пьезоэлектрического полупространства

ромбической и тетрагональной симметрии с металлизированной и свободной поверхностью.

– Впервые получены выражения для показателей спадания поля поверхностной электромагнитной волны в среде и в вакууме на основе полной системы уравнений Максвелла, решаемой совместно с уравнением движения для упругой среды.

#### **Теоретическая и практическая значимость полученных результатов**

Полученные теоретические результаты имеют важное значение для развития теоретических основ кристаллоакустики пьезоэлектриков. Результаты могут быть применены для расчетов при конструировании различных приборов и устройств в акустоэлектронике и в акустооптике, разных фильтров и сенсоров на ПАВ, а также различных чувствительных элементов, воспринимающих механические и электромагнитные воздействия.

**Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Представленная работа дополняет научно-исследовательские работы других авторов в области решения задач кристаллоакустики и акустоэлектроники другими методами. Часть диссертационной работы выполнена по теме программы фундаментальных исследований в области естественных наук под научным руководством д.ф.-м.н., профессора Тлеукенова С.К.: «Распространение связанных упругих и электромагнитных волн в средах с пьезоэлектрическим эффектом для гексагональной, тетрагональной, ромбической и моноклинной сингонии» в ЕНУ им.Л.Гумилева, по приоритету: Интеллектуальный потенциал страны, на 2012-2014 годы, гос. рег. № 0112РК02379.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

– Матрицы коэффициентов для пьезоэлектрических сред, полученные в работе без использования квазиэлектростатического приближения, показывают связь и взаимную трансформацию энергии между волнами различной поляризации и физической природы. Метод матрицанта позволяет рассчитать угол сноса, групповые скорости, показатель концентрации потока упругой энергии.

– Использование полной акустоэлектромагнитной теории к задаче отражения-преломления электромагнитной волны на границе жидкость-пьезоэлектрик позволяет описать возбуждаемые при отражении упругие волны.

– В зоне вогнутости поверхности волновых векторов сверхсильного пьезоэлектрика ниобата калия реализуется двойное лучепреломление упругой волны без изменения ветви.

– Полученные условия существования поверхностных акустических волн Гуляева-Блюстейна на металлизированных и свободных границах позволяют определить характеристики этих волн (скорость, показатель спадания, коэффициент электромеханической связи) в аналитическом виде. Показатели спадания ЭМ волны в пьезополупространстве и в вакууме для волн Гуляева-Блюстейна невозможно получить в рамках квазиэлектростатического подхода.

### **Личный вклад соискателя.**

Постановка задачи, идея и методы решения принадлежат профессору С. Тлеукинову. Обсуждение полученных результатов были проведены совместно с научными консультантами. Автор принимал непосредственное участие во всех исследованиях, представленных в работе, разработал алгоритмы для символьных и численных расчетов самостоятельно.

**Апробация работы.** Результаты, полученные в работе, докладывались и обсуждались на международных научно-практических конференциях: «Инновационное развитие и востребованность науки в современном Казахстане» (Алматы, 2011), «Актуальные проблемы современной физики» посвященная 80-летию профессора И.С. Исатаева (Алматы, 2012), «Таймановские чтения-2012» посвященная 95-летию академика А.Д. Тайманова (Уральск, 2012), «Функциональный анализ и его приложения» (Астана, 2012), Conference of the Asian consortium on computational materials science (Sendai, 2012; Thailand, 2013; Astana, 2014), International workshop on Radiation effects in insulators and non-metallic materials (REINM, Astana, 2014), IEEE International ultrasonic symposium (Joint UFFC, EFTF and PFM, Prague, 2013), на всероссийской научной школе-семинаре «Физика и применение микроволн» (Москва, 2013), на семинаре кафедры технической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, на объединенном семинаре кафедр КарГУ им. ак. Е.А. Букетова.

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 14 научных работ, в том числе 4 в изданиях из Перечня, утвержденного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 1 в изданиях, входящие в базу данных Scopus, одно авторское свидетельство.

**Структура и объем диссертации.** Общий объем диссертации – 102 страниц компьютерного текста, содержит 39 рисунков, 6 таблиц. Диссертация состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка цитированных источников из 129 наименований и приложения.

### **Краткое содержание работы.**

*Во введении* рассмотрено современное состояние проблемы, обоснована актуальность темы, цель работы, задачи, объект, предмет и метод исследования, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость, связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами, положения, выносимые на защиту.

*В первой главе* диссертации приведены основные уравнения, описывающие связанные акустические и ЭМ волны в пьезоэлектрических материалах. На основе применения метода разделения переменных уравнения движения упругих анизотропных сред и уравнения Максвелла приведены к эквивалентной системе уравнений первого порядка. Устанавливается структура матриц коэффициентов системы уравнений в зависимости от класса симметрии (тетрагональная и ромбическая) пьезоупругих сред и направления координатной оси (X, Y, Z), вдоль которой параметры среды в общем случае неоднородны. Рассматриваются объемный случай распространения волн и распространение в координатных плоскостях. Проанализированы типы волн распространяющихся в данных средах и связи между ними. Обоснована

применимость и преимущества метода матрицанта для решения поставленных задач.

*Во втором разделе* получены аналитические значения волновых векторов в зависимости от азимутального угла и построены поверхности волновых векторов акустоэлектромагнитных волн. Получены аналитические значения угла сноса между фазовой и групповой скоростями для пьезоэлектриков тетрагональной и ромбической симметрии, определены групповые скорости, рассчитаны плотности потока упругой энергии, построены графики показателя концентрации упругой энергии, которые согласуются с экспериментальными данными.

*В третьем разделе* рассматриваются задачи отражения и преломления электромагнитной волны на границе жидкость-пьезоэлектрик, упругой SH волны на границе диэлектрик - пьезоэлектрик. Показано, что падающая ЭМ волна возбуждает упругие волны в анизотропных пьезосредах. Численно рассчитаны относительные энергии преломленной и трансформированной энергий. Проводится анализ компонентов матрицы  $\mathbf{G}$ , описывающие относительные амплитуды смещения, сдвига, электрической и магнитной составляющей отраженной связанной волны. Рассмотрена задача двойного лучепреломления упругой волны без изменения ветви на границе полупространств диэлектрика с пьезоэлектриком ниобатом калия. Рассчитаны и построены графики зависимости энергетических коэффициентов отражения и преломления, векторная диаграмма волновых фронтов и показатель концентрации упругой энергии в зависимости угла преломления для двух ветвей преломления.

*В четвертом разделе* аналитически получены условия существования поверхностных акустических волн Гуляева-Блюстейна на границе пьезоэлектрического полупространства ромбической и тетрагональной симметрии при металлизированных и свободных границах. Методом матрицанта получены аналитические значения скорости распространения, показателя спадания, глубины проникновения и коэффициент электромеханической связи ПАВ Гуляева-Блюстейна в кристаллах тетрагональной и ромбической симметрии на свободной и металлизированной поверхности в направлениях: X-срез, Y-направление и Y-срез, X-направление. Также рассчитаны значения характеристик при повороте среза вокруг оси Z. Рассчитаны значения показателей спадания для поверхностной электромагнитной волны в среде и в вакууме. Анализировано влияние изменения электрической проводимости металлизированной поверхности на характеристики ПАВ Гуляева-Блюстейна.

*В заключении* формулируются основные выводы по полученным в диссертации результатам.

### **Обзор литературы**

Вопросам физики пьезокристаллов и их практическим применениям посвящен ряд статей и книг известных ученых и инженеров по описанию волн в пьезоэлектрических средах, как П. Мэзон [4], Б. Олд [5], У. Кэди [13], и др. [3, 9].

В настоящее время широко применяются устройства, основанные на пьезоэлектрическом эффекте. Линии задержки и кварцевые резонаторы для стабилизации частоты хорошо известные примеры применения ультразвуковых волн в радиоэлектронных системах обработки и передачи информационных сигналов [9-11]. В ограниченных пьезоэлектриках есть возможность существования сдвиговых поверхностных акустических волн (ПАВ) Гуляева-Блюстейна [10, 78-88]. Они не могут распространяться в кристаллах не обладающих пьезоэффектом, открыты относительно недавно. Глубина проникновения ПАВ Гуляева-Блюстейна на много превышает глубину проникновения ПАВ Рэлея, это существенно снижает влияние поверхностного слоя, его неоднородности и дефектов [10]. Принцип устройств на ПАВ основано на том, что ПАВ распространяются вдоль поверхности среды и можно обеспечить контакт с ними, влиять на них, усиливать, преобразовывать на всем пути их распространения. Поэтому, в последние три десятилетия активно ведутся работы по созданию и усовершенствованию устройств на ПАВ.

Другим очень важным направлением современного приборостроения является создание различных датчиков, работающих в контакте с жидкостью. Как известно, акустические волны с поперечно-горизонтальной (SH-shear horizontal) поляризацией могут распространяться в контакте с жидкостью без существенных радиационных потерь, связанных с излучением упругой энергии в жидкость. Эти особенности позволяют создавать на основе таких волн различные датчики для измерения параметров жидкости. Кельчинский, Kondoh и др. с соавторами на протяжении последних 10 лет занимаются разработкой датчиков на ПАВ Г-Б для контроля за качеством сока, вязкости нефти, для обнаружения различных химических примесей в жидкости и т.д. Принцип работы этих устройств основан на акустоэлектрическом взаимодействии упругих волн с носителями заряда, присутствующими в исследуемых жидкостях. Очевидно, что, как и в случае тонкого проводящего поверхностного слоя, чувствительность таких датчиков будет существенно зависеть от коэффициента электромеханической связи на поверхности [89-92].

Большинство работ в области описания упругих волн в пьезоэлектриках посвящено численному исследованию в квазистатическом приближении. Связанность механических и электрических полей и анизотропия вносят дополнительные трудности в анализ задач пьезоупругости. При квазистатическом описании волн матрицей Грина-Кристоффеля (4x4) уравнения приводят к тому, что отсутствует традиционный для колебательных процессов перекачка энергии с механической в электромагнитную и наоборот [3, 93].

Обозримые аналитические решения задачи зачастую можно найти лишь для некоторых конкретных условий, например, для определенного среза кристаллографической оси. Однако они представляются более ценными по сравнению с численными решениями, поскольку позволяют глубже понять физические процессы, протекающие при волновых процессах в пьезоэлектриках. Становятся возможным проследить связь процесса взаимной

трансформации упругой и электромагнитной энергии в пьезоэлектрических анизотропных средах.

Изучение процессов отражения и преломления электроупругих волн на границе пьезоэлектриков остается актуальным, они используются в контроллерах частоты. Задачи отражения и преломления, численно-экспериментальные исследования упругих волн на границе двух полупространств изучаются в [94-100]. Однако в рамках стандартного квазистатического приближения невозможно проследить все детали и связи процесса взаимной трансформации энергий упругой и электромагнитной волн. Например, при решении задачи отражения и преломления между двумя пьезоэлектриками X. Yuan, Z.H. Zhu вместо электромагнитной волны вводят виртуальные волновые моды с нулевой энергией [96, 97]. Задачи отражения и преломления с учетом электромагнитных полей аналитически решаются в [68, 98-103].

В 1979 г. был предсказан М.К. Балакиревым и И.А. Гилинским возможность существования эффекта двойного лучепреломления и лучеотражения упругих волн без изменения ветви на границе гипотетических кубических пьезокристаллов с квадратом коэффициента электромеханической связи, превышающим  $1/3$  [2], но такие кубические кристаллы еще не найдены.

Слабо изучены пьезоэлектрические кристаллы, относящиеся к низкой симметрии. Научный интерес вызывают пьезоэлектрики с высоким коэффициентом электромеханической связи и классом анизотропии, как перовскитные сегнетопьезокерамики ((Na,K)NbO<sub>3</sub>, LiNbO<sub>3</sub>, BiScO<sub>3</sub>, PbTiO<sub>3</sub>, PZT-5H, и др.) [104-105]. Ниобат калия (KNbO<sub>3</sub>) – пьезоэлектрический кристалл ромбической симметрии класса mm2, в литературе его называют «сверхсильным пьезоэлектриком» [106-108]. Относительно недавно из кристалла КТР (KTiOPO<sub>4</sub>) синтезирован пьезоэлектрический кристалл ромбической симметрии с высокой термостабильностью КТА (KTiOAsO<sub>4</sub>), который представляет интерес в качестве элемента на ПАВ в высокотемпературных условиях эксплуатации [109, 110].

Для конструирования акустоэлектронных и акустооптических устройств из сильноанизотропных кристаллов важно учитывать угол сноса и коэффициент фононной фокусировки акустической энергии [111, 112].

В работе, в качестве объекта исследования определены связанные упругие и электромагнитные волны в пьезоэлектриках тетрагональной и ромбической симметрий. Для примера показаны расчеты для определенных кристаллов, таких как, ниобат калия, КТА, КТР и др. Полученные формулы применимы и для других пьезосред ромбической или тетрагональной симметрии.

# 1 СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ И МАТРИЦАНТ ОДНОРОДНЫХ СРЕД

## 1.1 Уравнения Максвелла и уравнения движения для пьезоэлектрической среды

Наличие в диэлектрической среде прямого и обратного пьезоэффектов приводит к взаимосвязанности и взаимной генерации упругих и электромагнитных волн. Традиционно, волны в пьезокристаллах рассматриваются в квазистатическом приближении, в рамках которого теряется физический смысл рассмотрения связанных волновых процессов. Волновой подход с использованием полной системы уравнений Максвелла совместно с уравнением движения позволяет описывать ЭМ волны порождаемые в пьезоэлектриках как связанную систему. В работе на основе применения метода разделения переменных уравнения движения упругих анизотропных сред и уравнения Максвелла приводится к эквивалентной системе уравнений первого порядка. Аналитическое описание упругих волн трех типов и двух поляризации ЭМ волн приводит к системе ОДУ с матрицей коэффициентов порядка  $10 \times 10$  [67, 68]. Поиск связанных упругих и электромагнитных волновых векторов ведет к задаче на собственные значения данной матрицы. Задача на объемные волны в пьезоэлектриках ставится следующим образом: вычислить фазовые скорости всех типов по поляризации волн, распространяющихся в заданном направлении; определение связанных и несвязанных волн по поляризациям при двумерных случаях. Для любого направления в среде произвольной анизотропии задача имеет аналитическое решение. Однако лишь для определенных симметричных ориентаций выражения для матрицы коэффициентов и связь между типами волн разной поляризации будут иметь обзримый и простой вид, с которыми будут вестись аналитические исследования. Научный интерес вызывает срез для которых указанная система ОДУ распадается на несколько ОДУ с матрицей более низкой степени.

В общем случае рассматривается распространение волн в стратифицированных пьезоупругих средах, параметры пьезоупругой среды рассматриваются неоднородными вдоль выбранной оси распространения. Метод матрицанта позволяет усреднять параметры кусочно-неоднородных сред и полученные аналитические решения применимы для однородных сред [67]. Преимущества метода описано в разделе 1.4.

Полная система уравнений, описывающая связанные упругие и электромагнитные волновые процессы в пьезоэлектрическом кристалле в отсутствие токов и свободных зарядов состоит из уравнений движения упругой среды [3]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.1.1)$$

и уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Взаимосвязь этих уравнений описываются определяющими соотношениями, которые отражают пьезоэлектромеханический эффект [3]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k \end{cases} \quad (1.1.3)$$

где  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  компоненты тензора малых деформаций,  $D_i$  –

компоненты вектора электрического смещения,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – компоненты тензора диэлектрической и магнитной проницаемости анизотропной среды, которые содержат  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  для вакуума,  $e_{kij}$  – пьезоэлектрические параметры среды,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора механических напряжений,  $c_{ijkl}$  – упругие параметры среды, которые образуют тензоры 4-го ранга. В силу симметричности тензора деформаций и симметричности относительно перестановки пар индексов  $i$  и  $j$ ,  $k$  и  $l$  справедливы следующие равенства:  $c_{ijkl} = c_{jikl}$  и  $c_{ijkl} = c_{ijlk}$  и  $c_{ijkl} = c_{klij}$ . Эти соотношения уменьшают число независимых компонент тензоров  $c_{ijkl}$  до 21.

Таким образом, тензор упругих постоянных в самом общем случае можно представить в виде следующей симметричной матрицы [3]:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & c_{3112} \\ & & & & & c_{1212} \end{bmatrix}$$

Благодаря симметричности тензоров  $c_{ijkl}$  по первым двум и последним двум индексам можно использовать сокращенные матричные обозначения, которые вводятся по следующей схеме  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ , «23 или 32  $\rightarrow 4$ , 13 или 31  $\rightarrow 5$ , 12 или 21  $\rightarrow 6$ ». Эта строчка определяется «правилом девятки»: сумма неодинаковых индексов и третьего, их заменяющего, должна равняться девяти, то есть  $(2+3)+4=9$ ,  $(3+1)+5=9$ ,  $(1+2)+6=9$ .

Следовательно,  $c_{ijkl} = c_{\alpha\beta}$ ;  $i, j=1, 2, 3$ ;  $\alpha, \beta=(i, j)$ ,  $(k, l)=1, 2, \dots, 6$ .

Система уравнений из (1.1.1-1.1.3) описывает связанные упругие и электромагнитные волны в пьезоэлектрических кристаллах. Связь вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  с напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  представляется в форме:

$$B_i = \mu_{ij} H_j \quad (1.1.4)$$

На основе метода матрицанта [66-68], используя представление решения в виде плоских волн при неоднородности параметров среды вдоль оси  $X$ :

$$f(x, y, z, t) = \xi(x) \exp(i\omega t - ik_y y - ik_z z) \quad (1.1.5)$$

система (1.1.1 – 1.1.3) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{d\vec{W}}{dx} = \mathbf{B}\vec{W} \quad (1.1.6)$$

$$\vec{W} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z, H_y, E_z)^t$$

где  $\vec{W}$  - вектор-столбец, умноженный на  $\exp(i\omega t - ik_y y - ik_z z)$ , который для удобства записи далее опущен, символ  $t$  означает операцию транспонирования вектора-строки в вектор-столбец,  $k_y, k_z$  – компоненты волновых векторов вдоль соответствующих осей.

Для сред ромбической симметрии классов  $mm2$  и  $222$  модули упругости представляются в виде следующей матрицы [3]:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

Тэнзор пьезоэлектрических модулей  $e_{ijk} = e_{i\alpha}$ ,  $i=1, 2, 3$ ;  $\alpha=(j, k)=1, 2, \dots, 6$ . Для сред ромбической симметрии классов  $mm2$  и  $222$  имеют вид соответственно [3, 5]:

$$e_{i\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_{i\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

Тензоры электрической и магнитной проницаемости имеют вид [3]:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}; \quad \mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

Система определяющих соотношений (1.1.3) для пьезоэлектромеханического эффекта в ромбических кристаллах класса  $mm2$  раскрываются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Общее число физико-механических параметров пьезоэлектрической среды ромбической сингонии классов  $mm2$  и  $222$ , включая плотность среды, равно 18 и 16 соответственно. Рассматривая эти классы симметрии совместно, учитывая (1.1.5):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -ik_z f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -ik_y f, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f \quad (1.1.10)$$

Получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = c_{11} \frac{du_x}{dx} - ik_y c_{12} u_y - ik_z c_{13} u_z - e_{31} E_z \\ \sigma_{yy} = c_{12} \frac{du_x}{dx} - ik_y c_{22} u_y - ik_z c_{32} u_z - e_{32} E_z \\ \sigma_{zz} = c_{13} \frac{du_x}{dx} - ik_y c_{32} u_y - ik_z c_{33} u_z - e_{33} E_z \\ \sigma_{yz} = -c_{44} (ik_z u_y + ik_z u_z) - e_{14} E_x - e_{24} E_y \\ \sigma_{xz} = c_{55} \left( \frac{du_z}{dx} - ik_z u_x \right) - e_{15} E_x - e_{25} E_y \\ \sigma_{xy} = c_{66} \left( \frac{du_y}{dx} - ik_y u_x \right) - e_{36} E_z \end{array} \right. \quad (1.1.11)$$

Компоненты вектора электрического смещения имеют вид:

$$\begin{cases} D_x = e_{14} \left( \frac{du_z}{dx} - ik_z u_x \right) - e_{15} (ik_y u_z - ik_z u_y) + \epsilon_{11} E_x \\ D_y = e_{24} \left( \frac{du_z}{dx} - ik_z u_x \right) - e_{25} (ik_y u_z + ik_z u_y) + \epsilon_{22} E_y \\ D_z = e_{31} \frac{du_x}{dx} - ik_y e_{32} u_y - ik_z e_{33} u_z + e_{36} \left( \frac{du_y}{dx} - ik_y u_x \right) + \epsilon_{33} E_z \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Из уравнений Максвелла следуют:

$$\begin{cases} i\omega D_x = -ik_y H_z + ik_z H_y \\ i\omega D_y = -ik_z H_x - \frac{dH_z}{dx} \\ i\omega D_z = ik_y H_x + \frac{dH_y}{dx} \end{cases} \quad (1.1.13)$$

$$\begin{cases} -ik_y E_z + ik_z E_y = -i\omega \mu_{11} H_x \\ -ik_z E_x - \frac{dE_z}{dx} = -i\omega \mu_{22} H_y \\ \frac{dE_y}{dx} + ik_z E_x = -i\omega \mu_{33} H_z \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Уравнение движения (1.1.1) записываются в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = -\rho\omega^2 u_x + ik_y \sigma_{xy} + ik_z \sigma_{xz} \\ \frac{d\sigma_{xy}}{dx} = -\rho\omega^2 u_y + ik_y \sigma_{yy} + ik_z \sigma_{yz} \\ \frac{d\sigma_{xz}}{dx} = -\rho\omega^2 u_z + ik_y \sigma_{yz} + ik_z \sigma_{zz} \end{cases} \quad (1.1.15)$$

Из системы состоящий из 18 уравнений, выделяем 10 производные по оси  $X$  согласно вектору (1.1.6). Объединяя (1.1.11) с (1.1.12) исключаем компоненты вектора индукции электрического поля. Выражаем неизвестные  $E_x, H_x, \frac{du_x}{dx}, \frac{du_y}{dx}, \frac{du_z}{dx}$  через переменные входящие в вектор (1.1.6).

Явный вид системы дифференциальных уравнений первого порядка для ромбической симметрии класса  $mm2$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{du_x}{dx} &= \frac{1}{c_{11}} \sigma_{xx} + \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}} u_y + \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}} u_z + \frac{e_{31}}{c_{11}} E_z; \\
\frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= -\rho \omega^2 u_x + ik_y \sigma_{xy} + ik_z \sigma_{xz}; \\
\frac{du_y}{dx} &= ik_y u_x + \frac{1}{c_{66}} \sigma_{xy}; \\
\frac{d\sigma_{xy}}{dx} &= (-\rho \omega^2 + (c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}) k_y^2 + c_{44} k_z^2) u_y + k_y k_z (c_{23} + c_{44} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}}) u_z + \\
&\quad + \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}} \sigma_{xx} - ik_y (e_{32} - \frac{e_{31} c_{12}}{c_{11}}) E_z - ie_{24} k_z E_y; \\
\frac{du_z}{dx} &= ik_z u_x + \frac{1}{c_{55}^D} \sigma_{xz} - \frac{k_y e_{15}}{c_{55}^D \epsilon_{11}} H_z + \frac{k_z e_{15}}{\omega c_{55}^D \epsilon_{11}} H_y; \\
\frac{d\sigma_{xz}}{dx} &= (-\rho \omega^2 + (c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}}) k_z^2 + c_{44} k_y^2) u_z + k_y k_z (c_{23} + c_{44} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}}) u_y + \\
&\quad + \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}} \sigma_{xx} - ik_z (e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}}{c_{11}}) E_z - ik_y e_{24} E_y; \\
\frac{dE_y}{dx} &= \frac{ie_{15} k_y}{c_{55}^D \epsilon_{11}} \sigma_{xz} - \frac{ic_{55} k_y k_z}{\omega c_{55}^D \epsilon_{11}} H_y + i\omega (\frac{c_{55} k_y^2}{\omega^2 c_{55}^D \epsilon_{11}} - \mu_{33}) H_z; \\
\frac{dH_z}{dx} &= -\omega e_{24} k_z u_y - \omega e_{24} k_y u_z - i\omega (\epsilon_{22} - \frac{k_z^2}{\omega^2 c_{55}^D \mu_{11}}) E_y - \frac{ik_y k_z}{\omega \mu_{11}} E_z; \\
\frac{dH_y}{dx} &= \frac{i\omega e_{31}}{c_{11}} \sigma_{xx} + \omega k_y (e_{32} - \frac{e_{31} c_{12}}{c_{11}}) u_y + \omega k_z (e_{33} - \frac{c_{13} e_{31}}{c_{11}}) u_z + \frac{ik_y k_z}{\omega \mu_{11}} E_y + \\
&\quad + i\omega (\frac{e_{31}^2}{c_{11}} + \epsilon_{33} - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_{11}}) E_z; \\
\frac{dE_z}{dx} &= \frac{ie_{15} k_z}{c_{55}^D \epsilon_{11}} \sigma_{xz} + \frac{ic_{55} k_y k_z}{\omega c_{55}^D \epsilon_{11}} H_z - i (\frac{c_{55} k_z^2}{\omega^2 c_{55}^D \epsilon_{11}} - \omega \mu_{22}) H_y.
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

## 1.2 Структура матрицы коэффициентов для сред ромбической симметрии классов $mm2$ и $222$

### 1.2.1 Неоднородность среды вдоль оси X

В случае распространения волн в пьезоэлектрической среде ромбической симметрии класса  $mm2$  из (1.1.20) выделяется матрица коэффициентов [74] системы ОДУ для связанных упругих и электромагнитных волн в виде:

$$\begin{pmatrix}
0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{110} \\
b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 & 0 & b_{410} \\
b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & b_{58} & b_{59} & 0 \\
0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 & 0 & b_{610} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{58} & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\
0 & 0 & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\
0 & i\omega b_{110} & i\omega b_{410} & 0 & i\omega b_{610} & 0 & -b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{59} & 0 & -b_{79} & b_{109} & 0
\end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

$$\vec{W} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z, H_y, E_z)^t$$

Здесь:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{11}}; b_{13} = \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}}; b_{15} = \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}}; b_{11} = \frac{e_{31}}{c_{11}};$$

$$b_{21} = -\rho\omega^2; b_{24} = ik_y; b_{26} = ik_z; b_{34} = \frac{1}{c_{66}};$$

$$b_{43} = -\rho\omega^2 + k_z^2 c_{44} + k_y^2 \left( c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right); b_{45} = k_y k_z \left( c_{23} + c_{44} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} \right);$$

$$b_{47} = -ik_z e_{24}; b_{410} = ik_y \left( e_{32} - e_{31} \frac{c_{12}}{c_{11}} \right); b_{56} = \frac{1}{c_{55}^D}; b_{58} = -\frac{k_y e_{15}}{\omega c_{55}^D \epsilon_{11}}; b_{59} = \frac{k_z e_{15}}{\omega c_{55}^D \epsilon_{11}};$$

$$b_{65} = -\rho\omega^2 + k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) + k_y^2 c_{44}; b_{67} = -ik_y e_{24}; b_{610} = -ik_z \left( e_{33} - e_{31} \frac{c_{13}}{c_{11}} \right);$$

$$b_{78} = i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{11}^T} - \mu_{33} \right); b_{79} = -\frac{ik_y k_z}{\omega \epsilon_{11}}; b_{87} = i\omega \left( \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_{11}} - \epsilon_{22} \right);$$

$$b_{109} = i\omega \left( \mu_{22} - \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon_{11}^T} \right); b_{910} = i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_{11}} \right);$$

$$c_{55}^D = c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}; \epsilon_{11}^T = \epsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{55}}; \epsilon_{33}^T = \epsilon_{33} + \frac{e_{31}^2}{c_{11}};$$

Полученная матрица коэффициентов (1.2.1) описывает все упругие и электромагнитные волны в безграничной пьезоэлектрической среде ромбической симметрии класса  $mm2$ , также взаимосвязь между ними. Из структуры матрицы коэффициентов следует связь между типами волн. Первая пара переменных в векторе-столбце определяет продольные волны (P), вторая - поперечно-вертикальную упругую волну (SV), третья пара - поперечно-горизонтальную упругую волну (SH), четвертая - вертикально поляризованная

компонента электромагнитной волны ТЕ поляризации и пятая пара – горизонтально поляризованная компонента электромагнитной волны ТМ поляризации.

Из структуры матрицы коэффициентов видно, что в объемном случае, при неоднородности вдоль оси  $X$ , все типы волн взаимосвязаны. Ненулевые элементы матрицы коэффициентов, описывают трансформацию энергии между типами волн. Например, связь продольной волны с поперечной упругой волной  $Y$  поляризации определяется не равенством нулю элементов  $b_{13}$  и  $b_{24}$ , связь упругой волны  $Z$  поляризации с электромагнитной волной ТЕ поляризации выражается наличием отличных от нуля элементов  $b_{58}$  и  $b_{67}$  и т.д.

При распространении волн в плоскости  $XOY$  ( $k_z=0$ ) матрица коэффициентов (1.2.1) для ромбической симметрии класса  $mm2$  распадается на независимые матрицы, имеющих следующие структуры:

$$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 & \frac{e_{31}}{c_{11}} \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & k_y^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & k_y^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \\ 0 & i\omega b_{16} & i\omega b_{46} & 0 & 0 & i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_{11}} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega \epsilon_{22} & 0 \end{array} \right) \quad (1.2.2a)$$

$$\vec{W} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{c_{55}^D} & 0 & \frac{-k_y e_{15}}{\omega \epsilon_{11} c_{55}^D} \\ k_y^2 c_{44} - \rho\omega^2 & 0 & -ik_y e_{24} & 0 \\ 0 & \frac{ik_y e_{15}}{\epsilon_{11} c_{55}^D} & 0 & i\omega \left( \frac{k_y^2 c_{55}^D}{\omega^2 \epsilon_{11} c_{55}^D} - \mu_3 \right) \\ -k_y \omega e_{24} & 0 & -i\omega \epsilon_{22} & 0 \end{array} \right) \quad (1.2.2b)$$

$$\vec{W} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

Необходимо отметить наличие внутренней симметрии элементов в матрицах: в (1.2.2a)  $b_{13} = b_{42}; b_{24} = b_{13}; b_{16} = i\omega b_{52}; b_{46} = i\omega b_{53};$  в (1.2.2b)  $b_{14} = -i\omega b_{32}; b_{23} = -i\omega b_{41}.$

При распространении волн в плоскости  $XOZ$  ( $k_y=0$ ) матрица коэффициентов (1.2.1) для ромбической сингонии класса  $mm2$  распадается на независимые матрицы, имеющих следующие структуры:

$$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & \frac{e_{31}}{c_{11}} \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_z & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}^D} & \frac{k_z e_{15}}{\omega \epsilon_1 c_{55}^D} & 0 \\ 0 & b_{13} & k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_z \left( \frac{c_{13} e_{31}}{c_{11}} - e_{33} \right) \\ 0 & i\omega b_{16} & i\omega b_{46} & 0 & 0 & i\omega \epsilon_{33}^T \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & i\omega \left( \mu_{22} - \frac{k_z}{\omega^2 \epsilon_{11}^T} \right) & 0 \end{array} \right) \quad (1.2.3a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_z, \sigma_{xz}, H_y, E_z)^t$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & 0 \\ k_z^2 c_{44} - \rho\omega^2 & 0 & -ik_z e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega\mu_3 \\ -\omega k_z e_{24} & 0 & i\omega \left( \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_1} - \epsilon_{22} \right) & 0 \end{array} \right) \quad (1.2.3b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_y, \sigma_{xy}, E_y, H_z)^t$$

Для волн, распространяющихся в пьезоэлектрических средах ромбической симметрии класса 222, матрица коэффициентов из (1.1.20) имеет следующий вид:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{310} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & 0 & b_{48} & b_{49} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & b_{57} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & 0 & b_{68} & b_{69} & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega b_{48} & 0 & -i\omega b_{68} & 0 & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{57} & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{310} & 0 & 0 & -b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & i\omega b_{49} & 0 & i\omega b_{69} & 0 & 0 & -b_{79} & b_{109} & 0 \end{array} \right] \quad (1.2.4)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z, H_y, E_z)^t$$

Здесь:  $b_{12} = \frac{1}{c_{11}}$ ;  $b_{13} = \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}}$ ;  $b_{15} = \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}}$ ;

$$\begin{aligned}
b_{21} &= -\rho\omega^2; b_{24} = ik_y; b_{26} = ik_z; b_{34} = \frac{1}{c_{66}}; \\
b_{43} &= -\rho\omega^2 + k_y^2 \left( c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) + k_z^2 (c_{44} + \frac{e_{14}^2}{\epsilon_{11}}); b_{45} = k_y k_z \left( c_{23} + c_{44} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} \right); \\
b_{48} &= \frac{ik_y k_z e_{14}}{\omega \epsilon_{11}}; b_{49} = -\frac{ik_z^2 e_{14}}{\omega \epsilon_{11}}; b_{56} = \frac{1}{c_{55}^D}; b_{57} = \frac{e_{25}}{c_{55}}; \\
b_{65} &= -\rho\omega^2 + k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) + k_y^2 (c_{44} + \frac{e_{14}^2}{\epsilon_{11}}); b_{68} = ik_y^2 \frac{e_{14}}{\omega \epsilon_{11}}; b_{69} = ik_y k_z \frac{e_{14}}{\omega \epsilon_{11}}; \\
b_{78} &= i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{11}} - \mu_{33} \right); b_{79} = -\frac{ik_y k_z}{\omega \epsilon_{11}}; b_{87} = i\omega \left( \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_{11}} - \epsilon_{22}^T \right); \\
b_{109} &= i\omega \left( \mu_{22} - \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon_{11}} \right); b_{910} = i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_{11}} \right); \\
c_{55}^D &= c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}; \epsilon_{22}^T = \epsilon_{22} + \frac{e_{25}^2}{c_{55}}; \epsilon_{33}^T = \epsilon_{33} + \frac{e_{36}^2}{c_{66}};
\end{aligned}$$

При распространении волн вдоль плоскости  $XOZ$  ( $k_y=0$ ) матрица коэффициентов (1.2.4), для ромбической сингонии класса 222, распадается на независимые матрицы, имеющие следующие структуры:

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 \\
-\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y & 0 & 0 \\
b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & \frac{e_{36}}{c_{66}} \\
0 & b_{13} & k_y^2 \left( c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i\omega b_{36} & 0 & i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_{11}} \right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & i\omega \mu_{22} & 0
\end{pmatrix} \quad (1.2.5a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{c_{55}} & \frac{e_{25}}{c_{55}} & 0 \\
k_y^2 c_{44}^D - \rho\omega^2 & 0 & 0 & \frac{ie_{14} k_y^2}{\omega \epsilon_{11}} \\
-i\omega b_{13} & 0 & 0 & i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{11}} - \mu_3 \right) \\
0 & -i\omega b_{13} & i\omega \epsilon_{22}^T & 0
\end{pmatrix} \quad (1.2.5b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

При распространении вдоль плоскости  $XOZ$  ( $k_y=0$ ) матрица коэффициентов (1.2.4), для ромбической сингонии класса 222, распадается на независимые матрицы имеющих следующие структуры:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_z & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} & \frac{e_{25}}{c_{55}} & 0 \\ 0 & b_{13} & k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega\mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{35} & i\omega \left( \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_1} - \epsilon_{22}^T \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.6a)$$

$$\vec{W} = (u_x, \sigma_{xx}, u_z, \sigma_{xz}, H_y, E_z)^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & \frac{e_{36}}{c_{66}} \\ k_z^2 c_{44}^D - \rho\omega^2 & 0 & -\frac{ik_z^2 e_{14}}{\omega \epsilon_{11}} & 0 \\ 0 & i\omega b_{14} & 0 & i\omega_{33}^T \\ i\omega b_{23} & 0 & i\omega \left( \mu_2 - \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon_{11}} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.6b)$$

$$\vec{W} = (u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

В рамках методом матрицанта нет необходимости дополнительно определять поляризацию упругих волн и доказывать их взаимную ортогональность как в [2, 42]. В методе матрицанта [67] поляризация определяется вектором-столбцом.

С помощью математического пакета символьных вычисления реализован алгоритм построения структуры матрицы коэффициентов вплоть до моноклинной симметрии в аналитическом виде [74, A.15].

### 1.2.2 Неоднородность среды вдоль оси Y

В случае неоднородной среды вдоль оси Y вместо (1.1.5) используется представления решений для искомых функции в виде:

$$f(x, y, z, t) = \xi(y) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_z z) \quad (1.2.7)$$

Матрицы коэффициентов определяются относительно вектор-столбца:  $\vec{W} = (u_y, \sigma_{xy}, u_x, \sigma_{xx}, u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z, H_y, E_z)^t$ . При распространении волн в плоскости  $XOY$  ( $k_z=0$ ) матрица коэффициентов для ромбической симметрии класса  $mm2$  распадается на независимые матрицы, имеющих следующие структуры:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{22}} & \frac{ik_x c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 & \frac{e_{32}}{c_{22}} \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_x & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & k_x^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_x^2 \left( \frac{c_{12} e_{32}}{c_{22}} - e_{31} \right) \\ 0 & i\omega b_{16} & i\omega b_{46} & 0 & 0 & i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_{22}} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega \mu_{22} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.8a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}^D} & 0 & \frac{k_x e_{24}}{\omega \epsilon_{33} c_{44}^D} \\ k_x^2 c_{55} - \rho\omega^2 & 0 & -ik_y e_{15} & 0 \\ 0 & i\omega b_{14} & 0 & i\omega \left( \mu_3 - \frac{k_x^2 c_{44}}{\omega^2 \epsilon_{22} c_{44}^D} \right) \\ i\omega b_{23} & 0 & i\omega \epsilon_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.8b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{yz}, E_x, H_z)^t$$

$$c_{44}^D = c_{44} + e_{24}^2 / \epsilon_{22}; \epsilon_{33}^T = \epsilon_{33} + e_{32}^2 / c_{22}.$$

При распространении волн в плоскости XOY ( $k_z=0$ ) матрица коэффициентов для ромбической симметрии класса 222 распадается на независимые матрицы, имеющих следующие структуры:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}} & \frac{e_{14}}{c_{44}} & 0 \\ k_x^2 c_{55}^D - \rho\omega^2 & 0 & 0 & -\frac{ie_{25} k_x^2}{\omega \epsilon_{11}} \\ -i\omega b_{13} & 0 & 0 & -i\omega \left( \frac{k_x^2}{\omega^2 \epsilon_{22}} - \mu_3 \right) \\ 0 & -i\omega b_{13} & i\omega \epsilon_{11}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.9a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{yz}, E_x, H_z)^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{22}} & \frac{ik_x c_{12}}{c_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_x & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & \frac{e_{36}}{c_{66}} \\ 0 & b_{13} & k_x^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & 0 & -i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_{22}} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega \mu_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.9b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_y, \sigma_{yy}, u_x, \sigma_{xy}, H_x, E_z)^t$$

$$\text{Здесь } c_{55}^D = c_{55} + e_{25}^2 / \epsilon_{22}; \epsilon_{33}^T = \epsilon_{33} + e_{36}^2 / c_{66}; \epsilon_{11}^T = \epsilon_{11} + e_{14}^2 / c_{44}.$$

### 1.2.3 Неоднородность среды вдоль оси Z

В случае неоднородности сред вдоль оси Z используется представления решений для искомых функции в виде [73]:

$$f(x, y, z, t) = \xi(z) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y) \quad (1.2.10)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами определяется относительно вектора [71, 73]:

$$\bar{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \quad (1.2.11)$$

Матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений первого порядка для ромбической симметрии класса mm2 имеет следующий вид [74]:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & 0 & b_{18} & b_{19} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{310} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & 0 & b_{48} & b_{49} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & b_{57} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & 0 & b_{68} & b_{69} & 0 \\ 0 & i\omega b_{18} & i\omega b_{48} & 0 & i\omega b_{68} & 0 & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{57} & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{310} & 0 & 0 & b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & -i\omega b_{19} & -i\omega b_{49} & 0 & -i\omega b_{69} & 0 & 0 & -b_{79} & b_{109} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{W} = \begin{bmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ E_y \\ H_x \\ H_y \\ E_x \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

где  $b_{12} = S \epsilon_{33}$ ;  $b_{13} = iSk_x(\epsilon_{33} c_{13} + e_{31}e_{33})$ ;  $b_{15} = iSk_y(\epsilon_{33} c_{32} + e_{32}e_{33})$ ;  $b_{110} = e_{31}/c_{11}$ ;

$$b_{21} = -\rho\omega^2; b_{24} = ik_x; b_{26} = ik_y; b_{34} = 1/c_{55}; b_{310} = e_{15}/c_{55};$$

$$b_{43} = -\rho\omega^2 + k_y^2 c_{66} + k_x^2 S(\epsilon_{33} (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) + c_{33}e_{31}^2 + e_{33}(c_{11}e_{33} - 2c_{13}e_{31}));$$

$$b_{45} = k_x k_y S(\epsilon_{33} (c_{33}(c_{12} + c_{66}) - c_{13}c_{32})) + c_{33}e_{31}e_{32} - e_{33}(c_{32}e_{31} + c_{13}e_{32} - (c_{12} + c_{66})e_{33});$$

$$b_{48} = \frac{i}{\omega} k_x k_y S(c_{13}e_{33} - c_{33}e_{31}); b_{49} = \frac{i}{\omega} k_x^2 S(c_{33}e_{31} - c_{13}e_{33}); b_{56} = 1/c_{44}; b_{57} = e_{24}/c_{44};$$

$$b_{65} = -\rho\omega^2 + k_x^2 c_{66} + k_y^2 S(\epsilon_{33} (c_{22}c_{33} - c_{32}^2) + c_{33}e_{32}^2 + e_{33}(c_{22}e_{33} - 2c_{32}e_{32}));$$

$$b_{68} = \frac{i}{\omega} k_y^2 S(c_{32}e_{33} - c_{33}e_{32}); b_{69} = \frac{i}{\omega} k_x k_y S(c_{33}e_{32} - c_{32}e_{33});$$

$$b_{78} = -i\omega \left( \frac{Sk_y^2 c_{33}}{\omega^2} - \mu_1 \right); b_{79} = \frac{ik_x k_y S c_{33}}{\omega}; b_{87} = i\omega \left( \epsilon_{22} + \frac{e_{24}^2}{c_{44}} \right) - \frac{im^2}{\omega\mu_{33}};$$

$$b_{810} = \frac{ik_x k_y}{\omega\mu_{33}}; b_{910} = -i\omega \left( \epsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{55}} \right) + \frac{k_y^2}{\omega\mu_{33}}; b_{109} = i\omega \left( \frac{k_x^2 S c_{33}}{\omega^2} - \mu_2 \right); S = \frac{1}{\epsilon_{33} c_{33} + e_{33}^2}.$$

Из структуры матрицы коэффициентов видно, что в объемном случае все волны взаимосвязаны. Для ромбической симметрии класса  $mm2$  матрица коэффициентов (1.2.12) распадается на матрицы при  $k_y=0$  (плоскость  $XOZ$ ):

$$\begin{pmatrix} 0 & S \epsilon_{33} & ik_x S(\epsilon_{33} c_{13} + e_{31} e_{33}) & 0 & -\frac{e_{33}}{\omega} k_x S & 0 \\ -\rho \omega^2 & 0 & 0 & ik_x & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} & 0 & e_{15}/c_{55} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & \frac{i}{\omega} k_x^2 S(c_{33} e_{31} - c_{13} e_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{36} & 0 & -i\omega \left( \epsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{55}} \right) \\ 0 & i\omega b_{15} & i\omega b_{45} & 0 & i\omega \left( \frac{k_x^2}{\omega^2} S c_{33} - \mu_2 \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$\vec{W} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, H_y, E_x)^t$$

здесь  $b_{43} = -\rho \omega^2 + k_x^2 S(\epsilon_{33} (c_{11} c_{33} - c_{13}^2) + c_{33} e_{31}^2 + e_{33} (c_{11} e_{33} - 2c_{13} e_{31}))$ ;

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}} & \frac{e_{24}}{c_{44}} & 0 \\ k_x^2 c_{66} - \rho \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ -i\omega b_{13} & 0 & 0 & -i\omega \mu_1 \\ 0 & i\omega b_{13} & i\omega \left( \epsilon_{22} + \frac{e_{24}^2}{c_{44}} \right) - \frac{ik_x^2}{\omega \mu_{33}} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

$$\vec{W} = (u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x)^t$$

Похожую структуру имеем в случае распространения волн в плоскости ( $YOZ$ )  $k_x=0$ . Полученные структуры матрицы коэффициентов для плоскостей  $XOZ$  и  $YOZ$  отличается от структур для направлении  $X$  и  $Y$  нехваткой одного пьезомодуля.

### 1.3 Структура матрицы коэффициентов для кристаллов тетрагональной симметрии классов $4mm$ и $\bar{4}2m$

В случае тетрагональной симметрии класса  $4mm$  и  $\bar{4}2m$  упругие модули имеют вид [3]:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

Матрицы пьезоэлектрических модулей для тетрагональной симметрии класса  $4mm$  и  $\bar{4}2m$  имеют соответственно [3]:

$$e_{i\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; e_{i\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

Тензоры электрической и магнитной проницаемости:  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$ ;  $\mu_{11} = \mu_{22} \neq \mu_{33}$ .

Общее число физико-механических параметров пьезоэлектрической среды тетрагональной симметрии классов  $4mm$  и  $\bar{4}2m$ , включая плотность среды равно 14 и 13 соответственно.

Большинство пьезоэлектрических керамик ( $\text{BaTiO}_3$ , PZT-4 и др.) из перовскитной группы имеют тетрагональную симметрию. В случае неоднородности параметров пьезосреды вдоль оси X, для волн распространяющихся в средах тетрагональной симметрии класса  $4mm$  матрица коэффициентов имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ic_{12}k_y}{c_{11}} & 0 & \frac{ic_{13}k_z}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e_{31}}{c_{11}} \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y & 0 & ik_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & 1/c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & -ik_z e_{15} & 0 & 0 & b_{410} \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_{44}^D} & 0 & -\frac{e_{15}k_y}{\omega \epsilon_{11} c_{44}^D} & \frac{e_{15}k_z}{\omega \epsilon_{11} c_{44}^D} & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 & 0 & b_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{58} & 0 & b_{78} & -\frac{ik_y k_z}{\omega \epsilon_{11}^T} & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 & 0 & -\frac{ik_y k_z}{\omega \mu_{11}} \\ 0 & i\omega b_{110} & i\omega b_{410} & 0 & i\omega b_{610} & 0 & -b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{59} & 0 & -b_{79} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

$$\vec{W} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{yy}, u_z, \sigma_{zz}, E_y, H_z, H_y, E_z)^t$$

$$\text{Здесь: } b_{43} = -\rho\omega^2 + k_y^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) + k_z^2 c_{44}; \quad b_{45} = k_y k_z \left( \left( 1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right) c_{13} + c_{44} \right);$$

$$b_{410} = -\frac{ik_y (c_{11} - c_{12}) e_{31}}{c_{11}}; \quad b_{65} = -\rho\omega^2 + k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) + k_y^2 c_{44}; \quad b_{610} = ik_z \left( \frac{c_{13} e_{31}}{c_{11}} - e_{33} \right);$$

$$b_{78} = i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{11}^T} - \mu_{33} \right); \quad b_{87} = i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_1} - \epsilon_{11} \right); \quad b_{109} = i\omega \left( \mu_1 - \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon_{11}^T} \right); \quad b_{910} = i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_1} \right);$$

$$\epsilon_{11}^T = \epsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}}; \quad \epsilon_{33}^T = \epsilon_{33} + \frac{e_{31}^2}{c_{11}};$$

При распространении волн в плоскости  $XOY$  ( $k_z=0$ ) матрица коэффициентов (1.3.3) для пьезокристаллов тетрагональной симметрии класса  $4mm$  распадается на независимые матрицы, имеющих структуры:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_y c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & \frac{e_{31}}{c_{11}} \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & 1/c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & k_y^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y^2 e_{31} \left( 1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right) \\ 0 & i\omega b_{16} & i\omega b_{46} & 0 & 0 & i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_1} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega \mu_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.4a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}^D} & 0 & \frac{k_y e_{15}}{\omega \epsilon_{11} c_{44}^D} \\ k_y^2 c_{44} - \rho\omega^2 & 0 & -ik_y e_{15} & 0 \\ 0 & -i\omega b_{14} & 0 & i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{11}^T} - \mu_3 \right) \\ -i\omega b_{23} & 0 & -i\omega \epsilon_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.4b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

При распространении волн в плоскости  $XOZ$  ( $k_y=0$ ) матрица коэффициентов (1.3.3) для пьезокристаллов тетрагональной симметрии класса  $4mm$  распадается на независимые матрицы со структурой:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{31} & 0 & 0 & b_{16} \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 \\ 0 & b_{31} & b_{43} & 0 & 0 & b_{46} \\ 0 & i\omega b_{16} & i\omega b_{46} & 0 & 0 & b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & b_{35} & b_{65} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.4b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_z, \sigma_{xz}, H_y, E_z)^t$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ -i\omega b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xy}, E_y, H_z)^t \quad (1.3.4b)$$

Волны распространяющиеся в средах тетрагональной симметрии класса  $\bar{4}2m$  описываются матрицей коэффициентов:

$$\left( \begin{array}{cccccccccc}
0 & \frac{1}{c_{66}} & \frac{ic_{12}k_y}{c_{11}} & 0 & \frac{ic_{13}k_z}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y & 0 & ik_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{24} & 0 & 0 & 1/c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e_{36}}{c_{66}} \\
0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & 0 & \frac{ik_y k_z e_{14}}{\omega \epsilon_{11}} & -\frac{ik_z^2 e_{14}}{\omega \epsilon_{11}} & 0 \\
b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_{44}} & \frac{e_{14}}{c_{44}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & 0 & \frac{ik_y^2 e_{14}}{\omega \epsilon_{11}} & -b_{48} & 0 \\
0 & 0 & -i\omega b_{48} & 0 & -i\omega b_{68} & 0 & 0 & b_{78} & -\frac{ik_y k_z}{\omega \epsilon_{11}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{57} & b_{87} & 0 & 0 & -\frac{ik_y k_z}{\omega \mu_{11}} \\
0 & 0 & 0 & i\omega b_{310} & 0 & 0 & -b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\
0 & 0 & -i\omega b_{49} & 0 & -i\omega b_{48} & 0 & 0 & -b_{79} & i\omega(\mu_1 - \frac{ik_z^2}{\omega^2 \epsilon_{11}}) & 0
\end{array} \right) \quad (1.3.5)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z, H_y, E_z)^t$$

где

$$b_{43} = -\rho\omega^2 + k_y^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) + k_z^2 c_{44}^D; b_{45} = k_y k_z \left( c_{13} \left( 1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right) + c_{44}^D \right);$$

$$b_{65} = -\rho\omega^2 + k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) + k_y^2 c_{44}^D;$$

$$b_{78} = i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{11}} - \mu_3 \right); b_{87} = i\omega \left( \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_1} - \epsilon_{11}^T \right); b_{910} = i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_1} \right);$$

$$\epsilon_{11}^T = \epsilon_{11} + \frac{e_{14}^2}{c_{44}}; \epsilon_{33}^T = \epsilon_{33} + \frac{e_{36}^2}{c_{66}};$$

В случае распространения волн в плоскости  $XOY$  ( $k_z=0$ ) в средах тетрагональной симметрии класса  $\bar{4}2m$ :

$$\left( \begin{array}{cccccc}
0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_y c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 \\
-\rho\omega^2 & 0 & 0 & ik_y & 0 & 0 \\
b_{24} & 0 & 0 & 1/c_{66} & 0 & e_{36}/c_{66} \\
0 & b_{13} & k_y^2 \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i\omega b_{36} & 0 & i\omega \left( \epsilon_{33}^T - \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_1} \right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & i\omega \mu_1 & 0
\end{array} \right) \quad (1.3.6a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}} & \frac{e_{14}}{c_{44}} & 0 \\ k_y^2 c_{44}^D - \rho \omega^2 & 0 & 0 & \frac{ik_y^2 e_{14}}{\omega \epsilon_{11}} \\ -i\omega b_{24} & 0 & 0 & i\omega \left( \frac{k_x^2}{\omega^2} \epsilon_{11} - \mu_3 \right) \\ 0 & -i\omega b_{13} & i\omega \epsilon_{11}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.66)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

При распространении волн по плоскости (XOZ)  $k_y=0$  в средах тетрагональной симметрии класса  $\bar{4}2m$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{11}} & \frac{ik_z c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\rho \omega^2 & 0 & 0 & ik_z & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & 1/c_{44} & e_{14}/c_{44} & 0 \\ 0 & b_{13} & k_z^2 \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) - \rho \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{35} & i\omega \left( \frac{k_z^2}{\omega^2} \mu_1 - \epsilon_{11}^T \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.7a)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_x, \sigma_{xx}, u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & \frac{e_{36}}{c_{66}} \\ k_z^2 c_{44}^D - \rho \omega^2 & 0 & -\frac{ik_z^2 e_{14}}{\omega \epsilon_{11}} & 0 \\ 0 & i\omega b_{14} & 0 & i\omega \epsilon_{33}^T \\ i\omega b_{23} & 0 & -i\omega \left( \frac{ik_z^2}{\omega^2} \epsilon_{11} - \mu_1 \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.7b)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_y, \sigma_{xy}, H_y, E_z)^t$$

Таким образом, из (1.3.66), (1.3.76) для матриц коэффициентов 4-го порядка рассмотренных классов (mm2, 222, 4mm,  $\bar{4}2m$ ) пьезоэлектрических сред имеем две различные структуры:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & \pm i\omega b_{14} & 0 & b_{34} \\ \pm i\omega b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \vec{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} u_i \\ \sigma_{ij} \\ E_i \\ H_k \end{pmatrix} \quad (1.3.8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ i\omega b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & i\omega b_{13} & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} u_i \\ \sigma_{ij} \\ E_i \\ H_k \end{pmatrix} \quad (1.3.9)$$

В зависимости от плоскости среза, компоненты  $(u_i, \sigma_{ij})$  могут быть  $(u_z, \sigma_{xz})$  или  $(u_y, \sigma_{xy})$ .

В [74] рассмотрены матрицы коэффициентов в случае неоднородности среды вдоль осей X, Y, Z для пьезоэлектрических сред вплоть до моноклинной симметрии. Показано, что разделение (независимое распространение) сдвиговой упругой SH волны с TE волной от связанных P, SV и TM волн дает возможность рассматривать их отдельно. Такое разделение сохраняется для случаев неоднородности вдоль осей X и Y для кристаллов четной симметрии [74, 77, 78].

В рамках данной работы будут анализированы матрицы со структурой (1.3.8) и (1.3.9) описывающие связанные акустоэлектромагнитные волны.

#### 1.4 Матрицант для однородных пьезосред. Аналитическое решение

В настоящее время матричный метод является одним из наиболее эффективных и широко применяемых методов в различных областях изучения волновых процессов как в периодических структурах различной природы, в сейсмологии [43-48], в исследовании волн в пьезоэлектрических средах [83] и в волноводной оптике [49].

Матричный метод изучения упругих волн был предложен в работах Thomson и Haskell в 1950-х годах для численного анализа исследования волнового поля при отражении волн от системы однородных слоев [43, 44]. Исследование уравнений движения упругой среды на основе системы уравнений первого порядка с шестимерным вектором предложено Stroh в 1962 [56, 57]. Матричное уравнение с шестимерным вектором разработанный для описания дислокации и линейных сил в анизотропных средах Stroh [56] был развит на восьмимерный вектор для описания упругих волн в пьезоупругих диэлектриках в квазистатическом приближении Barnett и Lothe [86]. Метод исследования полей отраженных ЭМ волн в непрерывно неоднородной слоистой среде был предложен Бреховских Л.М. [48]. Развиваются методы описания волн при исследовании распространения волн в стратифицированных и многослойных структурах. Основная проблема заключается в получении матрицы фундаментальных решений – матрицанта [50-52].

Основными направлениями дальнейшего развития матричных методов являлись модификации численного анализа произведения матриц и численного исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений [53, 54]. А.Н. Подлипенец предложил менять местами отдельные элементы многомерного составного вектора для того, чтобы привести систему дифференциальных уравнений движения к Гамильтонову виду [55]. Суть

метода, развиваемого Шульгой Н.А. и ее учениками [54], заключается в сведении краевых задач к бесконечным системам алгебраических уравнений, получении дисперсионных уравнений на основе формализма периодических гамильтоновых систем и их численной реализации.

Все же, при широком применении различных подходов матричного формализма, таких как матрица Грина-Кристофеля, метод Стро, матрица Войгта [2, 56-58] проблема построения и изучения структуры матрицантов в работах по исследованию волновых процессов практически отсутствуют. Элементы симметрии установлены для матриц пропагаторов четвертого порядка в работах [45, 54] которые не привели в дальнейшем к изучению структуры решений. Впервые вопрос о структуре матрицанта был рассмотрен С. Тлеукуновым в 1980-х годах в [59-64]. В [60] на основе применения полиномов Чебышева-Гегенбауэра построен матрицант конечного периодически неоднородного слоя. Получено модифицированное условие определения уравнений дисперсии в периодических структурах при взаимной трансформации упругих волн. Затем показана применимость метода на неоднородные пьезоэлектрические, пьезомагнитные, электромагнитные, термоупругие среды [69-73].

Описание распространения волн в пьезодиэлектриках связана с использованием уравнения движения совместно с полной системой уравнений Максвелла.

В случае неоднородности пьезоэлектрической среды вдоль оси  $X$  волновые процессы описываются СДУ:

$$\frac{d\bar{\mathbf{W}}}{dx} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{W}}; \quad \bar{\mathbf{W}} = (u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x)^t \quad (1.4.1)$$

Для рассматриваемых задач (SH волны в кристаллах класса  $mm2$ ,  $222$ ,  $4mm$ ,  $\bar{4}2m$ ) Структура матрицы коэффициентов может иметь вид (1.3.8, 1.3.9), приведем их еще раз для направления волн вдоль оси  $X$ :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega b_{14} & 0 & b_{34} \\ -i\omega b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ i\omega b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & i\omega b_{13} & b_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

Можно представить вектор  $\bar{\mathbf{W}}$  в виде:

$$\bar{\mathbf{W}}(x) = \mathbf{T}(x, x_0)\bar{\mathbf{W}}(x_0) \quad (1.4.3)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  – матрица фундаментальных решений;  $\bar{\mathbf{W}}(x_0)$  – произвольный постоянный вектор.

Из (1.4.1) и (1.4.3), используя тождество

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \equiv \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} \equiv \mathbf{I} \quad (1.4.4)$$

следуют выражения для прямого и обратного матрицантов [67]:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dx} = \mathbf{B}\mathbf{T}; \quad \frac{d\mathbf{T}^{-1}}{dx} = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad (1.4.5)$$

Решение матричных уравнений (1.4.5) представимы в виде бесконечных матричных рядов Пеано [113, 114]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(z, z_0) &= \mathbf{I} + \int_{z_0}^z \mathbf{B}(z_1) dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} \mathbf{B}(z_1) \mathbf{B}(z_2) dz_1 dz_2 + \dots \\ \mathbf{T}^{-1}(z, z_0) &= \mathbf{I} - \int_{z_0}^z \mathbf{B}_1(z_1) dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} \mathbf{B}_2(z_2) \mathbf{B}_1(z_1) dz_1 dz_2 - \dots \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

В методе Матрицанта применяется поэлементное сравнение и математическая индукция, которая позволяет выразить элементы обратной матрицанты элементами прямой матрицанты. В работах [50-52] обратный матрицант определяется путем умножения  $\mathbf{T}$ -матрицанта на унитарную  $\mathbf{J}$  матрицу с обеих сторон, что усложняет аналитическое представление.

Структура прямого и обратного матрицантов для пьезоупругих волн распространяющихся в координатной плоскости  $XOZ$  ромбической симметрии класса  $mm2$  имеют вид [67]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ i\omega t_{31} & i\omega t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ i\omega t_{41} & i\omega t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} \\ -i\omega t_{24} & i\omega t_{14} & t_{44} & -t_{34} \\ i\omega t_{23} & -i\omega t_{13} & -t_{43} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4.7a)$$

Структура обратного матрицанта для пьезоупругих волн распространяющихся в координатной плоскости  $XOY$  ромбической симметрии класса  $mm2$  имеет вид [67]:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} & t_{42} & -t_{32} \\ -t_{21} & t_{11} & -t_{41} & t_{31} \\ i\omega t_{24} & -i\omega t_{14} & t_{44} & -t_{34} \\ -i\omega t_{23} & i\omega t_{13} & -t_{43} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4.7b)$$

Как видно из (1.4.7), элементы обратного матрицанта выражаются через элементы прямого матрицанта. Используя представление:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}) \quad (1.4.8)$$

С.Тлеукуновым в 1989 году [60] получено аналитическое представление матрицанта периодически неоднородного слоя при наличии  $n$  – периодов неоднородности:

$$\mathbf{T}(H) = \mathbf{T}_m^n(h) = \mathbf{P}_n(\hat{\mathbf{p}})\mathbf{T}_m - \mathbf{P}_{n-1}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (1.4.9)$$

Здесь  $T_m = T(h)$ - матрица монодромии,  $P_n(\hat{p})$  матричные полиномы Чебышева-Гегенбауера. Если длина волны, распространяющихся в периодической структуре,  $\lambda$  много больше периода неоднородности  $h$ , ( $\lambda \gg h$ ) то представление  $T^n$  (1.4.9) позволяет провести усреднение параметров среды [66-68]:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{B}(x) dx; \quad (1.4.10)$$

и получить матрицант однородной анизотропной среды в аналитической форме. Для СДУ порядка 4x4 матрицант имеет вид [67]:

$$\mathbf{T} = \frac{\langle \mathbf{B} \rangle^2 + \mathbf{I} k_{2x}^2}{k_{2x}^2 - k_{1x}^2} \left( \mathbf{I} \cos k_{1x} x + \frac{\langle \mathbf{B} \rangle}{k_{1x}} \sin k_{1x} x \right) - \frac{\langle \mathbf{B} \rangle^2 + \mathbf{I} k_{1x}^2}{k_{2x}^2 - k_{1x}^2} \left( \mathbf{I} \cos k_{2x} x + \frac{\langle \mathbf{B} \rangle}{k_{2x}} \sin k_{2x} x \right) \quad (1.4.11)$$

Представление (1.4.11) позволяет построить матрицант (4x4) для однородных анизотропных сред в явной аналитической форме. При постоянных параметрах среды, система (1.4.3) имеет аналитическое решение и формула (1.4.11) после преобразования представляется в виде [67]:

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{k_{2x}^2 - k_{1x}^2} \left[ (\mathbf{B}^2 + k_{2x}^2 \mathbf{I}) \cos k_{1x} x - (\mathbf{B}^2 + k_{1x}^2 \mathbf{I}) \cos k_{2x} x - (k_{1x}^2 \mathbf{B} + k_{1x}^2 k_{2x}^2 \mathbf{B}^{-1}) \frac{\sin k_{1x} x}{k_{1x}} + (k_{2x}^2 \mathbf{B} + k_{1x}^2 k_{2x}^2 \mathbf{B}^{-1}) \frac{\sin k_{2x} x}{k_{2x}} \right] \quad (1.4.12)$$

В [67] приводится доказательство, что для рассматриваемых ниже задач определитель матрицанта равен единице:

$$\det |\mathbf{T}| = 1 \quad \det |\mathbf{T}^{-1}| = 1 \quad (1.4.13)$$

В [74] получены инвариантные соотношения используя (1.4.13).

Решение связанной задачи распространения упругих и ЭМ волн в пьезокристаллах основывается на методе матрицанта, разработанного С.Тлеукуновым. Метод отличается от ранее используемых методов [2, 3, 56-58, 86] (Грина-Кристоффеля, Стро-Барнет-Лотье, state-vector approach, transfer matrix, impedance method). В основе метода лежит построение структуры фундаментального решения исходной системы дифференциальных уравнений. Это позволяет определить фундаментальное решение в случае однородных сред – матрицант в аналитическом виде. Метод позволяет при едином подходе раздельно рассматривать компоненты связанных волн для широкого класса анизотропных сред с разнообразными физико-механическими свойствами. Относится к математическим методам изучения фундаментальных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В методе Грина-Кристоффеля (матрица  $3 \times 3$ ) задача сводится к определению собственных значений векторов и векторов поляризации. В методе матрицанта нет необходимости дополнительно определять поляризацию упругих волн и доказывать их взаимную ортогональность как в [2, 3, 42], поляризация определяется вектором-столбцом [67]. Симметричные блоки показывают связь элементов отвечающие за перекачку энергии между типами волн.

В данной главе приведены основные уравнения, описывающие акустические волны в пьезоэлектрических материалах. На основе применения метода разделения переменных уравнения движения упругих анизотропных сред и уравнения Максвелла построена эквивалентная система уравнений первого порядка. Определена структура матриц коэффициентов системы уравнений для тетрагональной и ромбической симметрии пьезоупругих сред и направления координатной оси ( $X, Y, Z$ ), вдоль которой параметры среды в общем случае неоднородны. Проведен анализ полученных матриц, проанализированы типы волн распространяющихся в данных средах, выявлена связь и элементы описывающие взаимную трансформация между волнами различной поляризации и различной физической природы. Обоснована применимость и преимущества метода матрицанта для решения задач связанных упругих и электромагнитных волн в однородных пьезоэлектриках.

## 2 ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

### 2.1 Поверхности упругих и электромагнитных волновых векторов

Фазовые скорости упругих волн в анизотропных средах сильно зависят от направления распространения. Получение аналитической зависимости значения скоростей от угла распространения дает возможность дальнейшего теоретического анализа угла сноса между фазовой и групповой скоростями, значения групповых скоростей, направление потоков энергии и плотности потоков энергии упругих волн.

Компоненты волновых векторов упругой и электромагнитной волны вдоль оси  $OX$   $k_{1x}$ ,  $k_{2x}$  в (1.4.13) определяются из условия [67, 68]:

$$\text{Det}[\mathbf{B}^2 + \lambda^2 \mathbf{I}] = 0, \quad \lambda_1^2 = k_{1x}^2, \quad \lambda_2^2 = k_{2x}^2 \quad (2.1.1)$$

Где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Характеристическое уравнение (2.1.1) сводится к биквадратному (в случае матрицы 4x4) виду относительно  $k_{xi}$ . Из рисунка 2.1 видно, что:

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_i \cos \theta, \quad k_y = m = k_i \sin \theta \\ k_{ix} &= \sqrt{k_i^2 - m^2} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

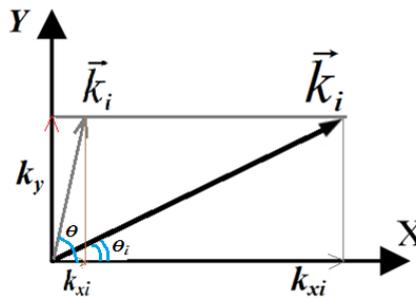


Рисунок 2.1 – К определению волнового вектора

Из (2.1.1) для структуры (1.4.2а) значения волновых векторов  $k_1, k_2$  определяются из:

$$k_{1x,2x} = q \pm \sqrt{q^2 - 4\Delta_1^2 \Delta_2^2} \quad (2.1.3)$$

здесь:  $\Delta_1^2 = -(b_{12}b_{34} + i\omega b_{14}^2)$ ;  $\Delta_2^2 = -(b_{21}b_{43} + i\omega b_{23}^2)$ ;  $q = b_{12}b_{21} - 2i\omega b_{14}b_{23} + b_{34}b_{43}$ .

Если элементы матрицы коэффициентов  $b_{32} = i\omega b_{14}$ ;  $b_{41} = i\omega b_{23}$ , как в случае структуры (1.2.8б), тогда для (2.1.3) используются:

$$\Delta_1^2 = b_{12}b_{34} - i\omega b_{14}^2; \quad \Delta_2^2 = b_{21}b_{43} - i\omega b_{23}^2; \quad q = b_{12}b_{21} + 2i\omega b_{14}b_{23} + b_{34}b_{43}$$

Если матрица коэффициентов имеет структуру как в случае (1.3.9) то для определения проекции волнового вектора (2.1.3) используются:

$$\Delta_1^2 = b_{12}b_{34} - i\omega b_{13}^2; \Delta_2^2 = b_{21}b_{43} - i\omega b_{24}^2; q = b_{12}b_{21} + 2i\omega b_{13}b_{24} + b_{34}b_{43}.$$

Подставляя (2.1.2) в (2.1.3) с учетом элементов  $b_{ij}$  из структуры (1.2.2б) получим выражения  $k_1, k_2$  для ромбической симметрии класса  $mm2$  в XOY плоскости:

$$\alpha k_i^4 - \omega^2 \delta k_i^2 + \omega^4 \gamma = 0 \quad (2.1.4)$$

где

$$\alpha = \cos^4 \theta + \frac{2e_{15}e_{24} + c_{44} \epsilon_1 + c_{55} \epsilon_2}{4c_{55}^D \epsilon_1} \sin^2 2\theta + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{c_{44}^D}{c_{55}^D} \sin^4 \theta = 0$$

$$\delta = \left( \frac{\rho}{c_{44}^D} + \epsilon_1 \mu_3 \right) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{c_{44}^D}{c_{55}^D} \sin^2 \theta + \left( \frac{\rho}{c_{55}^D} + \epsilon_2 \mu_3 \right) \cos^2 \theta; \gamma = \frac{\rho}{c_{55}^D} \epsilon_2 \mu_3;$$

Корни из которого получены в виде:

$$k_{1,2}(\theta) = \omega \sqrt{\frac{\delta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \quad (2.1.5)$$

Здесь знак “+” соответствует упругой SH волне, знак “-” соответствует волновому вектору электромагнитной волны TE поляризации.

В квазитатическом приближении выражение (2.1.5) не связана с ЭМ волной и имеет вид:

$$k_{SH}(\theta) = \omega \sqrt{\frac{\rho(\epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta)}{c_{55}^D \epsilon_1 \cos^4 \theta + c_{44}^D \epsilon_2 \sin^4 \theta + \frac{1}{4}(e_{15}e_{24} + c_{44} \epsilon_1 + c_{55} \epsilon_2) \sin^2 2\theta}} \quad (2.1.6)$$

Легко показать, что (2.1.5) переходит в (2.1.6). Для определения нормали к поверхности волнового вектора и его компонент (проекции) выражение (2.1.6) можно переписать в декартовой (Картезиан) форме:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 \rho \frac{\epsilon_1 k_x^2 + \epsilon_2 k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\frac{c_{55}^D \epsilon_1 k_x^4 + c_{44}^D \epsilon_2 k_y^4}{(k_x^2 + k_y^2)^2} + \frac{e_{15}e_{24} + c_{44} \epsilon_1 + c_{55} \epsilon_2}{4} \sin^2(2 \arctg(\frac{k_x}{k_y}))} \quad (2.1.7)$$

Обратная скорость, обычно называемое медленностью (slowness) [5], имеет важное значение для определения угла сноса, угла отражения, угла преломления и для графического анализа поведения упругих волн в анизотропных средах:

$$R_i(\theta) = \frac{1}{v_i(\theta)} = \frac{k_i(\theta)}{\omega} \quad (2.1.8)$$

Используя полученные выражения построены поверхности волновых векторов и фазовой скорости SH волн для пьезокристаллов ромбической симметрии класса  $mm2$  как  $KTiOAsO_4$  (Рис.2.2). Для ромбических и тетрагональных симметрии поверхность значений скоростей симметричен относительно  $\pi/2$  градусов.

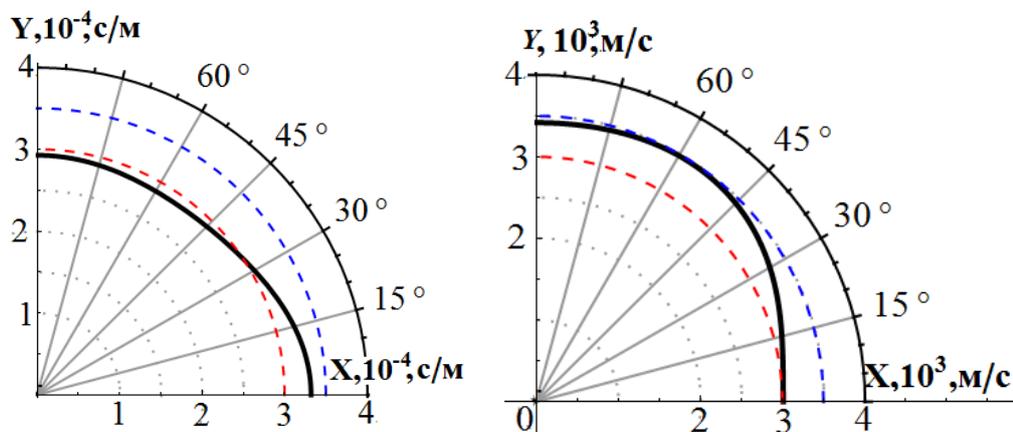
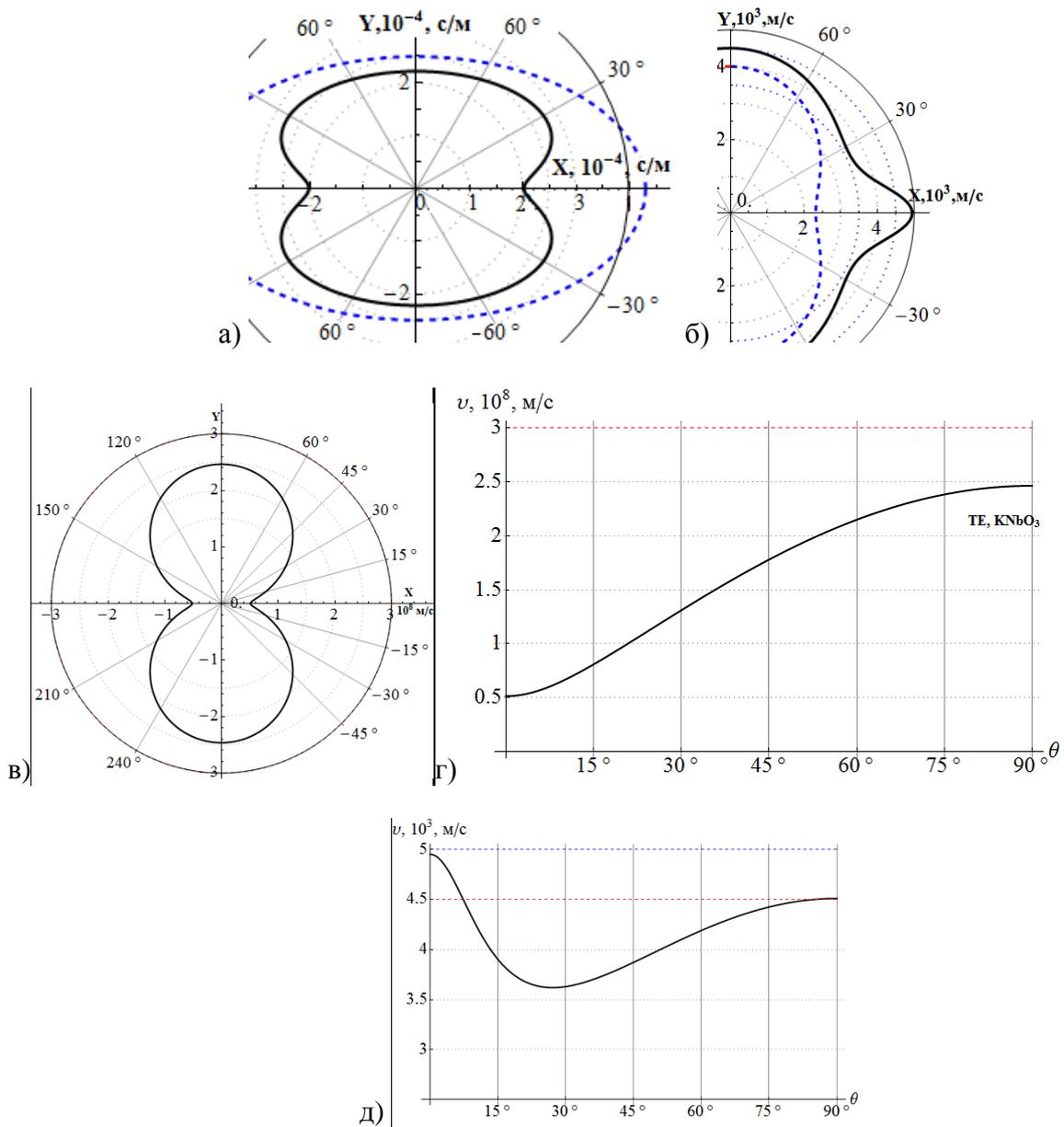


Рисунок 2.2 - Поверхности медленности и скорости SH волн для пьезокристалла  $KTiOAsO_4$

На рис. 2.3а построены поверхности медленности и скорости SH, TE волн для пьезокристалла  $KNbO_3$  (ромбическая симметрия класс  $mm2$ ). Необходимо отметить наличие вогнутости в направлении оси  $X$ , которая обусловлена большим значением и различностью пьезоэлектрических параметров. Из рис. 2.3б видно, что для  $KNbO_3$  учет пьезоэффекта вносит ощутимую разницу в скорости (эффект ужесточения упругости).



а) поверхность волнового вектора; б) скорости SH волн;  
 в) поверхность скорости TE волн; г) скорость TE волн; д) скорость SH волн в  
 декартовой координате;(пунктир-без учета пьезоэффекта)

Рисунок 2.3 – Анализ волновых векторов для  $\text{KNbO}_3$  в плоскости  $XOY$

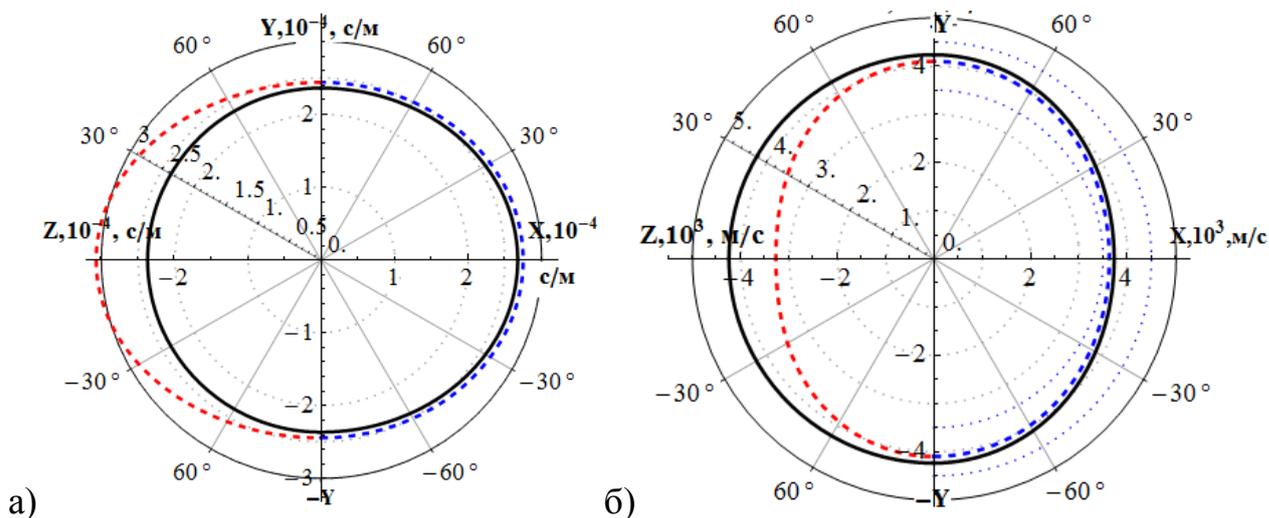
При распространении волн в плоскости  $XOZ$  ( $k_y=0$ ) с матрицей коэффициентов (1.2.3б) имеем аналитический вид волнового вектора:

$$k_{1,2}(\theta) = \omega \sqrt{-\frac{\delta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \quad (2.1.9)$$

где  $\alpha = \cos 2\theta \left( \frac{c_{44}}{c_{66}} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right)$ ;

$$\delta = \frac{\rho}{c_{66}} + \frac{e_{24}^2 \mu_1}{c_{66}} \sin^2 \theta + \left( \frac{c_{44}}{c_{66}} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) \epsilon_2 \mu_1; \gamma = \frac{\rho \epsilon_2 \mu_3}{c_{66}};$$

В этом случае плоскости распространения работает только один пьезопараметр. Поверхности медленности и скорости SH волн для пьезокристалла КТiOAsO<sub>4</sub> имеют слабую анизотропию и влияние пьезоэффекта не сильно выражено (Рис. 2.4).



а) поверхности волновых векторов; б) скорости SH волн;  
(в XOY и YOZ плоскости, пунктир – без учета пьезоэффекта)

Рисунок 2.4 – Анизотропия упругих волн для КТiOAsO<sub>4</sub>

## 2.2 Угол сноса между фазовой и групповой скоростями

Акустическая анизотропия материала проявляется в зависимости фазовой скорости волн от их направления распространения в кристалле. Анизотропия приводит к отклонению направления распространения энергии упругой волны от направления распространения волнового фронта, в общем случае направления групповой и фазовой скоростей упругих волн в анизотропных средах не совпадают [5]. Угол сноса это разность угла  $\varphi$  - направления потока энергии и угла волновой нормали  $\theta$ :  $\psi = \varphi - \theta$ . В акустооптических приборах вызывают интерес кристаллы, в которых наблюдается большой угол акустического сноса – Power flow angle (PFA) [12, 93]. Акустооптическое взаимодействие применяется для анализа параметров упругих волн, распространяющихся в жидких и твердых средах. Акустооптические устройства обеспечивают управление амплитудой, частотой, фазой, поляризацией, а также направлением распространения электромагнитной волны [12]. Для конструирования акустоэлектронных устройств ищут оптимальные срезы и направления с минимальным углом сноса с большой концентрацией акустической энергии.

В данном разделе показана эффективность применения метода матрицанта для задач акустооптики и результаты экспериментального определения угла

сноса для тетрагональных кристаллов. Далее мы используем данную методику для определения угла сноса SH волн в ромбических пьезоэлектриках.

Матрица упругих параметров для тетрагональных кристаллов имеют структуру (1.2.1). Методом матрицанта [67] определены скорости акустической волны в плоскости XOY ( $k_z=0$ ) в виде:

$$v_{1,2}^2 = \frac{1}{2\rho}(c_{11} + c_{66} \pm \Lambda(\theta)) \quad (2.2.1)$$

здесь «+» скорость поперечно-вертикальной (SV) волны, знак «-» для скорости продольной (L) волны, где

$$\Lambda(\theta) = \sqrt{(c_{66} - c_{11})^2 \cos^2 2\theta + (c_{12} + c_{66}) \sin^2 2\theta} \quad (2.2.2)$$

При рассмотрении плоскости XOY ( $k_z=0$ ) поперечно-горизонтальная (SH) упругая волна распространяется независимо от SV и L волн, является изотропной. Скорость определяется как:

$$v_{SH}^2 = (c_{44} + e_{15}^2 / \epsilon_1) / \rho \quad (2.2.3)$$

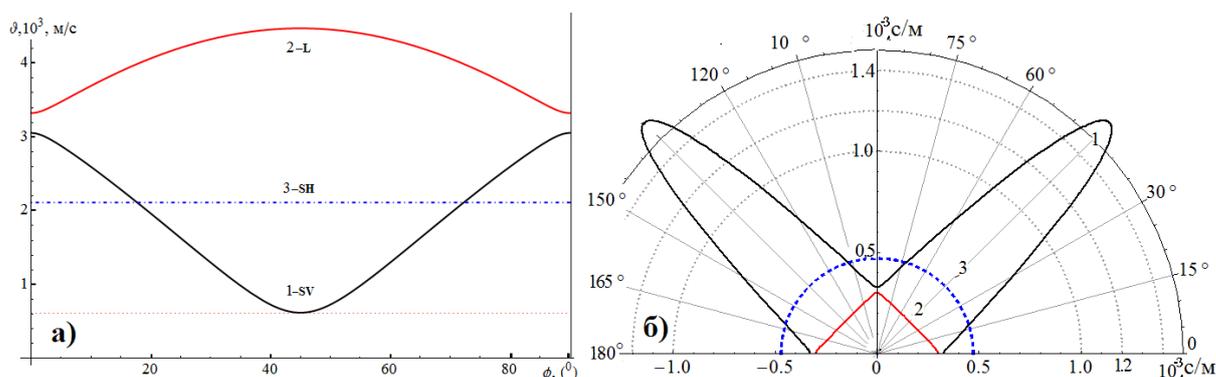
Рассматриваются кристаллы с упругими параметрами среды согласно табл.1.

Таблица 1 –упругие параметры тетрагональных кристаллов [115]

Кристалл	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$C_{11}$ , ГПа	$C_{12}$ , ГПа	$C_{13}$ , ГПа	$C_{33}$ , ГПа	$C_{44}$ , ГПа	$C_{66}$ , ГПа
Парателлуриит- TeO <sub>2</sub> (422)	5984	55,9	51,3	21,7	105,6	26,7	66,2
Каломель Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> ( $\bar{4}mmm$ )	7190	18,925	17,192	15,63	80,37	8,456	12,25
Рутил (TiO <sub>2</sub> )	4300	273	176	149	484	125	194

Пьезодиэлектрические параметры для TeO<sub>2</sub>:  $e_{15}=0.22$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\epsilon_{11}/\epsilon_0=20$ .

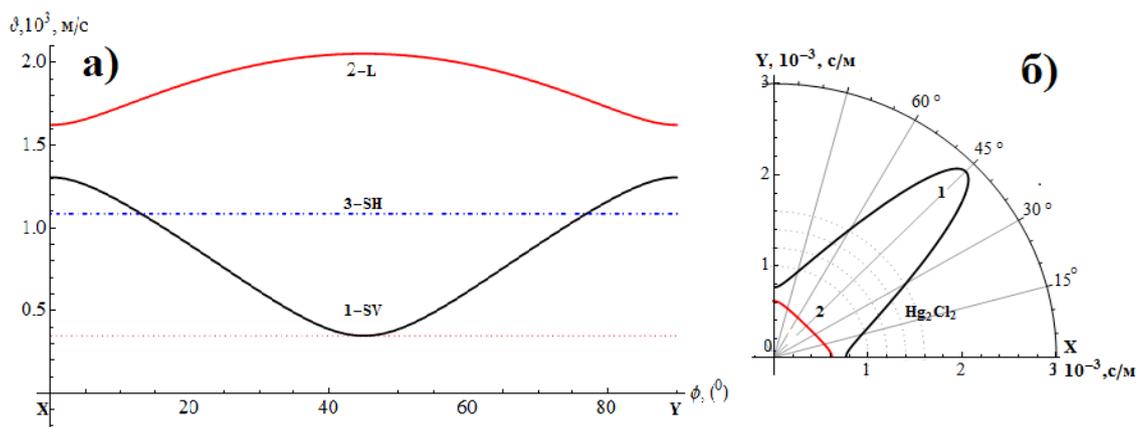
Используя (1.5.8-1.5.10) построены графики значения скоростей (рис. 2.5а) в декартовой и обратных скоростей (рис. 2.5б) в полярной координатах для парателлуриита в плоскости (001).



а) скорости упругих волн; б) поверхности волновых векторов;  
1 – для SV волны, 2 – для продольной волны, 3 – для SH волны

Рисунок 2.5 – Графики значений скоростей и волновых векторов для  $\text{TeO}_2$

На рис. 2.5 особым является направление (110), когда акустическая волна распространяется под углом  $\phi = 45^\circ$  к осям  $X$  и  $Y$ . Продольная волна 2 имеет скорость  $V_L = 4460$  м/с,  $V_{SH} = 2100$  м/с, а 1-поперечная,  $V_{SV} = 616$  м/с отличается низкой скоростью.



а) скорости упругих волн; б) поверхности волновых векторов;  
1 – для SV волны, 2 – для продольной волны

Рисунок 2.6 - Графики значений скоростей и волновых векторов для  $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$

На рисунке 2.6 показаны поверхность значения скорости и волновых векторов для  $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$ . Продольная волна имеет максимальную скорость  $V_L = 2053$  м/с, поперечная –  $V_{SH} = 1084$  м/с, поперечная-  $V_{SV} = 347$  м/с.

Симметрия кривых позволяет ограничиться рассмотрением углов  $\theta$  в диапазоне от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ .

Нормаль к поверхности обратных скоростей дает направление распространения энергии или групповой скорости. Поверхность медленности задана в полярных координатах функцией  $\frac{1}{v(\theta)} = R(\theta)$ . Геометрическое рассмотрение (рис. 2.7) показывает, что угол сноса равен углу прямоугольного треугольника с катетами  $Rd\theta$  и  $\dot{R}d\theta$  [5, 12, 100]:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\dot{R}(\theta)}{R(\theta)} = \operatorname{arctg} \frac{dv/d\theta}{v(\theta)} \quad (2.2.4)$$

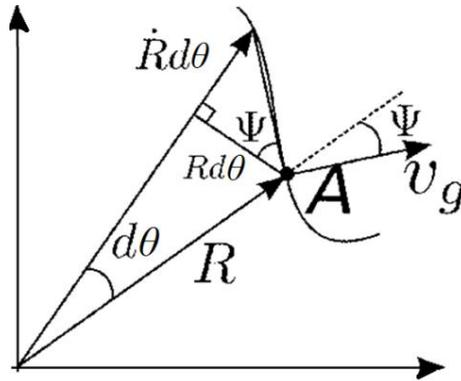


Рисунок 2.7- Графическая иллюстрация для определения угла сноса

Таким образом, угол сноса определяется аналитически, зависимостью  $R(\theta)$  и формулой (2.2.3), либо экспериментально, получив картину Шефера-Бергмана и по ней оценивается значение  $\psi$  для заданного направления  $\theta$  волнового вектора [12].

Методом матрицанта [67] получена аналитическая формула зависимости угла сноса для продольной и поперечной (SV) волны используя (2.2.1, 2.2.4) для тетрагональных кристаллов:

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = -\frac{(c_{12} + c_{66})^2 - (c_{11} - c_{66})^2}{2\Lambda(\theta)(c_{11} + c_{66} \pm \Lambda(\theta))} \sin 4\theta \quad (2.2.5)$$

Выражение (2.2.5) отличается от ранее полученных формул [100] тем, что не зависит от плотности среды. Это позволяет избежать неточностей при расчетах.

В методе матрицанта поляризация волн изначально определено вектором-столбцом, проекции продольных и поперечных волн рассматриваются отдельно. Такой подход позволяет определять угол сноса для поперечной и для продольной составляющих связанной упругой волны отдельно (Рис.2.8).

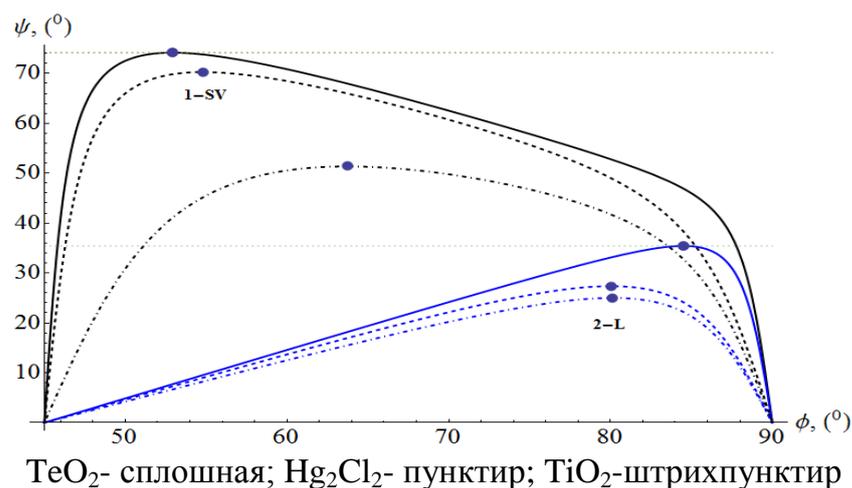


Рисунок 2.8 – Значения угла сноса поперечной (1-SV) и продольной (2-L) волны от угла падения

Значения угла сноса поперечной и продольной волн показаны в рис. 2.8. Максимальное значение угла сноса в парателлурите для поперечной (SV) волны при углах падения  $37.1^\circ$  и  $52.9^\circ$  имеет значение  $74.2^\circ$ , для продольной волны при  $5.5^\circ$  и  $84.5^\circ$  угол сноса составляет  $35.4^\circ$ . Для каломели угол сноса SV волны при углах падения  $35.5$  и  $54.8$  достигает значения  $70.27$ , для продольной волны при  $9.95$  и  $80.05$  угол сноса составляет  $27.5$  (Табл.2).

Таблица 2 – максимальные значения угла сноса для различных упругих сред

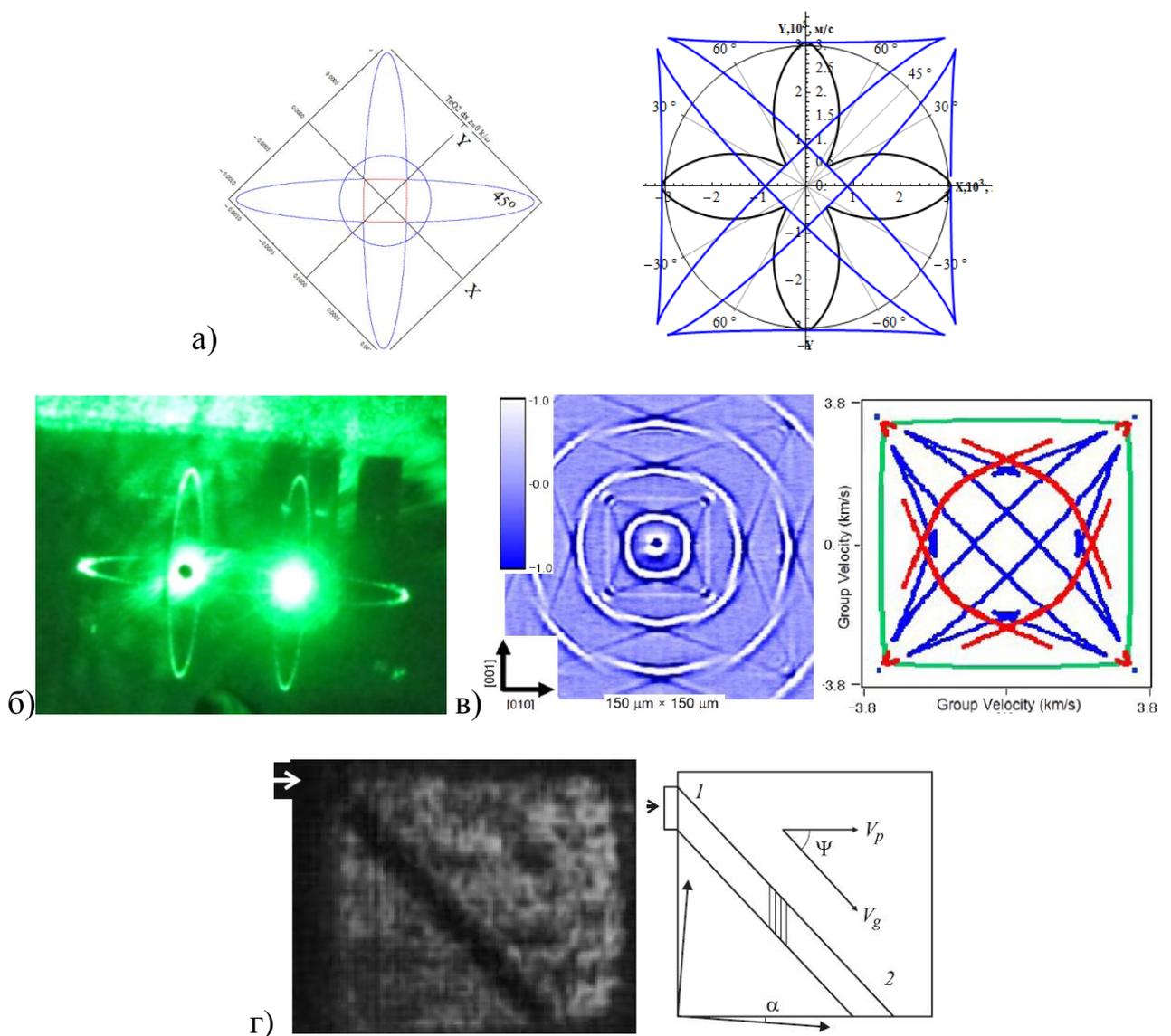
Кристалл	N - коэфф. анизотр.	FPA-SV $\psi_1(\theta), (^\circ)$	FPA-L $\psi_2(\theta), (^\circ)$
Парателлурит $\text{TeO}_2$	28.8	74.2 (52.9)	35.4 (84.5)
Каломель $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$	14.1	70.27 (54.8)	27.5 (80.05)
Рутил $\text{TiO}_2$	4.0	51.4 (63.7)	25.0 (80.14)

Коэффициент анизотропии упругой среды определяется соотношением [5]:

$$N = \frac{v_{\max}^2}{v_{\min}^2} \quad (2.2.6)$$

При рассмотрении других срезов, для плоскостей XOZ и YOZ, не наблюдается высокая анизотропия.

Аналитическая рассчитанная зависимость обратных скоростей и угла сноса между групповой и фазовой скоростями подтверждены экспериментом в период научной стажировки в лаборатории акустооптики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством В.Г. Можяева и В.Б. Волошинова. Проведены исследования по взаимодействию акустических волн с лазерным лучом  $0.532 \text{ мкм}$  (YAG) в сильно анизотропном кристалле парателлурите в режимах Шефера-Бергманна и Рамана-Ната. Получены значения угла сноса для кристаллов тетрагональной симметрии (Рис. 2.9а, б).



а) теоретические расчеты в плоскости XOY [А.3]; б) экспериментально [100, А.3];  
 в) численно, для поверхности [109]; г) эксперимент визуализации угла сноса [97]

Рисунок 2.9 – Графические представления обратной и групповой скорости для парателлурита ( $\text{TeO}_2$ )

Информация об угле сноса очень важна при выборе оптимальных срезов для получения коллимированных акустических волн [12].

Вызывает интерес, один из сложных задач, расчет угла сноса при учете пьезоэлектрического эффекта. Численные расчеты для исследования угла сноса упругих SH волн в тонких пьезоэлектрических пластинах проводились в [92, 116].

Используя аналогичную процедуру, как в (2.2.4), определена производная скорости от угла распространения. Впервые получено аналитическое значение угла сноса в анизотропных пьезоэлектрических средах ромбической симметрии класса  $mm2$  для плоскости XOY:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{((c_r - 1)K_r^2(\sin^2 \theta + \epsilon_r \cos^2 \theta)^2 + K_S(\sin^4 \theta - \epsilon_r \cos^4 \theta))2 \sin 2\theta}{(\sin^2 \theta + \epsilon_r \cos^2 \theta)(K_r^2((\sin^2 2\theta + 4\epsilon_r \cos^4 \theta + c_r(4\sin^4 \theta + \epsilon_r \sin^2 2\theta)) - K_S \sin^2 2\theta))} \quad (2.2.7)$$

$$c_r = \frac{c_{44}^D}{c_{55}^D}; \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}; \quad K_r = \frac{K_{24}^2}{K_{15}^2}; \quad K_S = (K_r \sqrt{c_r \epsilon_r} - 1)^2$$

В рис. 2.10 показаны значения угла сноса для поперечно-горизонтальной (SH) волны в  $\text{KNbO}_3$  и  $\text{KTiOAsO}_4$  от угла направления фазовой скорости.

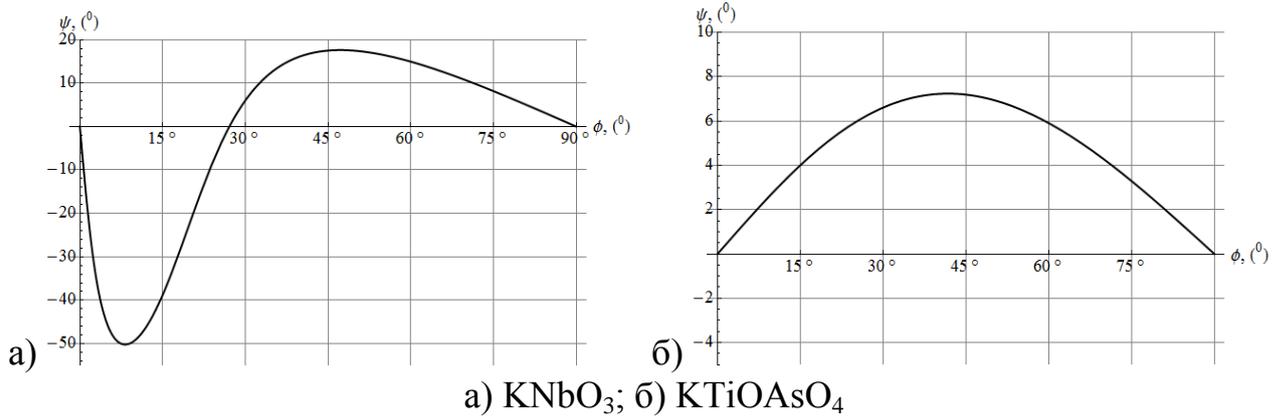


Рисунок 2.10 – Значения угла сноса поперечно-горизонтальной (SH) волны в плоскости XOY

Анализируя на экстремумы формулу (2.2.7) получим точки перегиба и коэффициенты анизотропии (табл.3). Кривая угла сноса при  $27.2^\circ$  меняет знак.

Таблица 3 – Максимальные значения угла сноса SH волн для пьезоупругих сред ромбической симметрии.

Кристалл	N - коэфф. анизотр.	Напр. волн. фронта, ( $^\circ$ )	FPA-SH $\psi_3(\phi)$ , ( $^\circ$ )
$\text{KNbO}_3$	1.87	8.193 47.21	50.19 17.61
$\text{KTiOAsO}_4$	1.29	41.75	7.23

Полученные аналитические зависимости угла сноса тетрагональной и ромбической симметрии далее будут использованы для определения групповой скорости и потока энергии упругих волн.

### 2.3 Анизотропия плотности потока акустической энергии

Групповая скорость упругой волны всегда больше или равна фазовой скорости. Зная угол сноса, и аналитические значения для фазовой скорости можно построить поверхность значений групповой скорости. Скорость потока энергии определяется групповой скоростью [3, 117, 118].

$$v_g(\theta, \psi) = \frac{v_f(\theta)}{\cos \psi} = \frac{1}{R_f(\theta) \cos \psi} = v_E(\varphi) \quad (2.3.1)$$

$$\varphi = \theta + \arctg\left(\frac{1}{v_f} \frac{dv_f}{d\theta}\right)$$

Используя значения угла сноса поперечно-горизонтальной (SH) волны для  $\text{KNbO}_3$  и значения фазовых скоростей получим направления распространения волн ( $0^\circ$ -соответствует направлению X,  $90^\circ$  - направлению Y). Дополняя рис. 2.3а, рисуем зависимость групповой скорости от направления. Как видно из рисунка 2.11а, в области направления  $(-42^\circ, 42^\circ)$  имеются наложения волновых векторов, т.е. в одном направлении могут распространяться до трех волн с различными волновыми фронтами и значениями групповых скоростей (Рисунки 2.11б, 2.11в). Компонента волнового вектора  $k_x$  меняется в зависимости от угла падения по графику (Рис. 1.11г), из которого видно, что при  $\theta = \pm 20.4^\circ$  групповая скорость направлена строго вдоль оси X (Рис. 1.11а).

Наличие вогнутости в направлении оси X, теоретически рассмотрено Балакиревым [2]. Наличие вогнутости интересен тем, что в этой области в одном направлении могут распространяться упругие волны имеющие до трех значений групповой скорости. В то время не были известны кристаллы с такими параметрами как ниобат калия и проблема обнаружения двойного лучеотражения сдвиговых волн без изменения ветви осталась открытой. Решение показано в третьей главе.

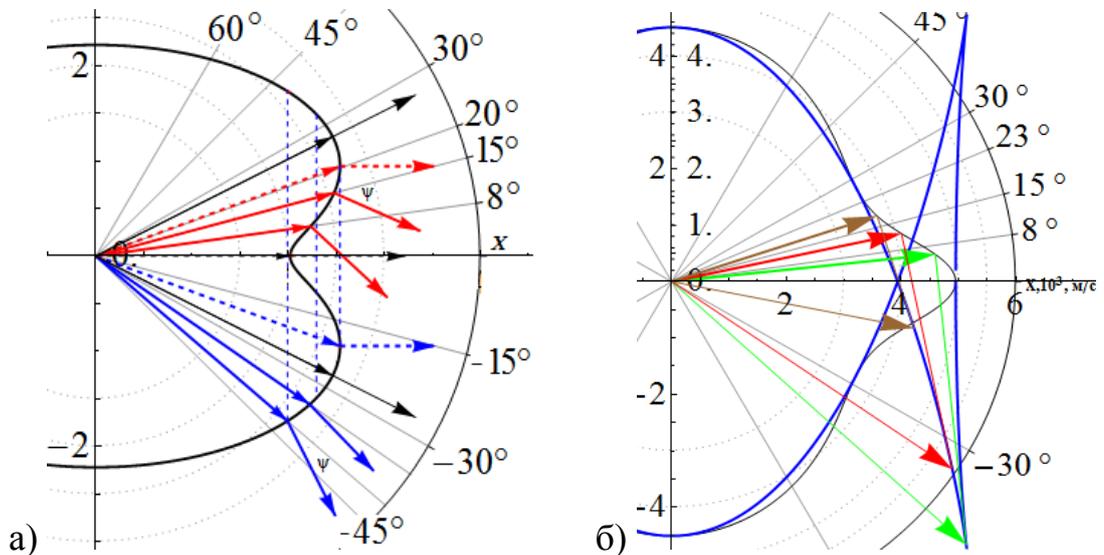
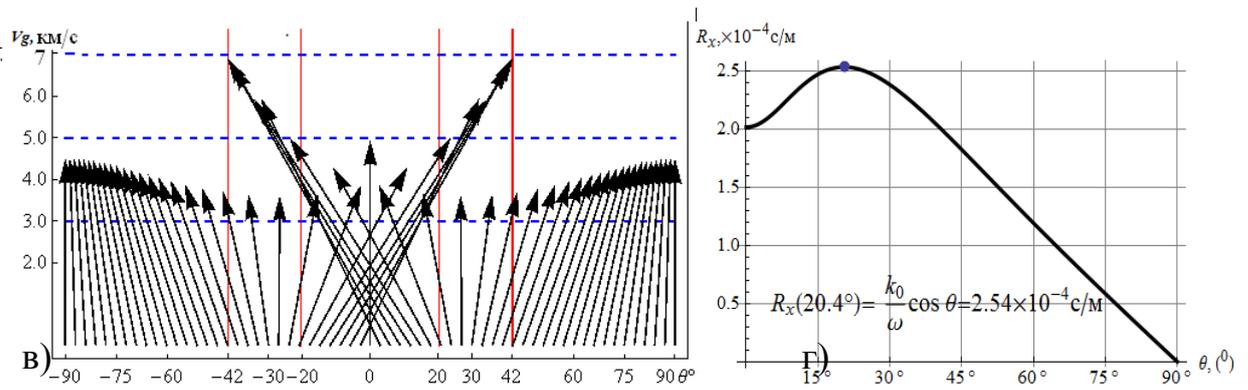


Рисунок 2.11 – Направления групповой скорости SH волн в  $\text{KNbO}_3$ , лист 1



а) нормали к поверхности обратных скоростей; б) значения групповой скорости; в) векторная диаграмма сноса групповой скорости от угла направления; г) в точке  $R_{x\max}$  групповая скорость направлена вдоль оси X

Рисунок 2.11 – Направления групповой скорости SH волн в  $\text{KNbO}_3$ , лист 2

Если проанализировать I и IV квадранты рис.2.11а, видно, что фазовая скорость с первого квадранта уносится анизотропией в четвертую, а с четвертого в первую. В некотором диапазоне имеются до трех значения групповых скоростей в одном направлении. Как видно из рисунка 2.12, плотность распределения потока энергии не равномерна. Поэтому есть необходимость анализа плотности распределения.

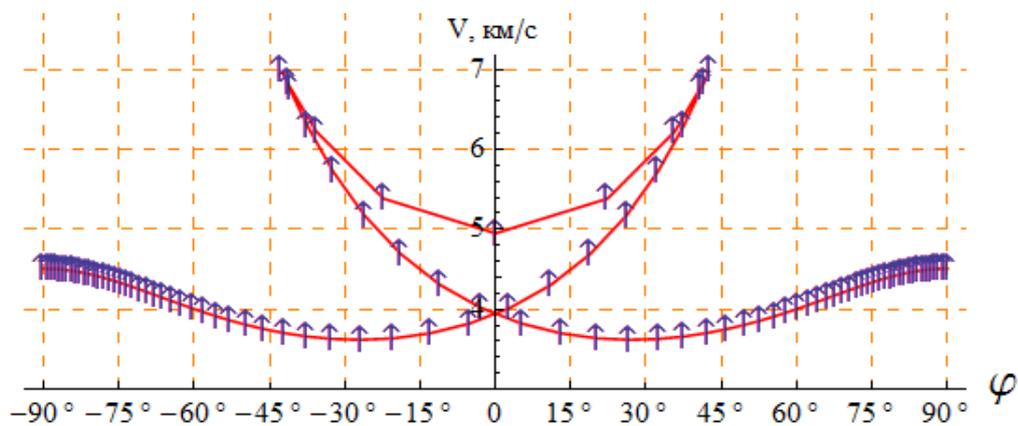


Рисунок 2.12 – К анализу плотности распределение потока энергии в  $\text{KNbO}_3$

В эксперименте, в области «ласточкина хвоста» [112] четко наблюдается (рис. 2.13) высокая концентрация потока энергии. Наблюдаемая картина называется фононной фокусировкой упругих волн.

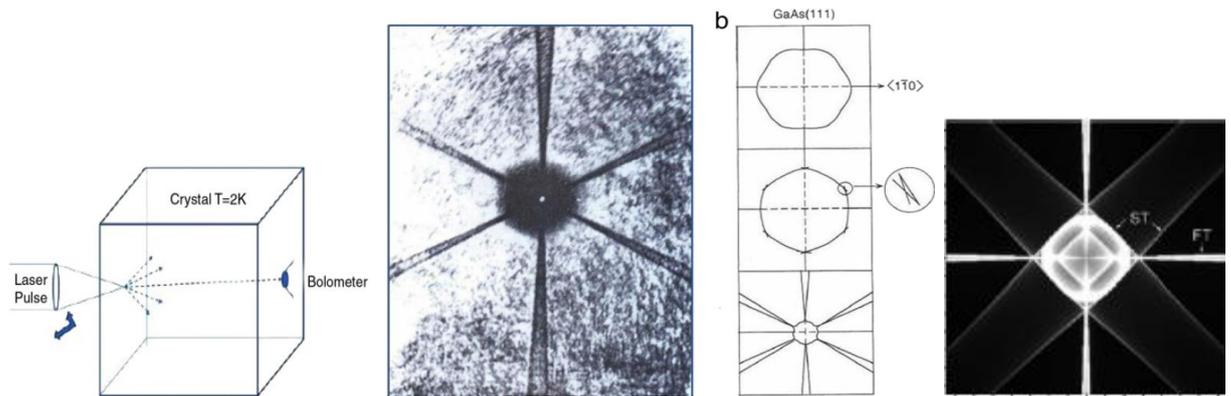


Рисунок 2.13 – Экспериментальное наблюдение фононной фокусировки упругих волн в кубическом кристалле GaAs (111) и в Si (001) [112]

Анизотропия плотности потока акустической энергии в кристалле характеризуется коэффициентом концентрации [111, 118]:

$$A = \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^{-1} = \left| 1 + \frac{d\psi}{d\theta} \right|^{-1} = \frac{1 + v_f^{-2} (dv_f / d\theta)^2}{1 + v_f^{-1} (d^2 v_f / d\theta^2)}, \quad \varphi = \theta + \psi \quad (2.3.2)$$

Фокусировка фононов наблюдалась в различных кристаллических средах и продолжает интенсивно исследоваться. Эксперименты проводятся в области низких температур. Теоретическое исследование расширяет возможности исследования этого эффекта, выяснения его роли в различных физических явлениях, в работе конкретных акустоэлектронных устройств. Например, акустооптические ячейки на основе селенида кадмия изготавливаются с перпендикулярным срезом к направлению максимального значения концентрирования энергии сдвиговых волн [119, 120]. Это обуславливает необходимость детальной проработки данного явления. Однако для пьезоэлектриков ромбической симметрии достаточно полные сведения о фокусировке упругих волн в литературе отсутствуют.

Построен график распределения показателя концентрации потока энергии в декартовых и в полярных координатах для ниобата калия ХОУ плоскости (Рис. 2.14). По абсциссе количество значений скоростей на каждый  $1^\circ$  с шагом  $0,01^\circ$ . Коэффициентом концентрации в процентах показано, что основная часть энергии упругих волн направлена вдоль оси Y и в направлении  $\varphi=42^\circ$ . Площадь под кривой равна  $180^\circ \times 100\%$ .

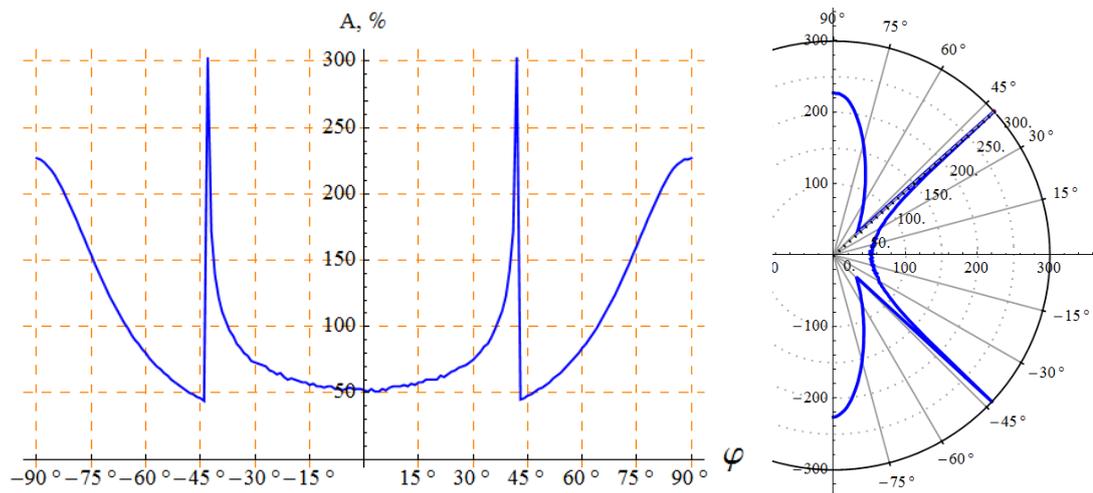


Рисунок 2.14 – Распределение показателя концентрации (плотности потока энергии) в декартовых и в полярных координатах в XOY плоскости для  $\text{KNbO}_3$

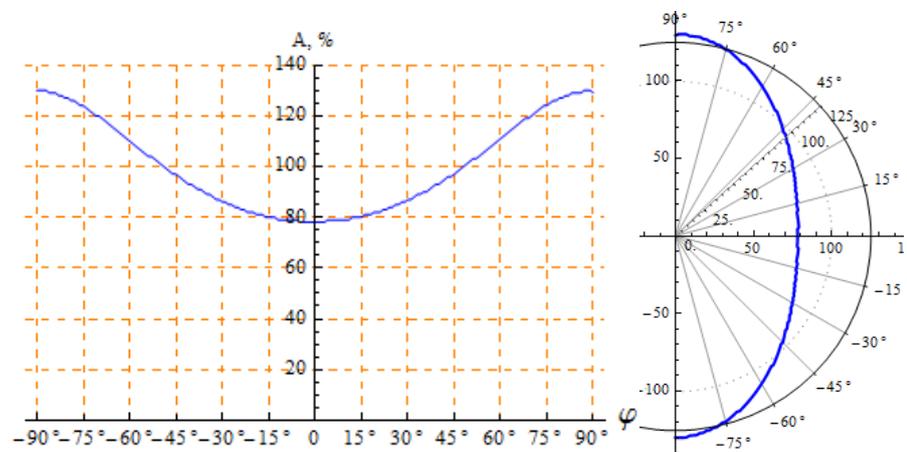


Рисунок 2.15 – Распределение плотности потока энергии в XOY плоскости для  $\text{KTiOAsO}_4$

В рис. 2.15 для  $\text{KTiOAsO}_4$  рассчитаны концентрации потока энергии в декартовых и в полярных координатах. Коэффициентом концентрации в процентах показано, что поверхность потока энергии упругих SH волн для слабых пьезоэлектриков имеет форму эллипса.

Актуальными задачами акустоэлектроники и акустооптики на сегодняшний день являются получение аналитических выражений описывающие экспериментальные результаты по фоновой фокусировке упругих волн [122]. Поэтому исследования в этом направлении продолжают интенсивно развиваться. Полученные аналитические формулы показывают применимость к этим задачам метода матрицанта и открывает новые возможности для дальнейшего исследования.

### 3 ЗАДАЧИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ

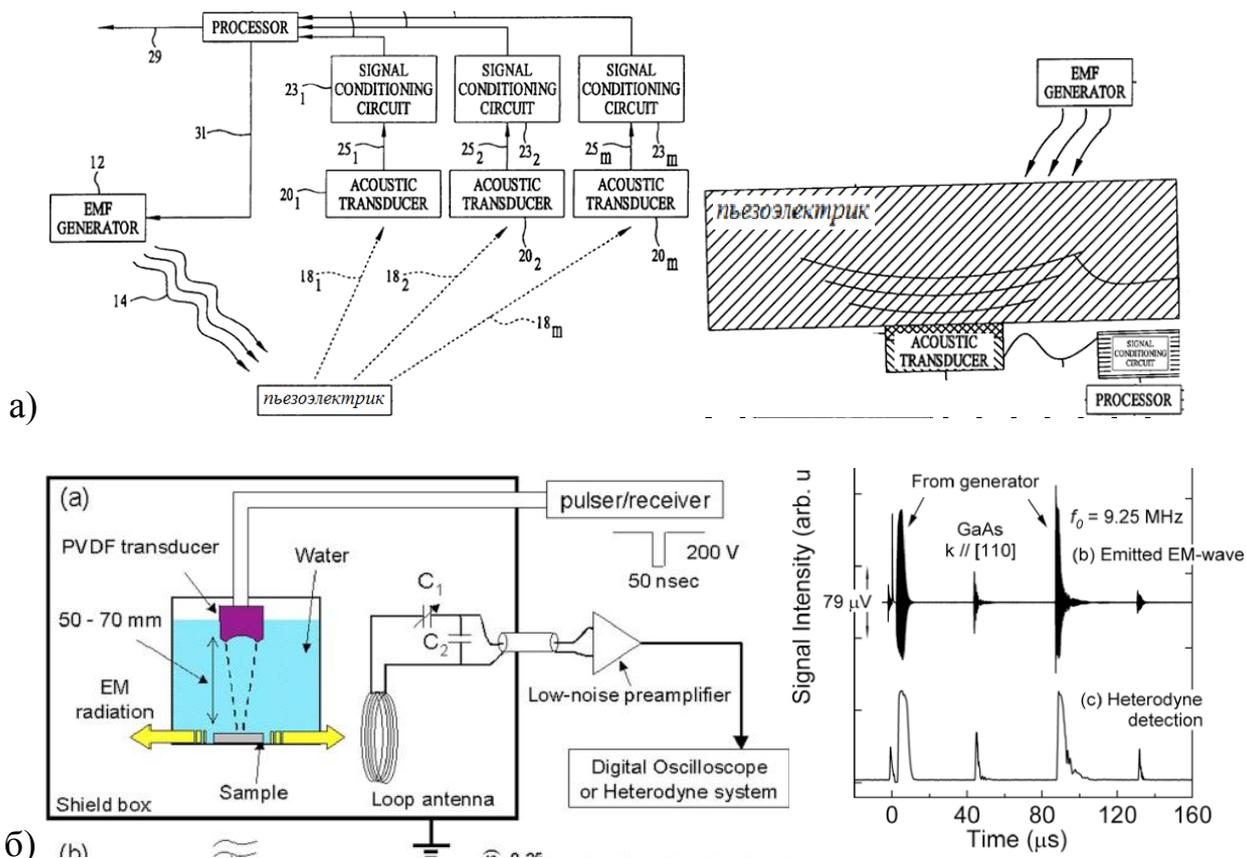
Связанность электроакустических волн на границе двух полупространств используется в контроллерах частоты и передатчиках сигнала. Tiersten в 1969 [17] один из первых кто попытался описать связанные волны в квазистатическом приближении. Задачи отражения и преломления, исследование упругих волн на границе двух анизотропных сред изучаются в [94-103]. Анизотропия кристаллов усложняет характер отражения и преломления упругих волн на границе раздела сред. Направления волновых нормалей отражённой и преломлённой волн, как и в изотропном случае, определяются законами Снеллиуса. Однако вследствие того что фазовая скорость зависит от направления волновой нормали, между углами падения, отражения и преломления нет простых соотношений, характерных для изотропной среды. При одном и том же угле падения углы отражения и преломления зависят от ориентации границы раздела относительно кристаллографических осей. Направления лучей значительно отклоняются от направлений соответствующих нормалей, в результате акустическая энергия после отражения (или преломления) переносится в направлениях, существенно отличающихся от направлений, определяемых законами Снеллиуса [79, 100, 118].

Открытым остается проблема невозможности описать электромагнитные волн при пренебрежении магнитного поля, и при рассмотрении потенциала электрического поля в виде градиента потенциала. При решении задачи отражения и преломления упругих волн между двумя пьезоэлектриками X. Yuan и Z.H. Zhu вынужденно вводят виртуальные волновые моды с нулевой энергией для описания ЭМ волны из-за применения квазистатического приближения [96, 97].

Роль ЭМ волны при распространении акустических волн в пьезоэлектрической среде теоретически рассмотрена в [27-39]. В котором говорится, что даже если квазистатический подход облегчает задачу, с пренебрежением ЭМ волной теряется возможность описания новых, тонких физических эффектов. Рассмотрена полная динамическая теория связанных волн в пьезокристаллах, показаны решения частных задач для ПАВ [28-39].

Известны случаи, когда фиксировались излучения ЭМ волны от сейсмических волн в местах скопления пьезоэлектрических минералов. Остается открытым вопрос о количественной оценке коэффициента трансформации энергии волны возбуждаемое от одного вида в другую. На сегодняшний день известны экспериментальные наблюдения акустической «эмиссии» от электромагнитной волны. Также наблюдался обратный эффект, детектирование электромагнитной волны от воздействия ультразвука на пьезоэлектрик [18-25]. В [26] предложены варианты схем для определения свойств пьезоэлектрика с помощью анализа возбужденной упругой волны в кристалле порожденный ЭМ волной на поверхности пьезоэлектрика (Рис. 3.1). Но все эти результаты требуют теоретического анализа на основе аналитических формул. Только тогда можно предопределить оптимальные

углы среза пьезоэлектрика, углы падения волн, и теоретически рассчитать поведение и взаимосвязь экспериментальных данных.



а) схема для анализа свойств пьезоэлектрика с помощью упругой волны порожденный ЭМ волной [26]; б) детектирование электромагнитной волны от воздействия ультразвука на пьезоэлектрик [19, 20]

Рисунок 3.1 – связанность ЭМ и упругих волн в пьезоэлектриках при отражении и преломлении волн

В спектроскопическом анализе свойств среды в терагерцовом и оптическом диапазоне изучение процессов отражения, преломления, дифракции электромагнитной волны на границе пьезосред и в слоистых средах остаются актуальными [49, 122, 123]. Для теоретического исследования этих процессов чаще применяются численные методы. Для улучшения точности корреляции и сопоставления экспериментальных данных с теоретическим ожиданием необходимо развивать также аналитические методы.

#### 4.1 Матрица R. Аналитическое решение задачи отражения и преломления

Рассматривается задача отражения и преломления волн от границы пьезодиэлектрического полупространства. Граница контакта двух полупространств при  $x = 0$  (Рис. 3.2), ось X направлена вглубь. Волновые вектора электромагнитных и упругих волн лежат в плоскости XOY.

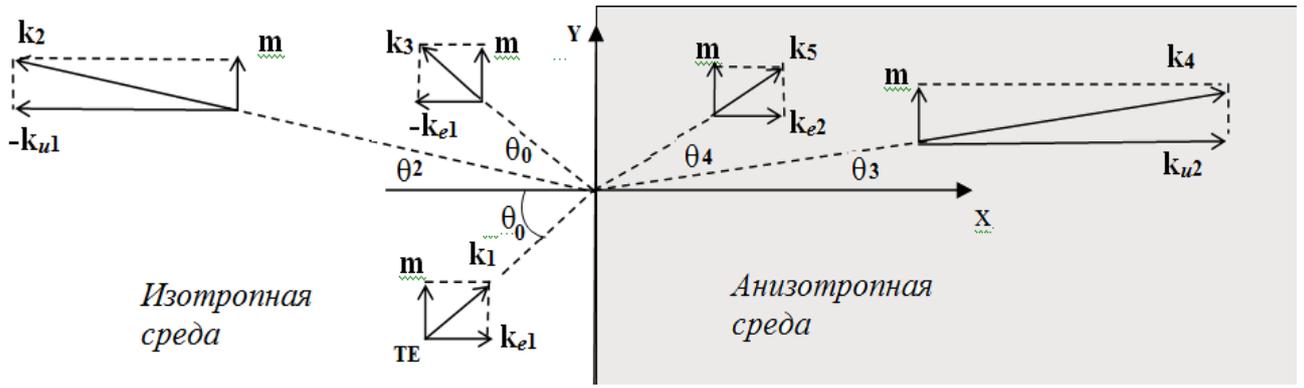


Рисунок 3.2 – Постановка задачи: ТЕ волна отражается и преломляется, возбуждая SH волну в пьезосреде и в твердом изотропном диэлектрике

При формулировке задач отражения и преломления волн используется матрицант (1.3.11), который при данных граничных условиях принимает вид [67, 68, 101, 102, A.1]:

$$\mathbf{T}^{\pm} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \mp \mathbf{R}, \text{ где } \mathbf{R} = \frac{\mathbf{B} - k_{1x} k_{2x} \mathbf{B}^{-1}}{2i(k_{1x} + k_{2x})} \quad (3.1.1)$$

Для ромбической симметрии класса mm2 (1.3.2) обратная матрица  $\mathbf{B}^{-1}$  имеет структуру:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{43}}{\Delta_2^2} & 0 & -\frac{b_{23}}{\Delta_2^2} \\ \frac{b_{34}}{\Delta_1^2} & 0 & -\frac{b_{14}}{\Delta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{i\omega b_{23}}{\Delta_2^2} & 0 & \frac{b_{21}}{\Delta_2^2} \\ \frac{i\omega b_{14}}{\Delta_1^2} & 0 & \frac{b_{12}}{\Delta_1^2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t \quad (3.1.2)$$

Здесь  $\Delta_1^2 = b_{12}b_{34} + i\omega b_{14}^2$ ;  $\Delta_2^2 = b_{21}b_{43} + i\omega b_{23}^2$ .

Полученная матрица  $\mathbf{R}$  уникальна тем, что определяется элементами матрицы коэффициентов  $\mathbf{B}$  для данной среды и рассматриваемыми волновыми векторами  $k_i$  (т.е. без перемножения матриц и возведения в степень как в других методах). Это позволяет работать с элементами матрицы в аналитическом виде. Структура  $\mathbf{R}$  для матрицы коэффициентов кристалла ромбической симметрии класса mm2 (1.3.2) и тетрагональной симметрии класса 4mm (1.3.7) имеет вид:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2i(k_{1x} + k_{2x})} \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega r_{14} & 0 & r_{34} \\ -i\omega r_{23} & 0 & r_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

Элементы матрицы  $\mathbf{R}$  в явном виде:

$$\begin{aligned} r_{12} &= b_{12} - \frac{\Delta_1}{\Delta_2} b_{43}; & r_{14} &= b_{14} + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} b_{23}; & r_{34} &= b_{34} - \frac{\Delta_1}{\Delta_2} b_{21}; \\ r_{21} &= b_{21} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_{34}; & r_{23} &= b_{23} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_{14}; & r_{43} &= b_{43} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_{12}. \end{aligned}$$

Матрицанты  $\mathbf{T}^+$ ,  $\mathbf{T}^-$  в (3.1.1) описывают волны, распространяющиеся вдоль положительного направления оси  $OX$  и в противоположном направлении соответственно. Разделение матрицантов для однородных сред записывается в виде:

$$\vec{\mathbf{W}} = (\mathbf{T}^+ \vec{\mathbf{W}}_0 + \mathbf{T}^- \vec{\mathbf{W}}_0) \exp(i\omega t - imy) \quad (3.1.4)$$

Для рассматриваемой задачи вектор-столбец  $\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$ .

Из (2.1.2) следует, что первое слагаемое, задает волновое поле связанных волн бегущих в положительном направлении оси  $OX$ , а второе, волновое поле связанных волн направленные отрицательно к оси  $OX$ .

В вектор-столбец  $\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$  входит смещение точек среды, компонента тензора напряжений и компоненты электромагнитного поля. Граничные условия записываются следующим образом [67, 68, 101, 102, А.1, А.4]:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{R}_0\right)\vec{\mathbf{W}}_0 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{R}_0\right)\vec{\mathbf{W}}_R = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{R}_1\right)\vec{\mathbf{W}}_t \\ \vec{\mathbf{W}}_0 + \vec{\mathbf{W}}_R = \vec{\mathbf{W}}_t \end{cases} \quad (3.1.5)$$

где  $\vec{\mathbf{W}}_0$ ,  $\vec{\mathbf{W}}_R$ ,  $\vec{\mathbf{W}}_t$  – вектора определяющие амплитуды падающих, отраженных и преломленных волн соответственно.

Падающие, отраженные и преломленные волны, на основании (3.1.1), задаются в виде [68]:

$$\vec{\mathbf{W}}_{nad} = \mathbf{T}_0^+ \vec{\mathbf{W}}_0 \quad (3.1.6a)$$

$$\vec{\mathbf{W}}_{omp} = \mathbf{T}_0^- \vec{\mathbf{W}}_R \quad (3.1.6б)$$

$$\vec{\mathbf{W}}_{np} = \mathbf{T}_1^+ \vec{\mathbf{W}}_t \quad (3.1.6в)$$

В общем случае для отраженных волн из (3.1.5) решения получены в виде [70, 71, 101, 102]:

$$\vec{W}_R = (\mathbf{R} + \mathbf{R}_1)^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)\vec{W}_0 = \mathbf{G}\vec{W}_0 \quad (3.1.7)$$

Для преломленных волн волновое поле определяется:

$$\vec{W}_t = (\mathbf{I} + \mathbf{G})\vec{W}_0 \quad (3.1.8)$$

Необходимо отметить, что матрица  $\mathbf{G}$  в (3.1.7) нормирована относительно значения компонентов падающего волнового поля на единицу. Поэтому при расчетах энергетических коэффициентов отраженных и преломленных волн не возникают трудности относительно выбора числовых значения для падающего поля.

Структура матрицы  $\mathbf{G}$  в (3.1.6) состоящая из элементов первой ( $r_{ij}^o$ ) и второй ( $r_{ij}$ ) среды имеет структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{pmatrix}; \vec{W} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t \quad (3.1.9)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  имеют вид:

$$g_{11} = \frac{-i\omega r_{23}^2 - r_{21}^- r_{43}^+}{i\omega r_{23}^2 + r_{21}^+ r_{43}^+}; g_{22} = \frac{-\omega r_{14}^2 + ir_{12}^- r_{34}^+}{\omega r_{14}^2 + ir_{12}^+ r_{34}^+}; g_{13} = \frac{2ir_{23} r_{43}^0}{\omega r_{23}^2 - ir_{21}^+ r_{43}^+}; g_{24} = \frac{2ir_{14} r_{34}^0}{\omega r_{14}^2 - ir_{12}^+ r_{34}^+};$$

$$g_{33} = \frac{-i\omega r_{23}^2 + ir_{21}^+ r_{43}^-}{\omega r_{23}^2 - ir_{21}^+ r_{43}^+}; g_{44} = \frac{-\omega r_{14}^2 + ir_{12}^- r_{34}^-}{\omega r_{14}^2 - ir_{12}^+ r_{34}^+}; g_{31} = \frac{2\omega r_{23} r_{21}^0}{\omega r_{23}^2 - ir_{21}^+ r_{43}^+}; g_{42} = \frac{2\omega r_{14} r_{12}^0}{\omega r_{14}^2 - ir_{12}^+ r_{34}^+};$$

Здесь  $r_{ij}^\pm = r_{ij} \pm r_{ij}^0$ .

Амплитуды преломленных волн определяются матрицей (3.1.8):

$$\mathbf{I} + \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{2r_{21}^0 r_{43}^+}{i\omega r_{23}^2 + r_{21}^+ r_{43}^+} & 0 & \frac{2ir_{23} r_{43}^0}{\omega r_{23}^2 - ir_{21}^+ r_{43}^+} & 0 \\ 0 & \frac{2r_{12}^0 r_{34}^+}{i\omega r_{14}^2 + ir_{12}^+ r_{34}^+} & 0 & \frac{2ir_{14} r_{34}^0}{\omega r_{14}^2 - ir_{12}^+ r_{34}^+} \\ \frac{2\omega r_{23} r_{21}^0}{\omega r_{23}^2 - ir_{21}^+ r_{43}^+} & 0 & \frac{2r_{43}^0 r_{21}^+}{i\omega r_{23}^2 + r_{21}^+ r_{43}^+} & 0 \\ 0 & \frac{2\omega r_{14} r_{12}^0}{\omega r_{14}^2 - ir_{12}^+ r_{34}^+} & 0 & \frac{2r_{34}^0 r_{12}^+}{i\omega r_{14}^2 + ir_{12}^+ r_{34}^+} \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

Полученная формулировка позволяет, используя систему уравнений Максвелла полностью аналитически решить эту задачу как в случае падения электромагнитной волны ТЕ поляризации, так и в случае падения SH упругой

волны. Из-за связанности уравнений для упругой и ЭМ волны необходимо получить аналитические выражения для каждого составляющих компонент  $(u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)$  волн падающих, преломленных и отраженных полей.

### 3.2 Расчет связанных волновых полей при отражении и преломлении

Рассмотрим случай отражения и преломления электромагнитной волны от границы пьезоэлектрического полупространства. Для изучения процессов трансформации волн различной физической природы на границе изотропной среды и анизотропного пьезоэлектрика аналитические решения рассматриваем в общем случае. Среда жестко связаны между собой. Используем значения волновых векторов (1.4.18) для SH и TE волн для анизотропной пьезоэлектрической среды.

Разделив матрицанты для волн распространяющихся вдоль оси X и против в (3.1.5) можем определить поля для падающих связанных волн по (3.1.6а). Для рассматриваемой задачи вектор-столбец во второй пьезосреде имеет вектор-столбец  $\vec{W} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$ . При рассмотрении падающей электромагнитной волны для первой среды вектор-столбец задается в виде:

$$\vec{W}_0 = (0, 0, E_y, H_z)^t \quad (3.2.1)$$

Структура матрицы коэффициентов упругой-изотропной среды записываются в виде:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}^0 & 0 & 0 \\ b_{21}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34}^0 \\ 0 & 0 & b_{43}^0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{W}_0 = \begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

Используя (3.1.6а) и (3.2.2) записываем связь волновых полей относительно падающего волнового поля:

$$\vec{W}_{nad} = \frac{1}{2} \left( 0, 0, E_0 - \frac{ib_{34}^0}{k_{0z}} H_0, H_0 - \frac{ib_{43}^0}{k_{0z}} E_0 \right)^t \quad (3.2.3)$$

Если рассматривается жестко закрепленные два полупространства поле отраженных волн описывается в виде:

$$\vec{\mathbf{W}}_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_0 g_{11} + E_0 g_{13} + \frac{ib_{12}^0(g_{24}H_0 + g_{22}\sigma_0)}{k_{0z}} \\ \sigma_0 g_{22} + H_0 g_{24} + \frac{ib_{21}^0(g_{13}E_0 + g_{11}u_0)}{k_{0z}} \\ E_0 g_{33} + u_0 g_{31} + \frac{ib_{34}^0(g_{44}H_0 + g_{42}\sigma_0)}{k_{0z}} \\ H_0 g_{44} + \sigma_0 g_{42} + \frac{ib_{43}^0(g_{33}E_0 + g_{31}u_0)}{k_{0z}} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

При рассмотрении жестко закрепленные два полупространства для преломленных волн умножая матрицант второй среды (3.1.8) на (3.1.6в) получаем:

$$\vec{\mathbf{W}}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + g_{11})u_0 + 2((1 + g_{22})r_{12} + g_{42}r_{14})\sigma_0 + g_{13}E_0 + 2(g_{24}r_{12} + (1 + g_{44})r_{14})H_0 \\ 2((1 + g_{11})r_{21} + g_{31}r_{23})u_0 + (1 + g_{22})\sigma_0 + 2(g_{13}r_{21} + (1 + g_{33})r_{23})E_0 + g_{24}H_0 \\ g_{31}u_0 + (g_{42} - 2i\omega(1 + g_{22})r_{14})\sigma_0 + (1 + g_{33})E_0 + 2((1 + g_{44})r_{34} - i\omega g_{24}r_{14})H_0 \\ 2(g_{31}r_{43} - 2i\omega(1 + g_{11})r_{23})u_0 + g_{42}\sigma_0 + 2((1 + g_{33})r_{43} - i\omega g_{13}r_{23})E_0 + (1 + g_{44})H_0 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

Для отраженных волн в случае отсутствия радиационных потерь в первую среду (вакуум, газ, идеальная жидкость) для сдвиговых волн на основании (3.1.6б) отраженные волны записываются:

$$\vec{\mathbf{W}}_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 g_{33} + \frac{ib_{34}^0 g_{44} H_0}{k_{0z}} \\ H_0 g_{44} + \frac{ib_{43}^0 g_{33} E_0}{k_{0z}} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

Для преломленных волн между полупространствами диэлектрик-пьезоэлектрик вектор определяется в виде:

$$\vec{\mathbf{W}}_t = \mathbf{T}_{np}^+ \begin{pmatrix} u_0 + u_0 g_{11} + E_0 g_{13} \\ \sigma_0 + \sigma_0 g_{22} + H_0 g_{24} \\ E_0 + u_0 g_{31} + E_0 g_{33} \\ H_0 + \sigma_0 g_{42} + H_0 g_{44} \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

В случае жидкость-пьезодиэлектрик для сдвиговых волн преломленные волны записываются:

$$\vec{W}_{np} = \mathbf{T}_{np}^+ \vec{W}_t = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{R}\right)(\mathbf{I} + \mathbf{G})\vec{W}_0 \quad (3.2.8)$$

В явном виде:

$$\vec{W}_{np} = \begin{pmatrix} u_z^{np} \\ \sigma_{xz}^{np} \\ E_y^{np} \\ H_z^{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_y^0 g_{13} - H_z^0 (r_{12} g_{24} + r_{14} (1 + g_{44})) \\ \frac{1}{2} H_z^0 g_{24} - E_y^0 (r_{21} g_{13} + r_{23} (1 + g_{33})) \\ \frac{1}{2} E_y^0 (1 + g_{33}) + H_z^0 (i\omega r_{14} g_{24} - r_{34} (1 + g_{44})) \\ \frac{1}{2} H_z^0 (1 + g_{44}) - E_y^0 (i\omega r_{23} g_{13} - r_{43} (1 + g_{33})) \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

Для вычисления энергетических коэффициентов отражения и преломления необходимо использовать усредненные по времени компоненты вдоль оси X плотностей потоков электромагнитной и упругой энергии.

Средние по времени компоненты плотности потока энергии согласно [4, 5]:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + D_k E_k^*) \quad \text{или} \quad \bar{w}_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i\omega \sigma_{ij} R_j u_i^*) \quad (3.2.10)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  содержит компоненты ЭМ волны согласно (1.1.3),  $R_j$  – обратная скорость, знак «\*» означает комплексное сопряжение.

Для данной задачи использовался усредненный по времени обобщенный вектор Пойтинга [117]:

$$\bar{P}_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-\sigma_{ij} (i\omega u_i)^* + (E \times H^*)_j) \quad (3.2.11)$$

Согласно поставленной задаче, интересуют относительные значения, т.е. оценка возбуждаемого потока энергии относительно падающей физической разных по природе волн. Поэтому при расчетах отдельно рассматриваем слагаемые из выражение (3.2.11) для оценки энергии трансформированной упругой волны падающей ЭМ волной или наоборот, для оценки энергии ТЕ волны возбужденный упругой волной:

$$\bar{P}_x = \bar{P}_{SHx} + \bar{P}_{TEx} \quad (3.2.12)$$

Тогда энергетические коэффициенты отражения электромагнитной и упругой волн в общем случае имеют вид:

$$K_{SH}^R = \frac{\bar{P}_{SHx}^R}{\bar{P}_{SHx}^0 + \bar{P}_{TEx}^0}, \quad K_{TE}^R = \frac{\bar{P}_{TEx}^R}{\bar{P}_{SHx}^0 + \bar{P}_{TEx}^0} \quad (3.2.13)$$

Энергетический коэффициент преломления электромагнитной и упругой волн в общем виде:

$$K_{SH}^t = \frac{\bar{P}_{SHx}^t}{\bar{P}_{SHx}^0 + \bar{P}_{TEx}^0}, K_{TE}^t = \frac{\bar{P}_{TEx}^t}{\bar{P}_{SHx}^0 + \bar{P}_{TEx}^0} \quad (3.2.14)$$

В случае падения ТЕ волны на границу жидкость - пьезодиэлектрик:

$$K_{SH}^R = 0, K_{TE}^R = \frac{\bar{P}_{TEx}^R}{\bar{P}_{TEx}^0}, K_{SH}^t = \frac{\bar{P}_{SHx}^t}{\bar{P}_{TEx}^0}, K_{TE}^t = \frac{\bar{P}_{TEx}^t}{\bar{P}_{TEx}^0} \quad (3.2.15)$$

В случае падения упругой SH волны на границу диэлектрик-пьезодиэлектрик:

$$K_{SH}^R = \frac{\bar{P}_{SHx}^R}{\bar{P}_{SHx}^0}, K_{TE}^R = \frac{\bar{P}_{TEx}^R}{\bar{P}_{SHx}^0}, K_{SH}^t = \frac{\bar{P}_{SHx}^t}{\bar{P}_{SHx}^0}, K_{TE}^t = \frac{\bar{P}_{TEx}^t}{\bar{P}_{SHx}^0} \quad (3.2.16)$$

Рассмотрим подробнее каждый случай.

### 3.3 Отражение и преломление электромагнитной волны на границе жидкость–пьезоэлектрик

Для изучения процессов трансформации волн различной физической природы на границе изотропной среды и анизотропного пьезоэлектрика необходимо совместно рассматривать закон Снеллиуса для упругой и ЭМ волны. Так как одно порождает другое. Среда жестко связаны между собой. Используя значения волновых векторов (1.4.18) для SH и ТЕ волн для анизотропной пьезоэлектрической среды. Из которого получаем волновые векторы для первой среды в виде:

$$k_1^0 = \omega \sqrt{\rho_s / c_{44}^s}; k_1^0 = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s} \quad (3.3.1)$$

Углы преломления для упругой и электромагнитной волны в случае падения ТЕ электромагнитной волны определяются из закона Снеллиуса.

$$k_{TE}^0 \sin \theta = \begin{cases} k_{TE}^I \sin \theta_1 \\ k_{SH}^I \sin \theta_2 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Рассмотрим случай когда падает ТЕ волна. Подставляем в (3.3.2):

$$\epsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_0 = \left( \frac{\delta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) \sin^2 \theta_i \quad (3.3.3)$$

Раскрыв и возведя в квадрат, получим:

$$(\epsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_0)^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\delta}{\alpha} \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta_i + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} \sin^4 \theta_i = \frac{\delta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \sin^4 \theta_i$$

После преобразования получим:

$$\gamma \sin^4 \theta_i - \delta \epsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_i \sin^2 \theta_0 + \alpha (\epsilon_0 \mu_0)^2 \sin^4 \theta_0 = 0.$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  определены в (1.4.17). Подставляя в (3.2.4) волновые векторы (1.4.18), группируя по квадрату синуса определяются искомые углы преломления. При возведении в квадрат (3.3.3) знак “ $\pm$ ” перед выражением из под корня не теряется, оба корня являются физическими решениями.

Для расчета угла отраженной упругой волны  $\theta_{0a}$  при падении ТЕ волны удобно использовать (1.4.16б). Проверить правильность углов преломления можно из геометрических подходов, строя поверхности медленности для каждой среды.

Если взять, к примеру, параметры второй пьезосреды в виде:

$$c_{44} = 74.3 \times 10^9 \text{ Па}, c_{55} = 25 \times 10^9 \text{ Па}, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 15 \epsilon_0; \epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}, \\ \rho = 4630 \text{ кг/м}^3, e_{24} = e_{15} = 15 \text{ Кл/м}^2, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}, \mu_3 = 1\mu_0.$$

Параметры первой изотропной среды имеют значения относительно второй:  $\rho_S = 0.8 \times \rho$ ,  $c_{44}^S = 0.8 \times c_{44}$ ,  $\epsilon_S = 1.5 \epsilon_1$ ,  $\mu_S = 1.1\mu_3$ .

Угол полного внутреннего отражения соответствует обычным законам оптики (Рис 3.3):

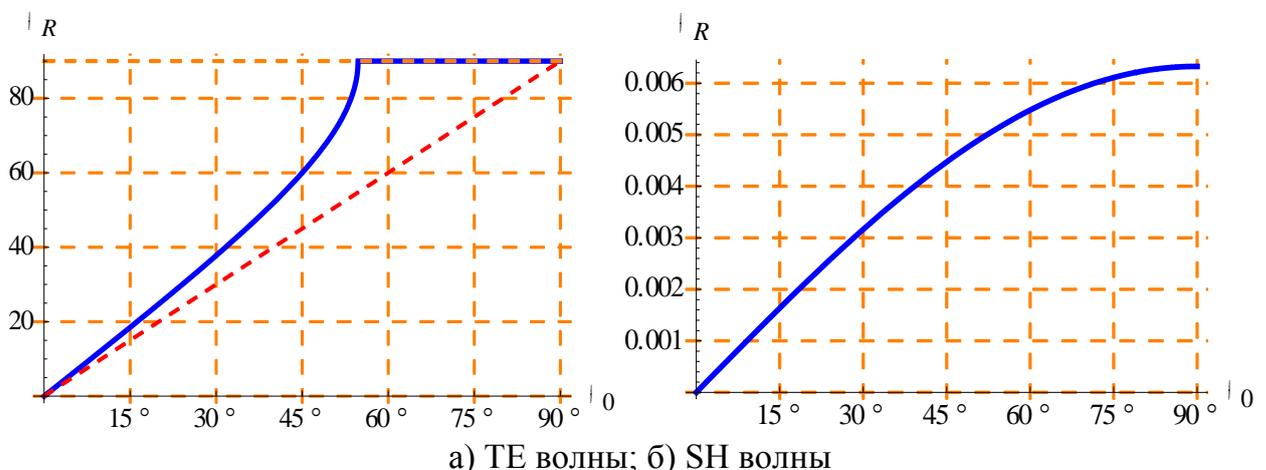


Рисунок 3.3 – по абсциссе углы падения ТЕ электромагнитной волны, по ординате соответствующие углы преломления (в градусах)

Определены углы преломления для упругой и электромагнитной волны в случаях падения ТЕ электромагнитной или SH упругой волны из закона Снеллиуса, которые в рамках квазистатического подхода получить невозможно. Из рисунка 3.3 видно, что электромагнитная волна имеет угол полного внутреннего отражения при  $\theta \cong \pi/3$ . Так как скорость распространения электромагнитной волны много больше скорости распространения упругих волн сдвиговая волна порожденный ТЕ волной будет иметь очень маленький угол преломления. Вектора упругих поперечных волн во второй среде будут направлены практически перпендикулярно к границе раздела сред и направлена почти вдоль оси X. Из графиков угла преломления в зависимости от угла падения ТЕ волны видно, что возбуждаемая упругая SH волна не достигает одного градуса.

Для аналогии решена задача отражения и преломления связанных упругих волн продольной и поперечно-горизонтальной поляризации. Например, для границы тетрагонального и ромбического кристаллов, как BaTiO<sub>3</sub>/Ba<sub>2</sub>NaNb<sub>5</sub>O<sub>15</sub> (Рис. 3.4, 3.5) продольные (P) и поперечно-вертикальные (SV) связанные волны взаимодействуют очень сложным образом. По закону Снеллиуса, можно графический или математический определить критические углы полного внутреннего отражения, углы отражения и преломления в зависимости от типа падающей волны [А.1].

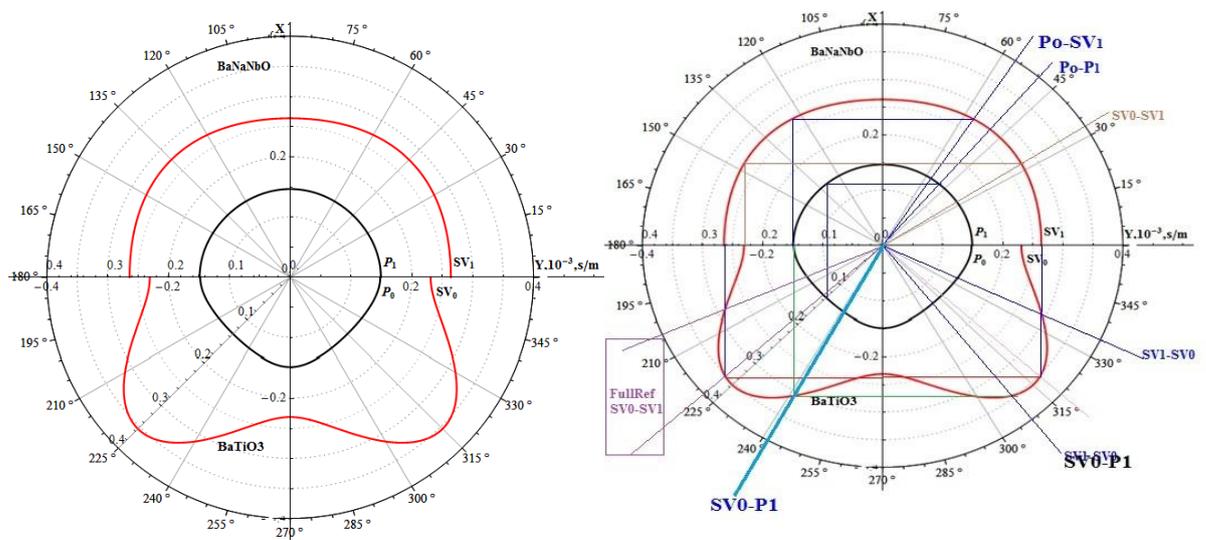
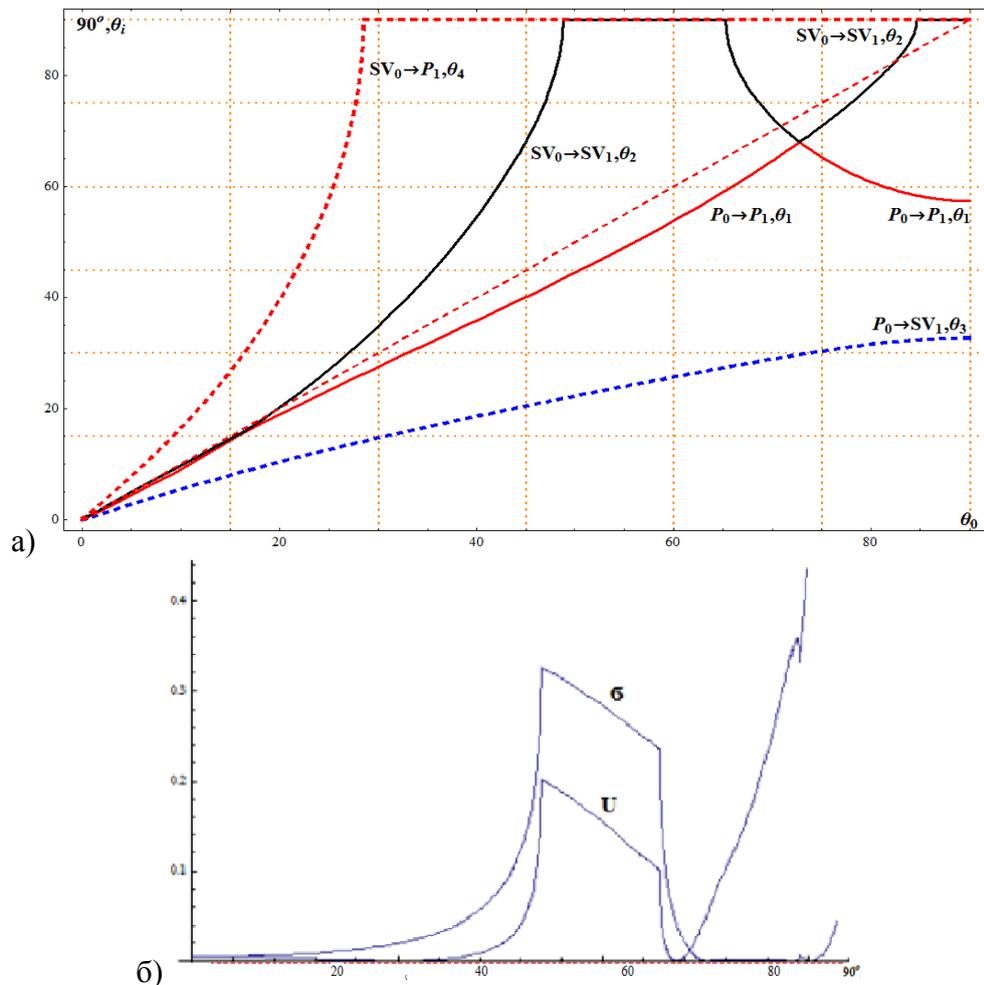


Рисунок 3.4 – Поверхности волновых векторов P, SV волн для BaTiO<sub>3</sub> и Ba<sub>2</sub>NaNb<sub>5</sub>O<sub>15</sub>. Графическое определение углов отражения и преломления в зависимости от типа падающей волны

Если знаем выражения для волновых векторов в аналитическом виде из (3.3.2) можно построить график зависимостей угла падения и угла преломления разных типов волн (Рис.3.5).



а) График зависимостей угла падения и угла преломления компонентов связанных упругих P и SV волн; б) График зависимостей относительного коэффициента отражения амплитуд  $u_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$  при падении упругих волн (без учета пьезопараметров)

Рисунок 3.5 – К задаче отражения и преломления связанных упругих продольных и SV волн на границе  $BaTiO_3$  и  $Ba_2NaNb_5O_{15}$  [A.1]

По аналогии связанных продольных и поперечно-вертикальных волн можно рассмотреть задачу возникновения электрических полей от падающей упругой волны или генерацию поперечно-сдвиговых SH упругих волн ТЕ электромагнитной волной [103, А.4].

В данном примере рассматривались случаи как, при отсутствии полного внутреннего отражения (рис.3.6), так и при наличии полного внутреннего отражения электромагнитной волны на границе жидкость-пьезоэлектрик (рис.3.7).

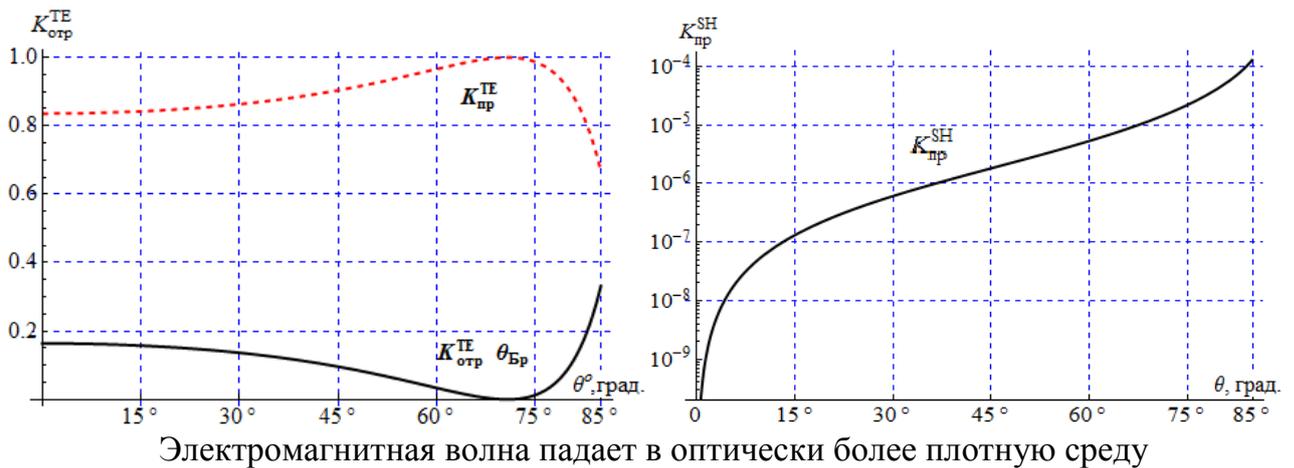


Рисунок 3.6 – Коэффициенты преломления электромагнитной и упругой волны на границе жидкость- пьезокристалл KNbO<sub>3</sub>

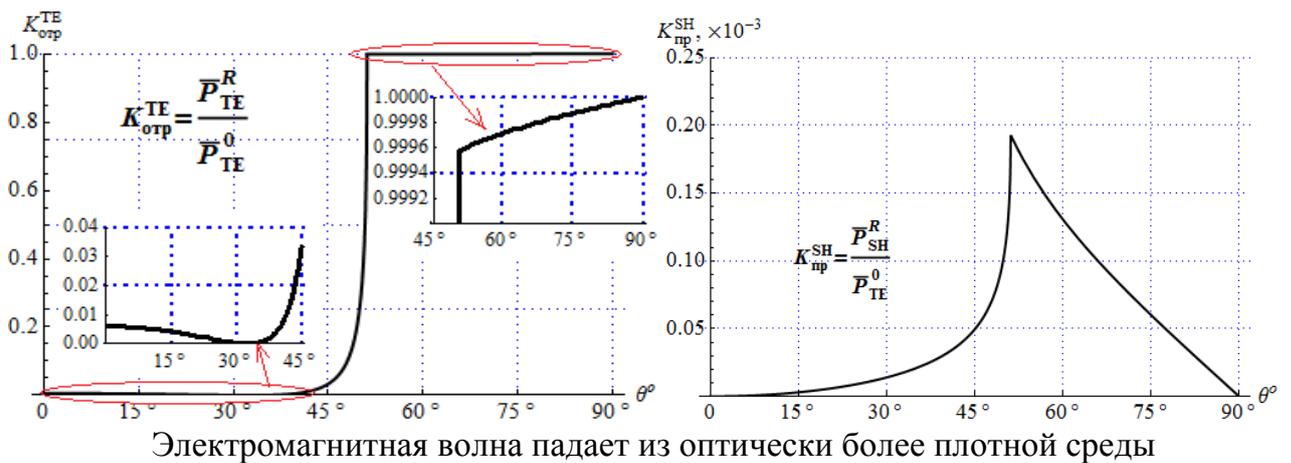


Рисунок 3.7 – Коэффициенты отражения электромагнитной волны и преломления упругой волны на границе жидкость- пьезокристалл KNbO<sub>3</sub>

Из рисунков 3.6, 3.7 следуют, что наличие пьезоэлектрического эффекта приводит к уменьшению энергетического коэффициента преломления электромагнитной TE волны, часть энергии трансформируется в SH упругую волну. Несмотря на малость энергетического коэффициента генерированной (трансформированной) упругой волны данный эффект имеет большое прикладное значение. Знак  $\theta_{Br}$  означает угол Брюстера, когда между отраженной и преломленной TE волной угол равен  $90^0$ . При  $\theta_{Br}$  TE поляризованная электромагнитная волна полностью преломляется во вторую среду.

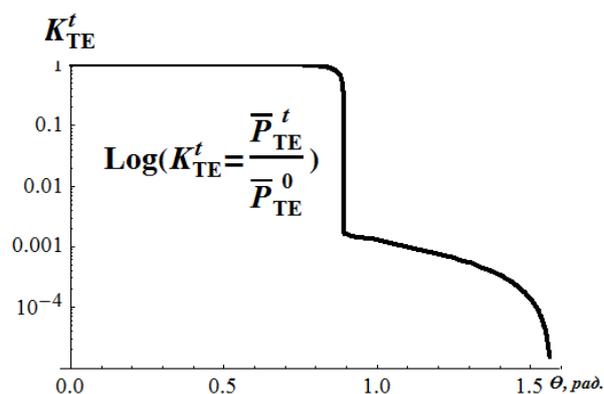


Рисунок 3.8 – Коэффициенты преломления электромагнитной волны на границе жидкость-пьезокристалл  $\text{KNbO}_3$  (при наличии полного внутреннего отражения) в логарифмической шкале

После предельного угла полного внутреннего отражения (в рис. 3.7) энергетический коэффициент отражения электромагнитной волны ТЕ поляризации не равна единице, она возрастает и стремится до максимального значения по мере увеличения угла падения. Из графика представленного на рисунке 3.7 следует, что наличие пьезоэлектрического эффекта приводит к уменьшению энергетического коэффициента преломления электромагнитной ТЕ волны.

После предельного угла полного внутреннего отражения энергетический коэффициент преломления электромагнитной волны ТЕ поляризации практически обращается в нуль. Здесь следует отметить, что энергетическим коэффициентом преломления электромагнитной ТЕ волны называется отношение средней по времени нормальной составляющей плотности потока преломленной электромагнитной ТЕ волны к средней по времени нормальной составляющей плотности потока падающей волны на границе раздела сред при  $x=0$ . В рис. 3.8 построен график коэффициента преломления электромагнитной волны на границе жидкость-пьезокристалл  $\text{KNbO}_3$  при наличии полного внутреннего отражения в логарифмической шкале. При  $x>0$  средняя по времени нормальная составляющая плотности потока преломленной электромагнитной ТЕ волны не равна нулю. Это связано с тем, что во второй среде происходит непрерывная взаимная трансформация электромагнитной ТЕ волны и упругой поперечно-горизонтальной волны.

### 3.4 Отражение и преломление упругой SH волны на границе диэлектрик –пьезоэлектрик

Рассмотрим теперь случай когда SH упругая волна падает на границу полупространств упругий изотропный диэлектрик-пьезоэлектрик  $\text{KNbO}_3$ . В оптике и в акустике анизотропных сред хорошо известно явление многократного лучепреломления. При падении на границу сред одной из нормальных волн во второй среде в общем случае возникают все нормальные волны, которые могут в ней распространяться. Две в электродинамике, три в случае акустических волн. Лучевые скорости этих волн различны по величине и направлению, отсюда название эффекта. В случае оптических лучей в одноосных кристаллах «обыкновенная» и «необыкновенная» волны относятся к разным ветвям нормальных колебаний. В акустике, в случае наличия вогнутости в поверхности волновых векторов, среди отраженных и преломленных волн могут появиться две волны, бегущие под разными углами, но относящиеся к одной и той же ветви [2]. Была предпринята попытка теоретического описания двойного лучепреломления без изменения ветви в [2]. Для осуществления указанного эффекта возьмем полупространство пьезоэлектрика ниобата калия со срезом перпендикулярный к кристаллографической оси Y (Рис. 3.9).

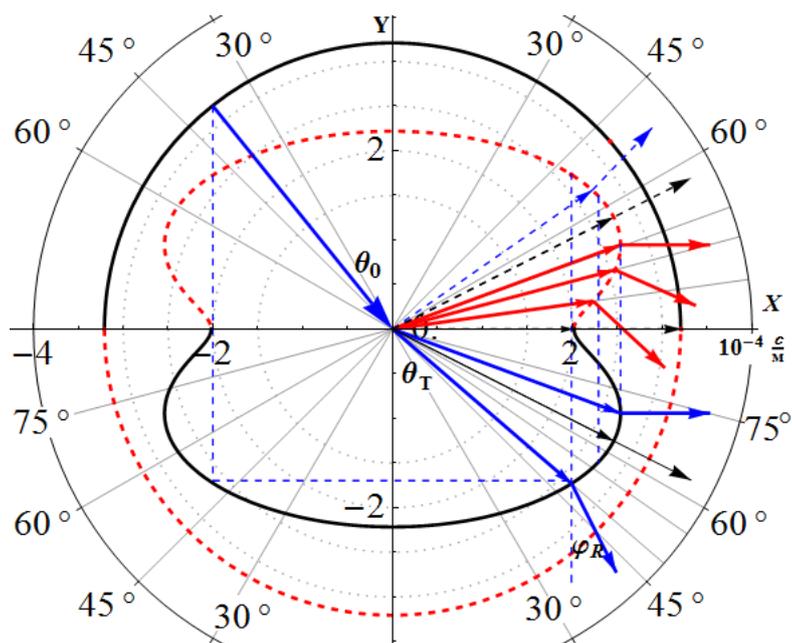


Рисунок 3.9 – Упругая SH волна падает на границу полупространств упругий изотропный диэлектрик-пьезоэлектрик  $\text{KNbO}_3$

Упругая волна падает под углом  $\theta_0$ , преломляется на угол  $\theta_T$ . Первая среда-изотропный диэлектрик с плотностью  $4000 \text{ кг/м}^3$  и упругой константой  $C_{44}=45 \times 10^9 \text{ Па}$ , откуда падает сдвиговая волна на полупространство  $\text{KNbO}_3$  со срезом перпендикулярный к оси Y. Исследуем азимутальное изменение угла падения в плоскости XOY.

Построим поверхности медленности для обеих сред (Рис. 3.9). Видно, что при угле, например,  $45^0$  имеем 2 преломленных луча.

Математически рассмотрим случай определения углов преломления волн в случае падения SH волны:

$$k_{SH}^0 \sin \theta = k_{SH}^H \sin \theta_4 \quad (3.4.1)$$

$$k_{SH}^0 \sin \theta = k_{TE}^H \sin \theta_3 \quad (3.4.2)$$

Эти уравнения можно переписать в виде:

$$\frac{\rho}{c_{44}^s} \sin^2 \theta_0 = \left( \frac{\delta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) \sin^2 \theta_i$$

Для чисто сдвиговых пьезоупругих волн из (3.4.1) получаем:

$$\sin^2 \theta_i = \frac{(2c_{44}^D \sin^2 \theta_0 + c_{44}^S) \epsilon_2 - L \sin^2 \theta_0 \pm \sqrt{L^2 \sin^4 \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0 (Lc_{44}^S + 2c_{44}^D (c_{55}^D \sin^2 \theta_0 - c_{44}^S) \epsilon_1) \epsilon_2 + (c_{44}^S)^2 \epsilon_2^2}}{2(c_{55}^D \epsilon_1 \sin^2 \theta_0 + c_{44}^S (\epsilon_2 - \epsilon_1) + (c_{44}^D \epsilon_2 - L) \sin^2 \theta)}$$

$$L = e_{15} e_{24} + c_{44} \epsilon_1 + c_{55} \epsilon_2 \quad (3.4.3)$$

Из уравнения (3.4.3) относительно квадрата синуса ( $\sin^2 \theta_i$ ) получаем два значения углов преломления упругой SH волны:

$$\theta_{1,2} = \arcsin(\sqrt{\sin^2 \theta_i}) \quad (3.4.4)$$

Получив аналитическую функцию этих углов из (3.4.4) строим график зависимости угла преломления от угла падения. Из графика (Рис. 3.9) видно, что начиная с  $39^0$  до  $52^0$  одному углу падения соответствуют две волны преломления.

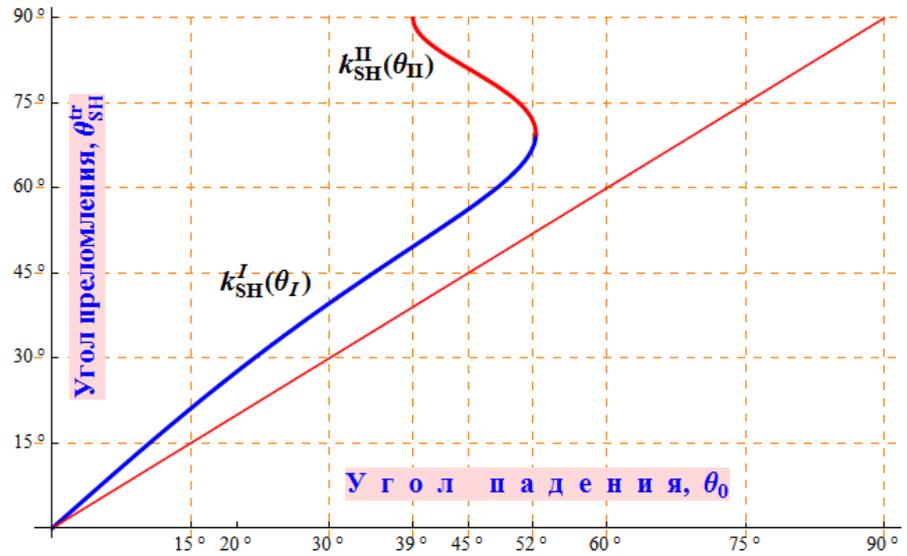


Рисунок 3.10 – График зависимости угла преломления от угла падения

Ставится задача описания двойного лучепреломления упругой SH волны. Поэтому в рамках этой задачи не рассматриваем эффекты связанные с трансформацией упругой энергии в электромагнитную.

Структура матрицы коэффициентов для первой упругой-изотропной среды соответствует (3.2.2). Используя (3.1.6а) записываем связь волновых полей относительно падающего волнового поля:

$$\vec{W}_{nad} = \frac{1}{2} \left( u_0 - \frac{ia_{12}\sigma_0}{k_{0y}}, \sigma_0 - \frac{ia_{21}u_0}{k_{0y}}, 0, 0 \right)^t \quad (3.4.5)$$

Нами рассматривается жестко закрепленные два полупространства. Тогда поле отраженных упругих волн описывается в виде:

$$\vec{W}_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_0 g_{11} + \frac{ia_{12}g_{22}\sigma_0}{k_{0y}} \\ \frac{ia_{21}g_{11}u_0}{k_{0y}} + \sigma_0 g_{22} \\ u_0 g_{31} + \frac{ia_{34}g_{42}\sigma_0}{k_{0y}} \\ \frac{ia_{43}g_{31}u_0}{k_{0y}} + \sigma_0 g_{42} \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

Для преломленных волн умножая матрицант второй среды (4.1.8) на (4.1.6в) получаем:

$$\vec{W}_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_0(1 + g_{11}) + 2((1 + g_{22})r_{12} + g_{42}r_{14})\sigma_0 \\ 2((1 + g_{42})r_{21} + g_{31}r_{23})u_0 + (1 + g_{22})\sigma_0 \\ g_{31}u_0 + 2(i\omega(1 + g_{22})r_{14} + g_{42}r_{34})\sigma_0 \\ 2(g_{31}r_{43} - i\omega(1 + g_{11})r_{23})u_0 + g_{42}\sigma_0 \end{pmatrix} \quad (3.4.7)$$

Используя матрицу  $\mathbf{G}$ , и рассчитав волновые поля по формулам (3.2.11), (3.2.16) строим график коэффициента отражения и преломления упругой волны. В рис. 4.11 часть энергии начинает разветвлено отражаться в диапазоне с  $39^\circ$  до  $52^\circ$  направления фазовой скорости. В области вогнутости поверхности волнового вектора имеем разветвленное решение (Рис. 3.10). Поэтому есть необходимость расчета потока энергии для второй преломленной волны отдельно. Отдельно рассчитанная энергия для второй преломленной волны аддитивно суммируется с общей упругой энергией (Рис. 4.11). Далее наступает угол полного внутреннего отражения, при котором коэффициент отражения равняется единице.

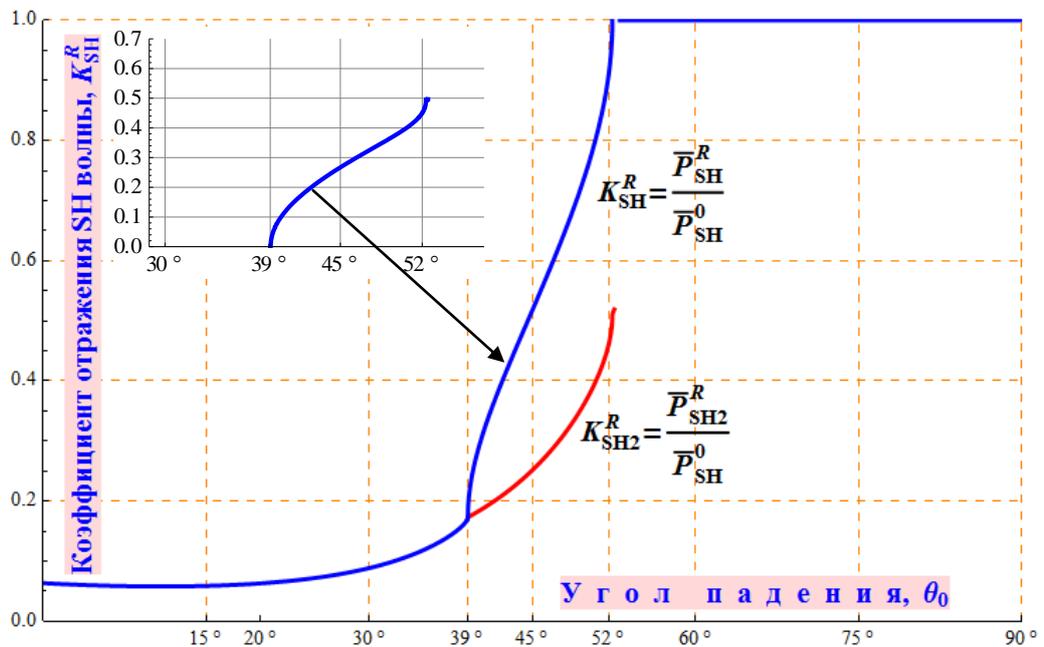


Рисунок 3.11 – Коэффициент отражения фазовых фронтов волнового вектора упругой SH волны от границы изотропный диэлектрик-пьезоэлектрик  $\text{KNbO}_3$

Также, в области вогнутости поверхности волнового вектора имеем разветвленное преломление волн относительно направления фазового фронта (Рис.3.12).

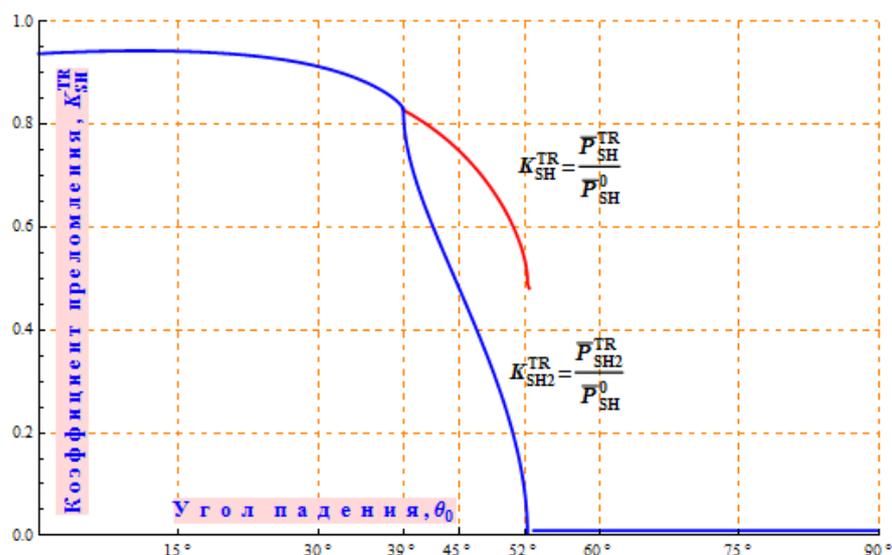
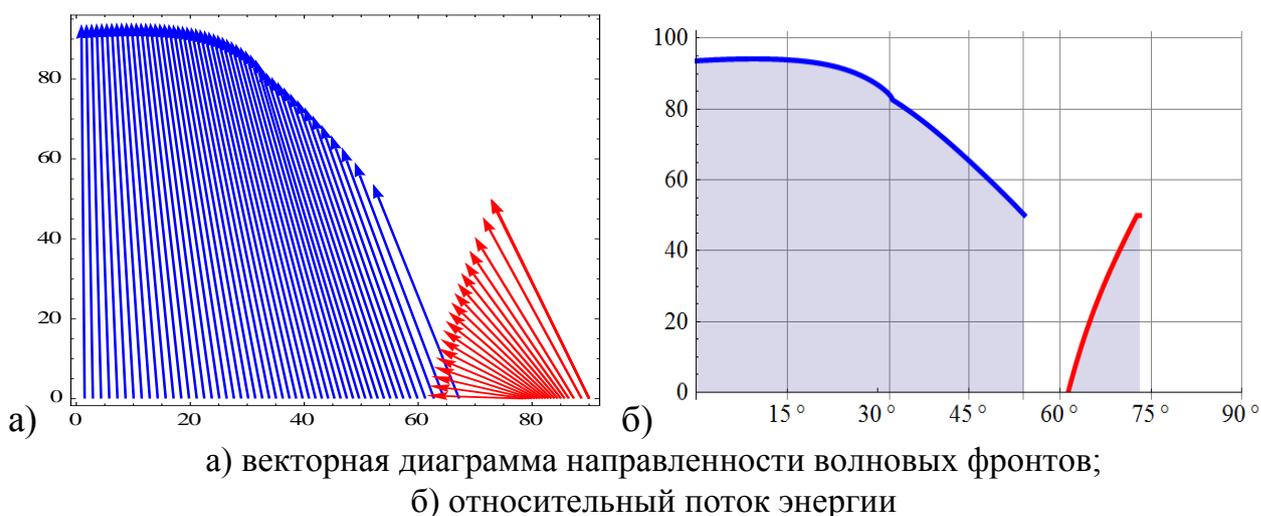


Рисунок 3.12 – Коэффициент преломления фазового волнового фронта упругой SH волны от границы изотропный диэлектрик-пьезоэлектрик KNbO<sub>3</sub>

Как видно из рисунков 3.11 и 3.12, выполняется закон сохранения энергии упругой волны.

Во второй главе было показано, что фазовая скорость не всегда совпадает с направлением потока энергии. Поэтому для сильноанизотропных сред необходимо учитывать значения угла сноса (2.2.7). Из рисунка 3.9 видно, что вектор групповой скорости с первого квадранта направленный в противоположенную сторону – в четвертый квадрант, будет источником вторичных волн направленных в сторону преломления.

Используя значения угла сноса для пьезоэлектрика KNbO<sub>3</sub> в XOY плоскости (2.2.7) для преломленных волн во второй среде строим график зависимости потока относительной энергии (в процентах, %) от угла преломления во второй среде (Рис. 3.13).



а) векторная диаграмма направленности волновых фронтов;  
б) относительный поток энергии

Рисунок 3.13 – Коэффициенты преломления упругой волновой энергии

Используя формулы (2.3.1, 2.3.2) можно рассчитать анизотропию плотности потока упругой энергии. Зависимость показателя концентрации упругой энергии от угла преломления показано в (Рис. 3.14).

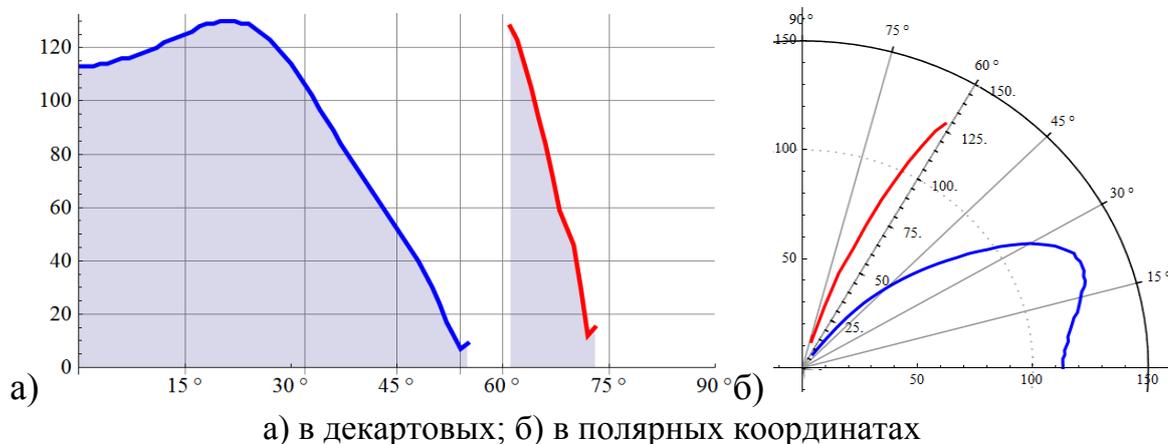


Рисунок 3.14 – Показатель концентрации упругой энергии во второй среде от угла преломления

Таким образом, рассмотрев задачу отражения и преломления SH упругой волны на границе полупространств упругий диэлектрик-пьезоэлектрик  $\text{KNbO}_3$ , можно утверждать, что задача поставленная в [2], действительно описывает двойное лучепреломление без изменения ветви. Для данного примера в случае падения упругих SH волн в диапазоне  $39^\circ$ - $52^\circ$  будем фиксировать помимо основной преломленной волны, концентрированную упругую волну в направлении  $62^\circ$ . Видимо некоторая часть энергии распространяется в виде ПАВ вдоль границы полупространств с затуханием в глубину. Задача по определению условий существования ПАВ Г-Б рассмотрена в четвертом разделе.

Согласно (3.4.2) упругая волна порождает электромагнитную волну TE поляризации в пьезополупространстве. В рис. 3.15 приведен график коэффициента генерации ЭМ волны упругой SH волной.

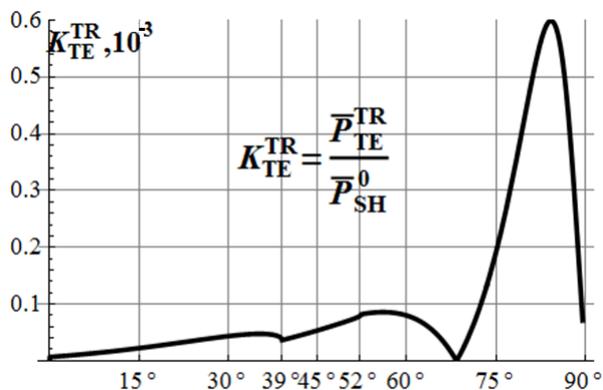


Рисунок 3.15 – Коэффициент трансформации энергии SH волн в электромагнитную

#### 4.5 Численный анализ матрицы **G**

Для численного решения задач отражения и преломления электромагнитной волны, расчета зависимости коэффициентов отражения и преломления от угла падения на границе двух сред изотропной диэлектрической среды и анизотропной среды ромбической симметрии класса mm2 необходимо провести численный анализ элементов полученных матриц **R** и **G**.

Продолжая расчеты согласно параметров среды как в разделе 3.2.1 по формуле (3.2.6) проанализируем поведение элементов матрицы **R** от угла падения TE волны.

Берем произвольные значения угла падения, например, при углах  $\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{12}$ . Элементы матрицы **R** имеют соответственно значения:

$$\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{12}\right) = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega r_{14} & 0 & r_{34} \\ -i\omega r_{23} & 0 & r_{43} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 - i5.56 \times 10^{-15} & 0 & 0 + i6.43 \times 10^{-12} \\ 0 + i4.49 \times 10^{13} & 0 & -8.636 & 0 \\ 0 & -i\omega r_{14} & 0 & -0.0128 \\ -i\omega r_{23} & 0 & -0.0075 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 - i5.56 \times 10^{-15} & 0 & 0 + i1.06 \times 10^{-11} \\ 0 + i4.49 \times 10^{13} & 0 & -0.00245 & 0 \\ 0 & -i\omega r_{14} & 0 & -0.0128 \\ -i\omega r_{23} & 0 & -1.29 \times 10^{-6} & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы  $r_{21}, r_{12}$  изменяются очень слабо, поэтому строим график зависимости для остальных элементов:

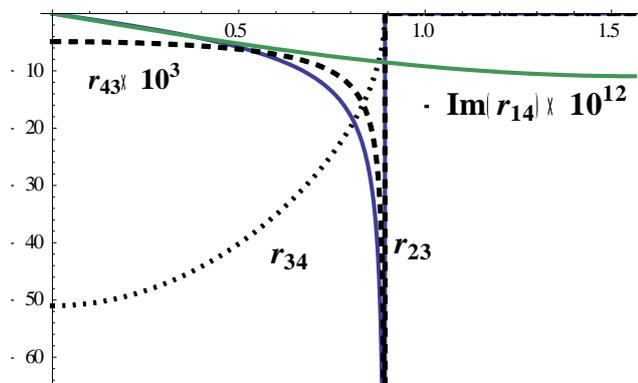


Рисунок 3.16 – График зависимостей элементов матрицы **R** от значения угла  $\theta$  в радианах для изотропных параметров (3.2.6).

Из графика (Рис 3.16) зависимостей элементов матрицы  $\mathbf{R}$  от значения угла падения (рассматривался угол для ТЕ волны, упругая волна распространяется вдоль оси X) видно, что кривые имеют обрыв (уходят в бесконечность) при определенном угле.

Теперь проанализируем матрицу  $\mathbf{R}$  для полупространства ниобата калия (рассматривается изменение угла падения для упругой волны) Из графика (Рис. 3.17) видно, что элементы  $r_{12}$ ,  $r_{14}$ ,  $r_{34}$  имеют экстремумы при одинаковых углах  $\theta$ . Элементы  $r_{21}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{43}$  имеют большие масштабы и стремятся в бесконечность при 90 градусах.

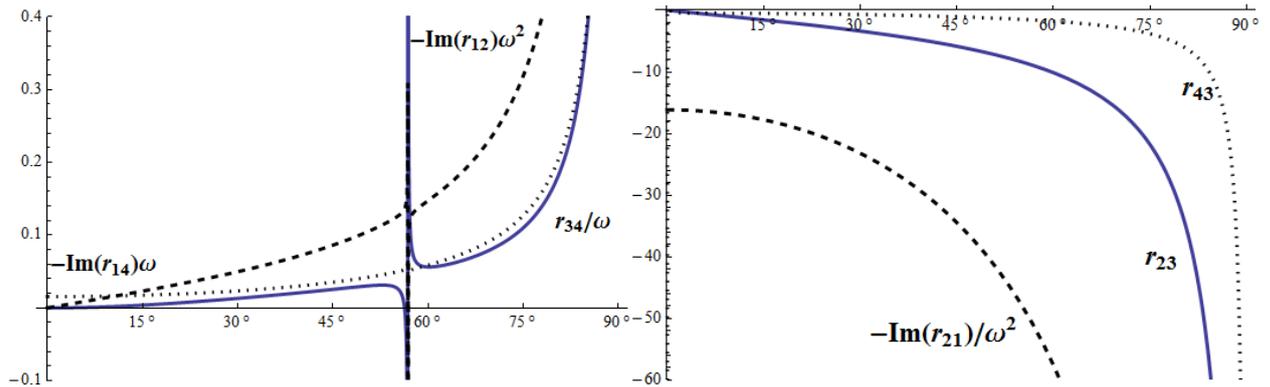


Рисунок 3.17 – График зависимостей элементов матрицы  $\mathbf{R}$  от значения угла  $\theta$  для анизотропных параметров (KNbO3)

При углах  $\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{12}$  элементы матрицы  $\mathbf{G}$  имеют соответственно значения (изотропный случай, падает электромагнитная волна):

$$\mathbf{G}\left(\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{12}\right) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.76 & 0 & -i1.64 \times 10^{-13} & 0 \\ 0 & 0.76 & 0 & 141.98 \\ -i1.4198 \times 10^8 & 0 & -0.0274 & 0 \\ 0 & 1.64 \times 10^{-7} & 0 & 0.0274 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.76 & 0 & -i9.59 \times 10^{-17} & 0 \\ 0 & 0.76 & 0 & 453.78 \\ -i26472.2 & 0 & -0.999 & 0 \\ 0 & 1.643 \times 10^{-6} & 0 & 0.998 \end{pmatrix}$$

Видно, что до угла полного внутреннего отражения  $g_{33} = -g_{44}$ ;  $g_{42} = i\omega g_{13}$ ;  $g_{32} = i\omega g_{24}$ . Такая симметрия справедлива только для случая  $c_{44} = c_{55}$ ,  $e_{15} = e_{24}$ , как для параметров данного примера.

После угла полного внутреннего отражения  $g_{33}, g_{44} \rightarrow 1$  стремятся к единице (Рис. 3.18), но из за трансформации ЭМ энергии в упругую, часть энергии переходит в механическую. Из графика видно, что диагональные элементы нормированы на единицу и представляют собой безразмерные коэффициенты, не диагональные элементы используются для оценки генерируемой упругой волны от падающей ТЕ волны.

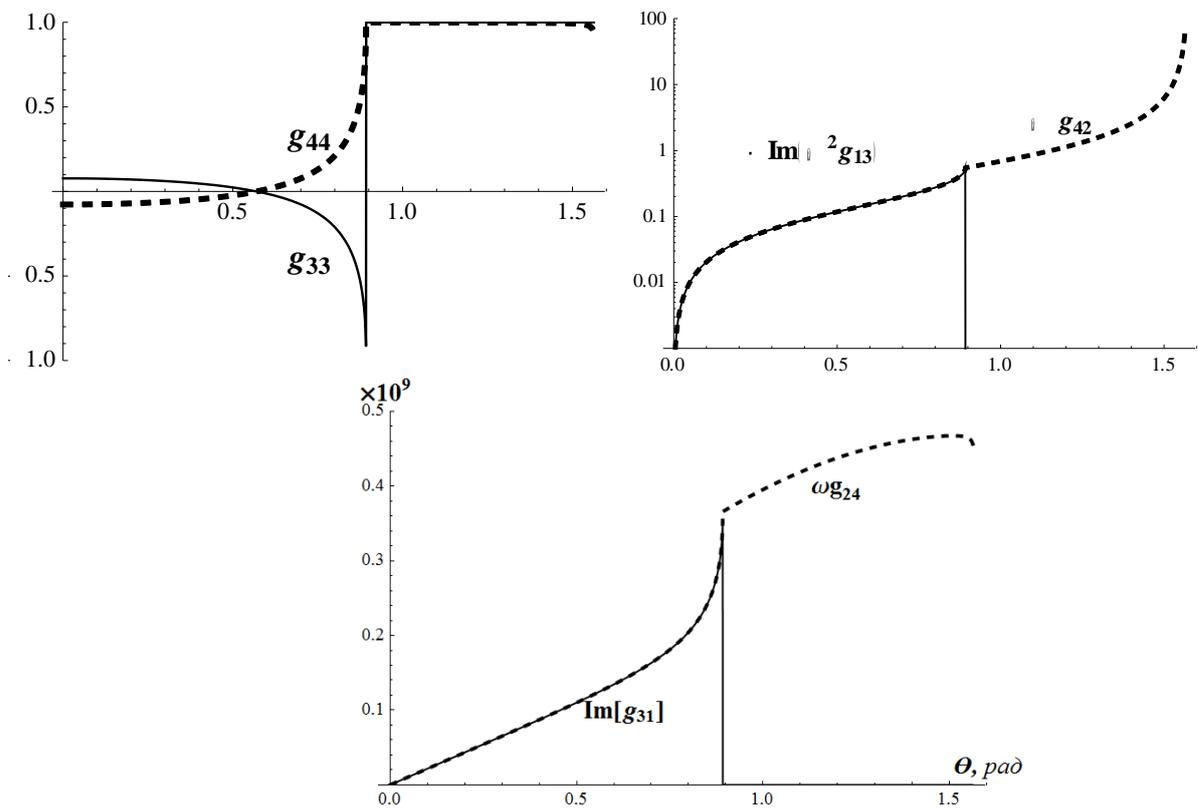


Рисунок 3.18 – Графики зависимостей элементов матрицы  $\mathbf{G}$  от угла  $\theta$  для границы параметров жидкость-пьезоэлектрик (падает ТЕ волна)

Можно подробно проанализировать элементы матрицы  $\mathbf{G}$  для двух разветвленных упругих волн из задачи раздела 3.4, двойного лучепреломления упругой волны без изменения ветви. В (Рис. 3.19) проанализированы изменения элементов матриц:  $g_{11}$ ,  $g_{22}$ ,  $g_{24}$  и  $g_{13}$ .

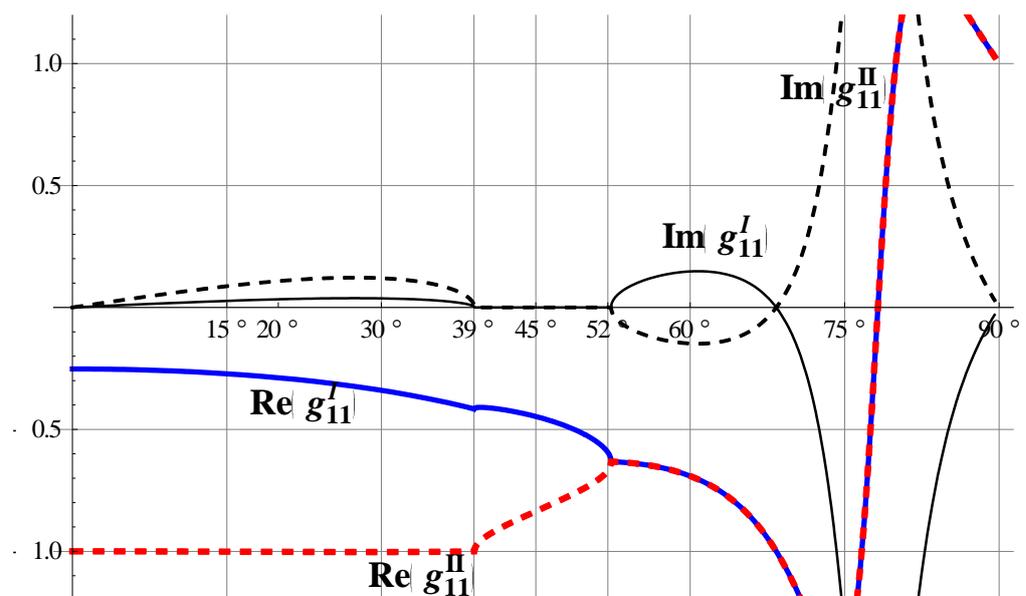


Рисунок 3.19 – График зависимостей элементов матрицы  $\mathbf{G}$  от угла  $\theta$  (к задаче двойного лучепреломления без изменения ветви), лист 1

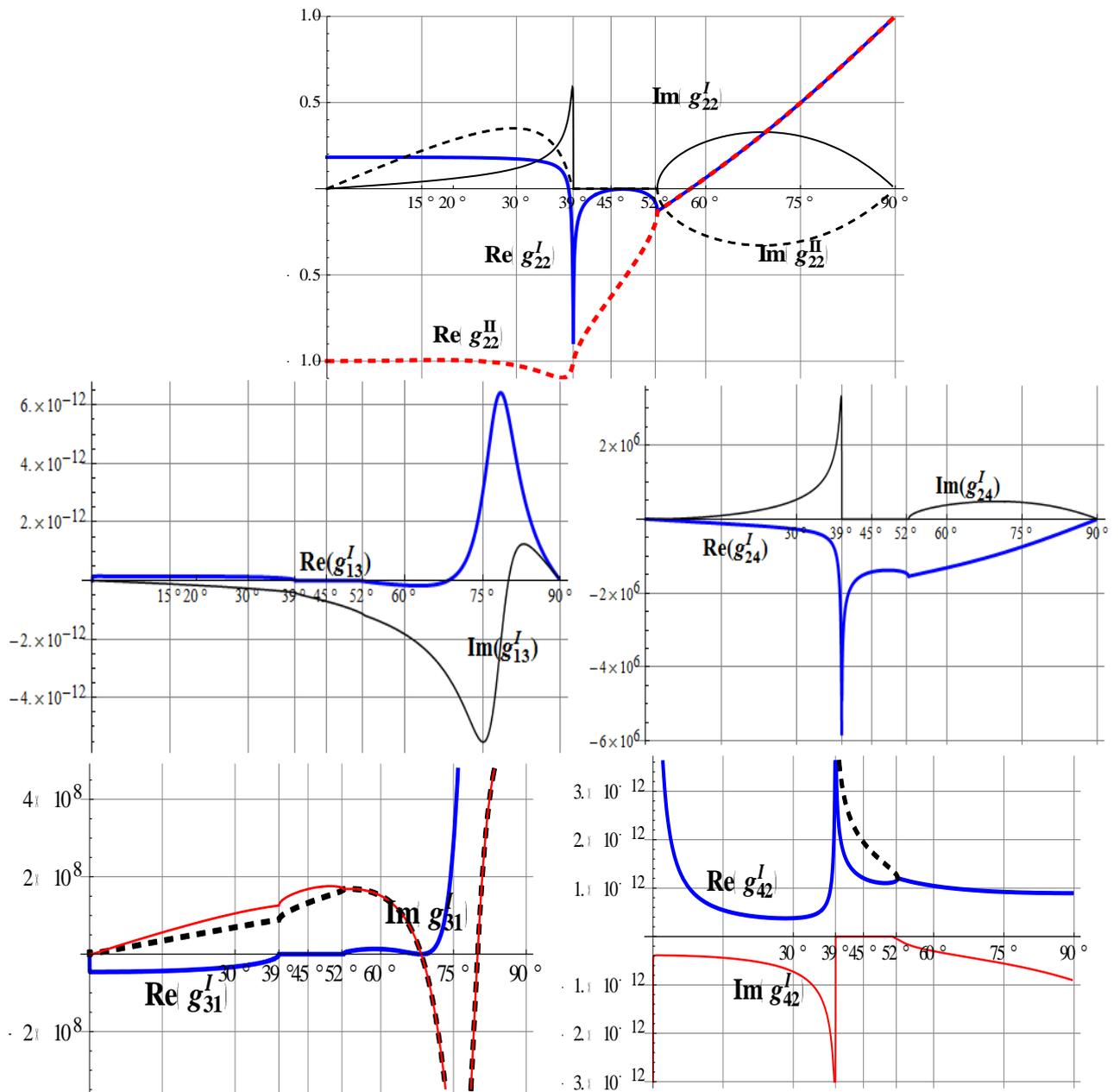


Рисунок 3.19 – График зависимостей элементов матрицы  $\mathbf{G}$  от угла  $\theta$  (к задаче двойного лучепреломления без изменения ветви), лист 2

Анализ матриц  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{R}$  дают возможность определить характеристики поверхностных волн ГБ. Условие обращения элементов матрицы в бесконечность совпадает с дисперсионным уравнением для ПАВ Г-Б. Это совпадение объясняется тем, что формально задачу о распространении ПАВ можно рассматривать как частный случай задачи об отражении объемных волн при условии, что падающая волна отсутствует, а углы скольжения отраженных волн могут принимать мнимые значения [124].

Не смотря на большое обилие комплексных чисел разных величин в матрицах  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{G}$  формулы для энергетических коэффициентов отражения и преломления (3.2.15), (3.2.16) не содержат комплексных чисел (мнимые части) до наступления угла полного внутреннего отражения.

#### 4 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ГУЛЯЕВА-БЛЮСТЕЙНА

Акустические волны в твердых телах можно разделить на объемные, поверхностные, волноводные и канализированные. Объемные акустические волны (ОАВ) распространяются во всем объеме твердого тела. Поверхностные акустические волны (ПАВ) распространяются вблизи свободной поверхности твердого тела, либо вблизи поверхности раздела двух различных сред. Их фазовая скорость направлена параллельно этой поверхности, а интенсивность убывает с глубиной проникновения в объем твердого тела. В общем случае при заданном направлении волнового вектора (фазовой скорости) в кристалле могут распространяться три плоские объемные волны: одна квазипродольная и две - квазипоперечные. В первой из них частицы среды колеблются почти параллельно фазовой скорости, а в двух других - почти перпендикулярно ей. Векторы смещения частиц в указанных трех волнах всегда взаимно ортогональны и имеют определенные для данного кристалла направления по отношению к осям кристаллофизической системы координат. Существуют в кристалле направления, называемые поперечными или сдвиговыми нормальными, когда лишь одна из указанных волн является чисто поперечной. При заданном направлении волнового вектора величины фазовых скоростей у названных трех волн в общем случае различны. Групповые скорости также различаются и могут не совпадать с фазовыми по направлению. Поверхностные волны обладают по сравнению с объемными рядом преимуществ в эксперименте и практическом использовании: относительной простотой возбуждения и приема, возможностью регистрации и управления волной в любой точке на пути ее распространения вдоль поверхности [9, 10, 82-85].

Волна Гуляева-Блюстейна (Г-Б), один из видов поверхностных акустических волн (ПАВ) проявляющиеся в пьезоэлектрических кристаллах который был открыт в 1968 г. в СССР Гуляевым Ю.В. и независимо в США Блюстейном [81, 82]. Они имеют два характерных признака. Во-первых, они существуют лишь в пьезоэлектрических кристаллах вблизи свободной границы и, во-вторых, частицы среды испытывают чисто поперечные колебания в направлении, параллельном поверхности ("горизонтальная" поляризация). Волны Гуляева-Блюстейна проникают в колеблющуюся среду более глубоко, чем волны Релея и Стоунли. Благодаря прямому пьезоэффекту волна Гуляева-Блюстейна сопровождается медленной волной электрического поля над поверхностью пьезоэлектрика возможность описания которой теряется в квазистатическом приближении.

Большинство устройств на ПАВ используют волны Рэлея, которые не обладают дисперсией, распространяются в приповерхностном слое толщиной порядка длины волны. Таким образом, на частотах выше одного гигагерца глубина локализации этих волн составляет около микрона, что очень чувствительна к качеству обработки поверхности. Второй тип бездисперсионной ПАВ – волна Г-Б. Локализация на поверхности обеспечивается уменьшением «ужесточенной» пьезоэлектрической постоянной вблизи поверхности, и следовательно, уменьшением скорости сдвиговых

объемных акустических волн в приповерхностном слое [10]. Эффективность их возбуждения обусловили их широкое применение в радиотехнике и электронике. В работе [125] проанализированы условия существования и показаны срезы кристаллов где могут существовать сдвиговые ПАВ. Экспериментальное и аналитическое исследование характеристик ПАВ остается актуальным [120]. Волны Г-Б характеризуются скоростью, показателем спадания в глубину (иногда – коэффициент затухания), глубиной локализации и коэффициентом электромеханической связи. В научной литературе эти параметры определены в основном для кристаллов высокой симметрии, как для кубической, тетрагональной и гексагональной симметрии [86, 126-128]. В работе [128] используя девятимерную (9x9) матрицу по конструкции Voigt [58] решается задача на существование волн ГБ при разных граничных условиях. В котором говорится, что возникают трудности (полином 16 степени) при получении аналитического выражения для волн ГБ при свободной поверхности и о необходимости применять численные методы. С понижением симметрии аналитическое исследование связи акустических и электрических полей становятся сложнее и используются разные приближенные численно-аналитические методы. Уравнения применяемые для описания ПАВ Г-Б в основном связаны с квазистатическим приближением. В котором электрическое поле выражается через скалярный потенциал  $\phi$ . Сравнительная оценка вклада ЭМ волны для ПАВ Г-Б проведена в [28, 129].

Следует отметить, что при анализе влияния металлизированной поверхности на характеристики акустических волн традиционно используется теория возмущений, которая применима лишь для слабых пьезоэлектриков. В случае же пьезоэлектриков, поддерживающих распространение акустических волн с высоким коэффициентом электромеханической связи, использование упомянутой теории может приводить к существенному расхождению между теоретическими и экспериментальными результатами [88, 89]. Например, ниобат калия ( $\text{KNbO}_3$ ) обладает очень сильными электрооптическими и акустооптическими свойствами, также и характеризуется высоким уровнем электромеханической связи [74, 75, 104]. Решение задачи на ПАВ в полной электромагнитной постановке позволит описать ЭМ волны порождаемые ПАВ.

#### **4.1 Условия существования волн Гуляева-Блюстейна**

##### **4.1.1 Металлизированная поверхность**

Граничные условия для ПАВ Г-Б распространяющиеся в кристалле с X-срезом, в Y-направлений выражаются вектор-столбцом, в которую входят смещение и напряжение SH волны и параметры электромагнитной волны в среде и в вакууме  $\vec{W} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t \exp(i\omega t - imy)$  при  $x=0$  (Рис. 4.1).

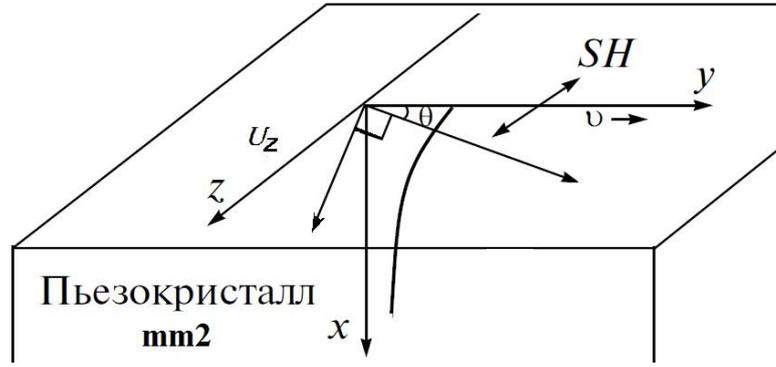


Рисунок 4.1 - Обозначение координатных осей и направления распространения ПАВ Г-Б

Матрица коэффициентов  $\mathbf{B}$ , описывающая упругую поперечно-сдвиговую волну в связке с электромагнитной волной в пьезокристаллах ромбической симметрии класса mm2 имеет вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{55}^D} & 0 & \frac{-k_y e_{15}}{\omega \epsilon_{11} c_{55}^D} \\ k_y^2 c_{44} - \rho \omega^2 & 0 & -ik_y e_{24} & 0 \\ 0 & \frac{ik_y e_{15}}{\epsilon_{11} c_{55}^D} & 0 & i\omega \left( \frac{k_y^2 c_{55}}{\omega^2 \epsilon_{11} c_{55}^D} - \mu_3 \right) \\ -k_y \omega e_{24} & 0 & -i\omega \epsilon_{22} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$\vec{\mathbf{W}} = (u_z, \sigma_{xz}, E_y, H_z)^t$$

Где  $c_{55}^D = c_{55} + e_{15}^2 / \epsilon_{11}$ ;  $c_{44}^D = c_{44} + e_{24}^2 / \epsilon_{22}$ .

На основе (1.4.13) и граничных условий определена матрица  $\mathbf{R}$  в (3.1.1) для границы пьезоэлектрического полупространства [67, 68, 101, 102, A1, A4, A5], приведем ее еще раз:

$$\mathbf{T}_0^\pm = \frac{1}{2} \mathbf{I} \mp \mathbf{R}; \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{B} - k_{1x} k_{2x} \mathbf{B}^{-1}}{2i(k_{1x} + k_{2x})} \quad (4.1.2)$$

Анализ матрицы  $\mathbf{R}$  дает возможность определить характеристики поверхностных волн ГБ. Условия существования волн Г-Б для закороченной металлизированной поверхности следует из граничных условия:

$$\mathbf{W}(0) = (u_z, 0, 0, H_z)^t \quad (4.1.3)$$

С учетом граничных условия получаем два уравнения условия существования волн Г-Б:

$$\begin{aligned}
r_{21} &= \left( b_{21} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_{34} \right) \frac{1}{2i(k_1 + k_2)} = 0 \\
r_{34} &= \left( b_{34} - \frac{\Delta_1}{\Delta_2} b_{21} \right) \frac{1}{2i(k_1 + k_2)} = 0
\end{aligned}
\tag{4.1.4}$$

Условия в (4.1.4) идентичны и дают одинаковые квадратные уравнения:

$$\beta_m^2 + \beta_m \frac{K_{D15}^2 - 1}{\sqrt{c_r} \epsilon_r} - K_{D24}^2 = 0
\tag{4.1.5}$$

Корни которого:

$$\beta_m = -\frac{1}{2} \frac{(1 - K_{D15}^2)}{\sqrt{\epsilon_r} c_r} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - K_{D15}^2)^2}{\epsilon_r c_r} + 4K_{D24}^2}
\tag{4.1.6}$$

$$\text{Здесь } c_r = \frac{c_{44}^D}{c_{55}^D}; \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2};$$

Для класса  $mm2$ , где  $e_{15} \neq e_{24}$ ,  $\epsilon_{22} \neq \epsilon_{11}$ ,  $c_{44} \neq c_{55}$ , коэффициенты электромеханической связи в объеме определяется как:

$$K_{D15}^2 = e_{15}^2 / (\epsilon_{11} c_{55}^D); \quad K_{D24}^2 = e_{24}^2 / (\epsilon_{22} c_{44}^D)
\tag{4.1.7}$$

Анализируя квадратные корни из уравнения (4.1.5) отбрасываем нефизическое решение, отрицательное или превышающее единицу. Для ниобата калия при металлизации  $\beta_{um} = 0.811$ . В случае распространения ПАВ волн вдоль оси  $X$  (срез перпендикулярно оси  $Y$ ) используя матрицу коэффициентов (1.2.8б) определяется показатель спадания  $\beta$ :

$$\beta_m = -\frac{1}{2} (1 - K_{D24}^2) \sqrt{\frac{\epsilon_{11} c_{44}^D}{\epsilon_{22} c_{55}^D}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_{11} c_{44}^D}{\epsilon_{22} c_{55}^D} (1 - K_{D24}^2)^2 + 4K_{D15}^2}
\tag{4.1.8}$$

#### 4.1.2 Свободная поверхность

Условия существования волн Г-Б для свободной поверхности на границе полупространство-вакуум следуют из граничных условий для вакуума и для пьезополупространства соответственно:

$$\mathbf{W}^0(0) = (0, 0, E_y, H_z)^t; \quad \mathbf{W}(0) = (u_z, 0, E_y, H_z)^t
\tag{4.1.9}$$

С учетом граничных условия (4.1.9) получаем два кубических уравнения условия существования волн Г-Б:

$$(i\omega r_{14}^2 + r_{12}(r_{34} + r_{34}^0))(i\omega r_{23}^2 + r_{21}(r_{43} + r_{43}^0)) = 0 \quad (4.1.10)$$

где  $r_{ij}^0$  – определяется из матрицы коэффициентов для вакуума и имеет вид:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{34}^0}{2i\chi_0} \\ \frac{b_{43}^0}{2i\chi_0} & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{W}} = (E_y, H_z)^t; \quad b_{34}^0 = -\frac{k_y^2}{i\omega\varepsilon_0} \left(1 - \frac{v_{ГБ}^2}{v_{ГЕ}^2}\right); \quad b_{43}^0 = i\omega\varepsilon_0; \quad (4.1.11)$$

Здесь  $\chi_0$  – волновой вектор ЭМ волны в вакууме,  $k_y$  – компонента волнового вектора вдоль оси Y.

Обратная матрица коэффициентов:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{43}}{\Delta_2^2} & 0 & -\frac{b_{23}}{\Delta_2^2} \\ \frac{b_{34}}{\Delta_1^2} & 0 & -\frac{b_{14}}{\Delta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{i\omega b_{23}}{\Delta_2^2} & 0 & \frac{b_{21}}{\Delta_2^2} \\ \frac{i\omega b_{14}}{\Delta_1^2} & 0 & \frac{b_{12}}{\Delta_1^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

Показатель спадания ПАВ Г-Б описывается выражением:

$$\beta_u^2 = 1 - \frac{v_{ГБ}^2}{v_{SH}^2} \quad (4.1.13)$$

В ходе математических преобразований в (4.1.10) заменяем показатель спадания для поверхностной электромагнитной волны в среде и в вакууме соответственно:

$$\beta_e^2 = 1 - v_{ГБ}^2 \varepsilon_1 \mu_3; \quad \beta_{e0}^2 = 1 - v_{ГБ}^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad (4.1.14)$$

В (4.1.10) допускаем, что  $\beta_e \rightarrow 1$ ,  $\beta_{e0} \rightarrow 1$  и с учетом (4.1.2) делаем следующие замены:

$$\chi_0 = k_y \beta_{e0}; \quad k_{1x} = k_y \beta_u; \quad k_{2x} = k_y \beta_e; \quad (4.1.15)$$

Из (4.1.10) следуют два кубических уравнения относительно показателя спадания ПАВ Г-Б. Уравнения относительно показателя спадания в глубину для упругой волны имеют вид:

$$\beta_u^3 + \beta_u^2 A_1 - \beta_u A_2 + A_3 = 0 \quad (4.1.16a)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{c_r}(\epsilon_2 \epsilon_r - \epsilon_0(1 + \epsilon_r)) - \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r^3}}{c_r \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_r} + \epsilon_2 \epsilon_r \sqrt{c_r}}; \quad A_3 = \frac{K_{D24}^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_0 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r} + \epsilon_2 \epsilon_r};$$

$$A_2 = \frac{\left( (K_{D15}^2 + c_r K_{D24}^2 - 1) \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_r} - 2K_{D15} K_{D24} \epsilon_0 \sqrt{c_r} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r^3} \right)}{c_r \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_r} + \epsilon_2 \epsilon_r \sqrt{c_r}};$$

$$\beta_u^3 + \beta_u^2 P_1 + \beta_u P_2 + P_3 = 0 \quad (4.1.16b)$$

$$P_1 = \frac{\left( \epsilon_0 (K_{D15}^2 - 1 + \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r}) - \epsilon_2 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r} (1 + \epsilon_r) \right)}{\epsilon_0 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r} + c_r \epsilon_2 \epsilon_r};$$

$$P_2 = \frac{\left( K_{D15}^2 - 1 \right) \frac{\epsilon_0}{\sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r}} - K_{D24} (K_{D24} \epsilon_0 - 2K_{D24} \epsilon_2) - \left( c_r K_{D24}^2 - 1 + K_{D15}^2 \right) \frac{\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{c_r}}}{\epsilon_0 + c_r \epsilon_2 \epsilon_r};$$

$$P_3 = \frac{K_{D24}^2 (\epsilon_2 (\epsilon_r - 1) - \epsilon_0)}{\epsilon_0 + \epsilon_2 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r}}; \quad c_r = \frac{c_{D4}}{c_{D5}}; \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2};$$

В случае распространения сдвиговых волн вдоль оси  $X$  (срез перпендикулярно оси  $Y$ ) используя матрицу коэффициентов (1.2.8б) определим показатель спадания  $\beta$  из  $(i\omega r_{14}^2 - r_{12}(r_{34} + r_{34}^0))(i\omega r_{23}^2 - r_{21}(r_{43} + r_{43}^0)) = 0$ :

$$\beta_u^2 + \beta_u S_1 + S_2 = 0 \quad (4.1.17a)$$

$$S_1 = \frac{\beta_u (\sqrt{c_r} (\epsilon_2 + 2\epsilon_0) \sqrt{\epsilon_r} + c_r \epsilon_2 \epsilon_r)}{\epsilon_0 + \epsilon_2 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r}}; \quad S_2 = \frac{2K_{D15} K_{D24} \epsilon_0 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r} - K_{D15}^2 \epsilon_0 + c_r (\epsilon_2 - (K_{D24}^2 - 1) \epsilon_0) \epsilon_r}{\epsilon_0 + \epsilon_2 \sqrt{c_r} \sqrt{\epsilon_r}}.$$

$$\beta_u^3 + \beta_u^2 Q_1 + \beta_u Q_2 - Q_3 = 0 \quad (4.1.17b)$$

$$Q_1 = \frac{\left( \sqrt{c_r} (\epsilon_0 + 2\epsilon_2 \epsilon_r) - c_r \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_r} (K_{D24}^2 - 1) \right)}{\epsilon_0 \sqrt{c_r} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r}}; \quad Q_3 = \frac{K_{D15}^2 \epsilon_0 \sqrt{c_r}}{\epsilon_0 \sqrt{c_r} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r}};$$

$$Q_2 = \frac{\beta_u \left( K_{D15} \sqrt{c_r} (2K_{D24} \epsilon_2 \epsilon_r - K_{D15} \epsilon_0) - c_r \sqrt{\epsilon_r} (K_{D24}^2 - 1) (\epsilon_0 + \epsilon_2 \epsilon_r) - K_{D15}^2 \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r} \right)}{\epsilon_0 \sqrt{c_r} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_r}};$$

Анализируя кубические корни с помощью формулы Кардана из уравнений (4.1.16) и (4.1.17) отбрасываем нефизические решения, отрицательные или превышающие единицу. Корни с положительным знаком соответствуют спаданию в глубину, отрицательные – нефизические решения, означают экспоненциальное увеличение амплитуды. Поэтому эти решения отбрасываются.

Если подставить все пьезоупругие параметры для ниобата калия получим один физически верный корень  $\beta_u=0.6084$  из (4.1.16б) остальные – не являются физическими решениями. В случае X-срез, Y-направления из (4.1.17а) получаем  $\beta_u=0.2356$ . Эти значения показателя спадания соответствуют с экспериментальными и численными результатами [77, 78, 107, 108].

При попытке аналитически описать данную задачу при свободной поверхности в [128] говорится, что получается полином 16-ой степени относительно скорости волны ГБ и о необходимости применять численные методы. Показано, что методом матрицанта получаем два кубических уравнения относительно коэффициента спадания.

#### 4.2 Характеристики ПАВ Г-Б в ромбических кристаллах класса $mm2$

Показатели спадания имеют важную роль для расчета характеристик ПАВ Г-Б. Значения скоростей волн Г-Б для свободной (полупространство-вакуум) и металлизированной поверхностей следуют из (4.1.13):

$$v_f = v_{SH} \sqrt{1 - \beta_f^2}; v_m = v_{SH} \sqrt{1 - \beta_m^2} \quad (4.2.1)$$

здесь  $v_{SH} = \sqrt{c_{44}^D / \rho} = \frac{\omega}{k_1(\theta)}$  скорость SH упругой волны в объеме.

Кроме того, метод матрицанта позволяет определить показатели спадания для поверхностной электромагнитной волны в среде и в вакууме:

$$\beta_e^2 = 1 - v_{SH}^2 (1 - \beta_f^2) \epsilon_2 \mu_3; \beta_{e0}^2 = 1 - v_{SH}^2 (1 - \beta_f^2) \epsilon_0 \mu_0 \quad (4.2.2)$$

Традиционно коэффициент электромеханической связи для поверхностных волн определяется как удвоенное относительное изменение скорости при электрическом закорачивании поверхности [3, 4]. Как известно, электрическое закорачивание поверхности можно проводить двумя различными способами: путем приближения идеально проводящей плоскости из бесконечности к пьезоэлектрику и путем изменения проводимости тонкого слоя на его поверхности от нуля до бесконечности [91, 116]. Коэффициент электромеханической связи для волн Г-Б определяется на основе соотношении [2-6]:

$$K_{GB}^2 = 2 \frac{v_f - v_m}{v_f} \quad (4.2.3a)$$

$$K_{GB}^2 = \frac{v_f^2 - v_m^2}{v_f^2} \quad (4.2.3б)$$

Однако в сильных пьезоэлектриках эти соотношения могут приводить к существенно различным результатам, иногда принимают отрицательные

значения [77, 93]. Было показано, что существуют такие кристаллографические ситуации, для которых присутствие пьезоэффекта уменьшает скорость [77].

В работах [2, 127] при определении характеристик волн Г-Б предполагаются равенства:

$$e_{15} \cong e_{24}, \varepsilon_{11} \cong \varepsilon_{22}, c_{44} \cong c_{55} \quad (4.2.4)$$

При этих допущениях из (4.1.6) и (4.1.16) следуют известные формулы для показателей спадания в случае свободной и металлизированной поверхностей [2-5] в пьезокристаллах высокой симметрии:

$$\beta_f = \frac{K_D^2}{1 + \varepsilon_{11}/\varepsilon_0}; \beta_m = K_D^2 \quad (4.2.5)$$

и соответственно, значения скоростей [2-5]:

$$v_f = v_{SH} \sqrt{1 - \frac{K_D^4}{(1 + \varepsilon_{11}/\varepsilon_0)^2}}; v_m = v_{SH} \sqrt{1 - K_D^4} \quad (4.2.6)$$

Ниже, на основе полученных формул и пьезоупругих параметров (Табл. 4) приведены рассчитанные значения характеристик волн Гуляева–Блюстейна для кристаллов класса  $mm2$ , как  $\text{KTiOPO}_4$ ,  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ ,  $\text{KTiOAsO}_4$  и  $\text{KNbO}_3$ . Проведено сравнение с ранее известными расчетами (Табл. 5).

Таблица 4 – Пьезоупругие параметры рассматриваемых кристаллов

Кристалл	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_{44}$ , ГПа	$c_{55}$ , ГПа	$e_{15}$ , Кл/м <sup>2</sup>	$e_{24}$ , Кл/м <sup>2</sup>	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon_{22}/\varepsilon_0$
$\text{KTiOPO}_4$ [115]	3024	59.19	54.54	0.332	0.403	11.44	11.47
$\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ [115]	5300	65	66	2.8	3.4	222	227
$\text{KTiOAsO}_4$ [109]	3454	58.0	45.5	0.54	0.65	12.9	12.2
$\text{KNbO}_3$ [106]	4630	74.3	25	5.16	11.7	34	780

где  $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Таблица 5 – Сравнительные характеристики волны Г-Б для  $\text{KTiOPO}_4$ ,  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ ,  $\text{KTiOAsO}_4$  и  $\text{KNbO}_3$  (X -срез, распространение вдоль оси Y)

Кристалл	$\beta_f$	$\beta_m$	$v_f$ , м/с	$v_m$ , м/с	$K_{BG}^2, 10^{-4}$	$1-\beta_e, 10^{-7}$
$\text{KTiOPO}_4$	0.0027	0.0272	4483.54	4481.89	0.073	0.0256
$\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$	0.0022	0.0791	3653.67	3642.22	0.63	0.337
$\text{KTiOAsO}_4$	0.0018	0.0716	4233.68	4222.88	0.51	0.024
$\text{KNbO}_3$	0.2356 0.443±0.18i	0.444±0.18i 0.159	4381.8	4039.93	14.99	1.666

В табл. 6 приведены рассчитанные значения характеристик волн Гуляева–Блюстейна для кристаллов  $\text{KTiOPO}_4$ ,  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$  и  $\text{KNbO}_3$  для случая  $Y$ -срез, распространение вдоль оси  $X$ .

Таблица 6 - Характеристики волны Г-Б для  $\text{KTiOPO}_4$ ,  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$  и  $\text{KNbO}_3$  ( $Y$ -срез, распространение вдоль оси  $X$ )

Кристалл	$\beta_f$	$\beta_m$	$v_f$ , м/с	$v_m$ , м/с	$K_{BG}^2$ , %	$1-\beta_e^2, 10^{-7}$
$\text{KTiOPO}_4$	0.00151	0.0189	4289.0	4288.24	0.354	0.0235
$\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$	0.00026	0.0586	3633.92	3627.68	0.343	0.33
$\text{KTiOAsO}_4$	0.00329	0.0466	3729.9	3725.86	0.217	0.0189
$\text{KNbO}_3$	0.60847	0.811	3928.17	2895.4	52.58	1.339

Из таблиц 5, 6 наблюдается хорошее согласие характеристик волн Г-Б для слабых пьезокристаллов с ранее рассчитанными [87, 126-128]. Для слабых пьезоэлектриков формулы (4.2.3а) и (4.2.3б) дают почти одинаковые результаты. Следует, отметить значительные различия характеристик для ниобата калия, обладающего большим коэффициентом анизотропии и электромеханической связи. Для ниобата калия по (4.2.3б)  $K_{BG}^2 = 45.67\%$ . Известно, что для ПАВ в пластине КЭМС существенно увеличивается за счет граничных условий [92, 116]. Поэтому (4.2.3б) является более строгой формулой определяющее КЭМС для пьезоэлектрического полупространства и можно его переписать как:

$$K_{GB}^2 = \frac{\beta_m^2 - \beta_f^2}{1 - \beta_f^2} \quad (4.2.7)$$

### 4.3 Изменение угла среза. Численные расчеты характеристик

Если сделать срез кристалла согласно рисунку 4.1, и повернуть на  $\theta$  градусов вокруг оси  $Z$ , в плоскости  $XOY$  получим новую систему координат  $(X_1, Y_1, Z_1)$ , новая система координат связана с основным следующей матрицей поворота:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

В силу симметрии уравнений и рассматриваемых кристаллических структур четной симметрии имеет место использования матрицы (оператора) поворота.

Введение операторов для перехода от матрицы (1.2.2) в (1.2.8) выполняется только вокруг оси  $Z$ , так как разделение упругих волн по поляризациям имеет место только в этой плоскости [77, 78, 107, 126, 128]. При изменении угла среза согласно схеме поворота (рис. 4.1), на основе

соотношений (4.3.1) определяются операторы поворота для параметров среды [77, 78, 107, 126, 128]:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{24} &= e_{24} \cos^2 \theta + e_{15} \sin^2 \theta; \hat{e}_{15} = e_{15} \cos^2 \theta + e_{24} \sin^2 \theta \\ \hat{c}_{44} &= c_{44} \cos^2 \theta + c_{55} \sin^2 \theta; \hat{c}_{55} = c_{55} \cos^2 \theta + c_{44} \sin^2 \theta \\ \hat{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta; \hat{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} \cos^2 \theta + \varepsilon_{11} \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (4.3.2)$$

Формула (4.1.6) переходят в (4.1.8) и обратно т.е. индексы взаимозаменяемы для кристаллических структур четной симметрии. Формулы (4.2.1-4.2.3) с учетом (4.3.2) определяют характеристики Г-Б для любого угла среза перпендикулярного к оси Z. В рис. 4.2 показана зависимость показателей спадания  $\beta_f, \beta_m$  волн Г-Б для ниобата калия при повороте среза вокруг оси Z.

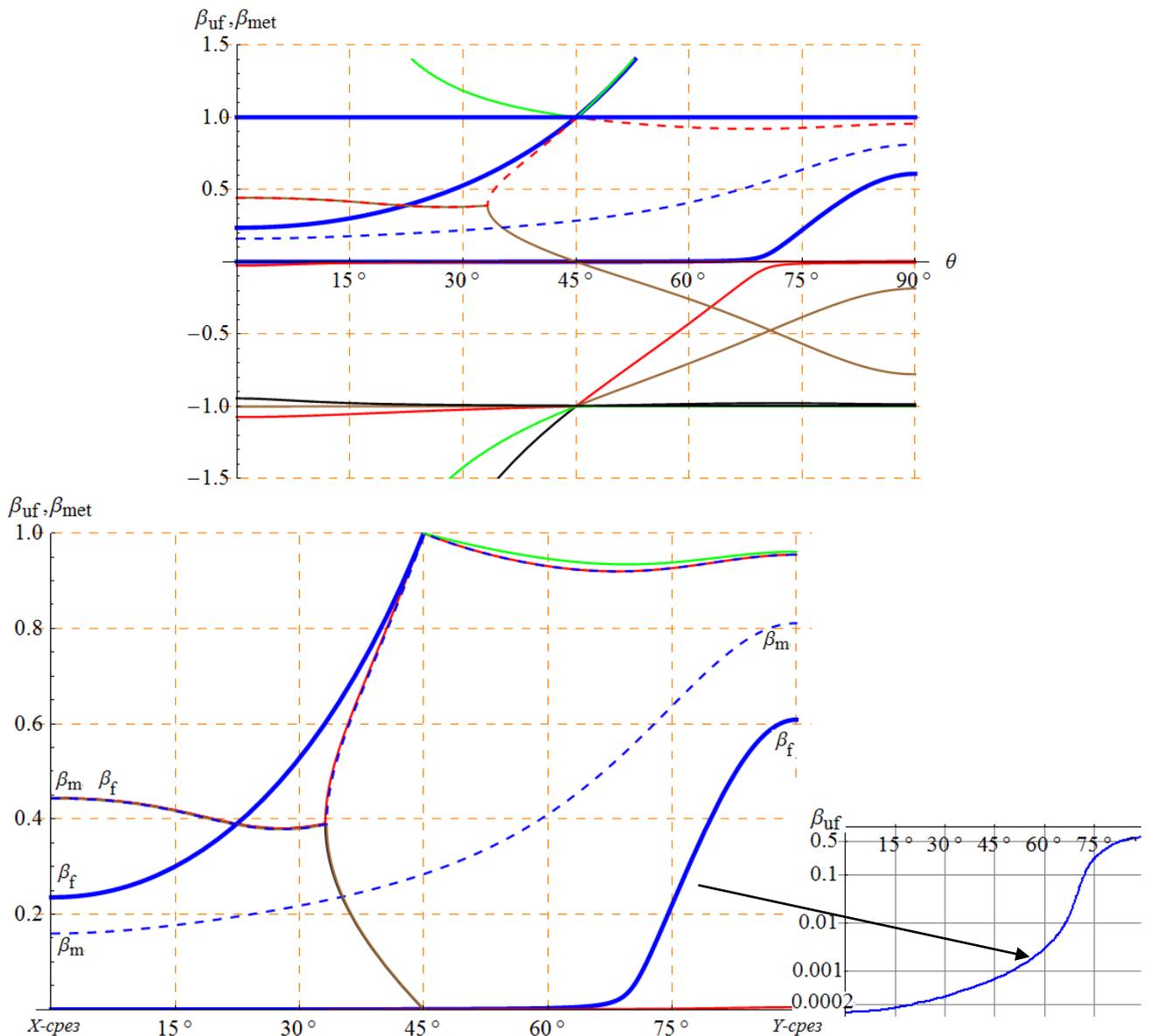


Рисунок 4.2 – Изменение показателя спадания волн Г-Б для ниобата калия. Срез меняется перпендикулярно оси Z (ХОУ)

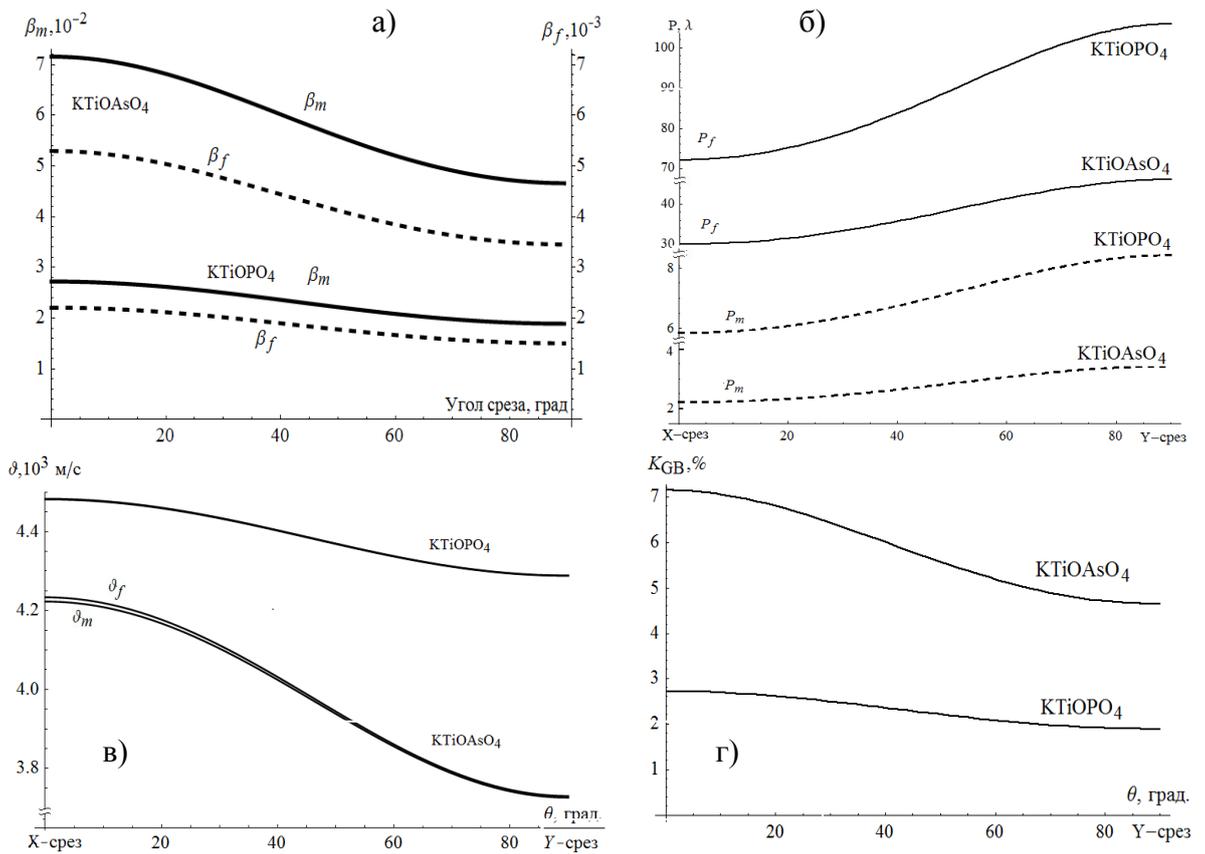


Рисунок 4.3 – Характеристики волн Г-Б для  $\text{KTiOAsO}_4$  и  $\text{KTiOPO}_4$

На рис.4.3 наблюдаются значительные различия характеристик волн Г-Б для  $\text{KTiOAsO}_4$ , обладающего относительно большим коэффициентом электромеханической связи, по сравнению с  $\text{KTiOPO}_4$ . На рисунке 4.3 глубина проникновения определяется в длинах волн  $P = \frac{\lambda}{2\pi\beta}$  [4]; а) зависимость показателей спадания  $\beta_f$ ,  $\beta_m$  от угла среза; б) зависимость глубины проникновения в длинах волн от угла среза (металлизированная и свободная поверхность); в) значения скоростей; г) коэффициента электромеханической связи ПАВ.

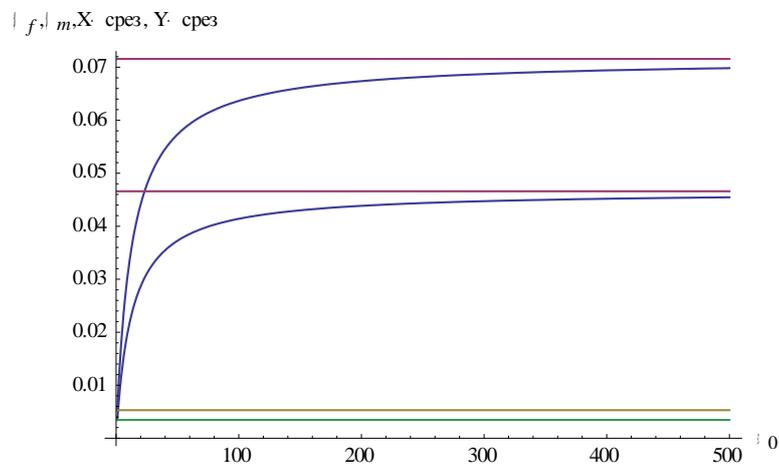


Рисунок 4.4 – Переход от случая свободной (вакуум) границы к случаю идеально металлизированной поверхности для  $\text{KTiOAsO}_4$

Наряду с исследованием характеристик акустических волн в пьезоэлектриках, большой практический интерес вызывает возможность управления свойствами ПАВ путем изменения электрических граничных условий (Рис. 4.4). Известно, что изменение проводимости тонкого слоя, расположенного на поверхности пьезоэлектрического материала, оказывает сильное влияние на скорость и затухание ПАВ. Если проводимость слоя чувствительна к внешним воздействиям (химическим элементам, электрическим и магнитным полям, свету и т.д.), то на основе таких пьезоэлектрических структур возможно создание различных химических датчиков, датчиков электрических и магнитных полей, фазовых и амплитудных модуляторов акустических волн, фотодетекторов и т.д. Другая возможность плавного изменения электрических граничных условий это путем приближения или удаления идеально проводящей плоскости от поверхности пьезоэлектрика. Данный метод позволяет предотвратить нежелательные перескоки с одной ветви решения на другую при расчетах характеристик ПАВ. При постепенном увеличении диэлектрической проницаемости поверхности пьезоэлектрического полупространства можно увидеть постепенный переход от случая свободной (вакуум) границы к случаю идеально металлизированной поверхности пьезополупространства. На этом принципе основываются датчики на ПАВ по анализу состава жидкости. Фиксируется изменение проводимости, процентный состав переносчиков заряда в примеси жидкости [14,15, 89-91].

#### 4.4 Волна Гуляева-Блюстейна в тетрагональных пьезокристаллах

Рассматривается направление распространения ПАВ Гуляева-Блюстейна вдоль оси  $X$  со срезом перпендикулярным оси  $Z$  в тетрагональных кристаллах класса  $\bar{4}2m$  (рис. 4.5) [A5].

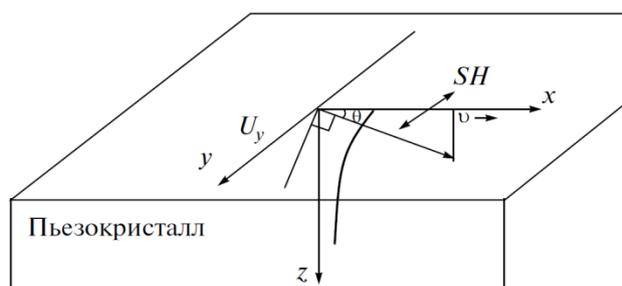


Рисунок 4.5 – Обозначение координатных осей и направление распространения ПАВ Г-Б

При распространении пьезоупругих волн в координатной плоскости ( $Z$  срез)  $ZOX$  (Рис.3.4) ( $k_y=0$ ) матрица коэффициентов имеет структуру (1.3.6б):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}} & \frac{e_{14}}{c_{44}} & 0 \\ k_y^2 c_{66}^D - \rho \omega^2 & 0 & 0 & -\frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega \epsilon_{33}} \\ i\omega b_{24} & 0 & 0 & -i\omega \left( \frac{k_y^2}{\omega^2 \epsilon_{33}} - \mu_3 \right) \\ 0 & i\omega b_{13} & i\omega \epsilon_{11}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$\vec{W} = (u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x)^t$$

Рассматривается пьезоэлектрическое полупространство со свободной поверхностью, поэтому в СДУ условия существования волн Г-Б должно удовлетворять граничным условиям на поверхности полупространство-вакуум:

$$\mathbf{W}(0) = (u_z, 0, E_y, H_z)^t \quad (4.4.2)$$

учитывая условия (4.1.9) получим:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} r_{21} & r_{24} \\ r_{24} & r_{34}^+ \end{bmatrix} = 0, \quad r_{21} r_{34}^+ - r_{24}^2 = 0 \quad (4.4.3)$$

где  $r_{34}^+$  - означает учет  $\epsilon_0$  - диэлектрической проницаемости вакуума.

Раскрыв и упрощая из которого получим уравнение относительно  $\beta$ :

$$\beta^2 - 2\gamma\beta + \alpha K_{36}^2 = 0, \quad \text{где } K_{36}^2 = \frac{e_{36}^2}{\epsilon_{33} c_{66}} \quad (4.4.4)$$

корни из (4.4.4):

$$\beta_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha K_{36}^2} \quad (4.4.5)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\sqrt{\epsilon_{11} \epsilon_{33} c_{66}}}{\sqrt{\epsilon_{11} \epsilon_{33} c_{66} - \epsilon_0 \sqrt{c_{44}}}}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{c_{44}^D \epsilon_{11} + \epsilon_0 c_{44}}{\sqrt{\epsilon_{11} \epsilon_{33} c_{44} c_{66} - \epsilon_0 c_{44}}}; \quad c_{44}^D = c_{44} + \frac{e_{14}^2}{\epsilon_{11}}.$$

Скорость распространения волны Г-Б:

$$V_{\Gamma-B} = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho} \left( 1 - \frac{c_{44} \epsilon_{11} e_{36}^4}{c_{66} \epsilon_{33} (c_{44}^D \epsilon_{11} + \epsilon_0 c_{44})^2} \right)} \quad (4.4.6)$$

В данной главе, методом матрицанта получены условия существования и аналитические значения показателей спадания, скорости распространения, упругих и электромагнитных компонент поверхностных акустических волн

Гуляева–Блюстейна в ромбических кристаллах класса  $mm2$  в случае свободной и металлизированной поверхностей исходя из полной системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Получены показатели спадания ПАВ при распространении вдоль оси  $X$  со срезом перпендикулярным оси  $Y$ . Из полученных формул для характеристик ПАВ, распространяющиеся вдоль осей  $X$  и  $Y$ , следует их взаимный переход при повороте среза вокруг оси  $Z$ . Для примера рассчитаны характеристики волн Гуляева–Блюстейна для кристаллов  $Ba_2NaNb_5O_{15}$  и  $KNbO_3$ ,  $KTiOPO_4$ ,  $KTiOAsO_4$ . Исследованы ПАВ Гуляева–Блюстейна в средах тетрагональной симметрии класса  $\bar{4}2m$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена теоретическому исследованию процессов распространения связанных электромагнитных и упругих волн в безграничных и ограниченных пьезоэлектрических анизотропных средах ромбической и тетрагональной симметрии на основе метода матрицанта. Теоретические исследования взаимосвязанных волновых процессов в пьезоэлектрических средах проводились на основе полной системы уравнений Максвелла, решаемой совместно с уравнениями движения для упругой анизотропной среды, что представляет собой наиболее полное описание связанных волновых полей.

Методом матрицанта получены аналитические решения ряда задач и получены следующие новые результаты:

– Получены матрицы коэффициентов для пьезоэлектрических сред тетрагональной и ромбической симметрии в трехмерном и двумерном случаях распространения без использования предположения о квазистатичности электрических полей. Получены аналитические выражения для волновых векторов в однородной пьезоэлектрической среде тетрагональной и ромбической симметрии; построены поверхности волновых векторов и фазовых скоростей связанных электроупругих волн.

– Теоретически и экспериментально исследованы углы сноса между фазовой и групповой скоростями. Впервые получено явное аналитическое выражение угла сноса для пьезоэлектриков ромбической симметрии. Рассчитаны групповые скорости, анизотропия плотности потока упругой энергии.

– Аналитически решена задача отражения-преломления электромагнитной волны на границе жидкость-пьезоэлектрик, проведен численный анализ. Показано, что электромагнитная волна возбуждает упругие волны и рассчитаны энергетические коэффициенты трансформации в зависимости от угла падения.

– Исследованы потоки акустических полей при отражении и преломлении поперечно-горизонтальных упругих волн на границе диэлектрик-пьезоэлектрик. Показано, что в сильноанизотропных пьезоэлектриках в зоне вогнутости поверхности волнового вектора наблюдается двойное лучепреломление упругой волны, предсказанное М.К. Балакиревым.

– Аналитически определены условия существования и характеристики поверхностных акустических волн (ПАВ) Гуляева-Блюстейна: скорость, коэффициенты спадания для пьезоэлектрического полупространства ромбической и тетрагональной симметрии с металлизированной и свободной поверхностью.

– Впервые получены выражения для показателей спадания поля поверхностной электромагнитной волны в среде и в вакууме на основе полной системы уравнений Максвелла, решаемой совместно с уравнением движения для упругой среды.

Часть диссертации выполнена в рамках программы фундаментальных исследований в области естественных наук по теме «Распространение связанных упругих и электромагнитных волн в средах с пьезоэлектрическим эффектом для гексагональной, тетрагональной, ромбической и моноклинной сингонии» на 2012-2014 годы, гос. рег. № 0112РК02379 под руководством С.К. Тлеукунова.

Оценка полноты решений поставленных задач:

В работе показана эффективность метода матрицанта для решения задач акустоэлектроники и акустооптики с применением полной динамической теории для акустоэлектромагнетизма. Поставленные задачи решены, и приведены численные расчеты для конкретных кристаллов и срезов. Результаты сопоставлены с теоретическими и экспериментальными результатами других авторов. Полученные аналитические формулы в отличие численных методов позволяют решать аналогичные задачи в случае других кристаллов и срезов.

Экономическая эффективность или значимость работы:

Полученные результаты имеют важное значение для теоретической акустоэлектроники и кристаллоакустики. Они могут быть использованы для расчетов при конструировании различных приборов и устройств основанные на преобразовании электромагнитной энергии в механическую и обратно, различного рода фильтров на ПАВ для беспроводной связи, а также различных чувствительных сенсоров и датчиков, воспринимающих механические и электромагнитные воздействия.

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования.

В рамках данной диссертации рассматривались только поперечно-сдвиговые упругие волны связанные с электромагнитной волной ТЕ поляризации описываемые системой дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов размером  $(4 \times 4)$ . Для описания волн Рэлея или задачи отражения и преломления связанных продольных с поперечно-вертикальной волной в пьезосредах по аналогии для данной задачи необходимо рассматривать СДУ с матрицей коэффициентов размером  $(6 \times 6)$ , которые требуют дальнейшего исследования. В рамках диссертации не рассматриваются поперечно-сдвиговые упругие волны в пьезоэлектрическом слое и пластине.

По теме диссертации опубликованы статьи, входящие в перечень изданий, утвержденного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК ВАК. Результаты докладывались на международных конференциях.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю глубокую признательность и благодарность отечественному научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Садритену Кабдыгалиевичу Тлеукенову за постановку задачи, разработку метода решения, руководство и всестороннюю поддержку. Выражаю большую благодарность зарубежному научному консультанту Владимиру Геннадиевичу Можяеву – за оказанную помощь при ведении научно-исследовательской работы, при прохождении научной стажировки, за ценные советы по задачам и научно-методическую поддержку.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Указ Президента Республики Казахстан. О Государственной программе по форсированному индустриально-инновационному развитию Республики Казахстан на 2010-2014 годы: утв. 19 марта 2010 года №958.
- 2 Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.– 239 с.
- 3 Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. пер. с франц. / под ред. В.В. Леманова. М.: Наука, 1982. - 411 с.
- 4 Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. – М.: ИЛ, 1952. – 448 с.
- 5 Auld B.A. Acoustic Fields and Waves in Solids. Vol. 1. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1990. – 431 p.
- 6 Фарнелл Д. Типы и свойства поверхностных акустических волн. // В кн.: Поверхностные акустические волны / под ред. А. Олинера. – М.: Мир, 1981.– 390 с.
- 7 Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / пер. с англ.– М.: Наука, 1991. – 560 с.
- 8 Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / пер. с польск. Сер. Механика. №37. М.: Мир, 1986. -160 с.
- 9 Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. – 287 с.
- 10 Гуляев Ю.В., Хикернелл Ф.С. Акустоэлектроника: история, современное состояние и новые идеи для новой эры // Акуст. журн. –2005. – Т. 51. – № 1. – С. 101-110.
- 11 Фильтры на поверхностных акустических волнах: Расчет, технология и применение / под ред. Г. Мэттьюза., пер. с англ. ред. В.Б. Акпамбетов. – М.: Радио и связь, 1981.– 472 с.
- 12 Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. Физические основы акустооптики. М.: Радио и связь, 1985.– 340 с.
- 13 Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения. – М.: ИЛ, 1949. – 719 с.
- 14 Kiełczyński P., Szalewski M., Siegoczyński R.M., Rostocki A.J. New ultrasonic Bleustein-Gulyaev wave method for measuring the viscosity of liquids at high pressure // Rev. Sci. Instrum. – 2008. – Vol. 79. – №2. – Art. 026109 (3 p).
- 15 Kondoh J., Shiokawa S. SH-SAW Devices as effective identification system for liquids // 1994 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings. New York: IEEE, 1994. – P. 507-512.
- 16 Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: Едиториал, 2003. – 336 с.
- 17 Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. New York: Plenum Press, 1969. – 212 p.

- 18 Armstrong M.R., Reed E.J., Kim K., Glownia J.H., Howard W.M., Piner E.L., Roberts J.C. Observation of terahertz radiation coherently generated by acoustic waves // *Nature Phys.* 2009. – Vol. 5. - №4 – P. 285-288.
- 19 Ohno N., Yamada H., Ikushima K., Niimi N., Kojima Y. Imaging of electromagnetic properties via acoustic excitation // 2012 IEEE International Ultrasonics Symposium Proceedings. New York: IEEE, 2012. – P. 487-490.
- 20 Ikushima K., Watanuki Sh., Komiyama S. Detection of acoustically induced electromagnetic radiation // *Appl. Phys. Lett.* 2006. -Vol.89. – № 19.– Art. 194103 (3 p.).
- 21 Ballantyne S.M., Thompson M. Superior analytical sensitivity of electromagnetic excitation compared to contact electrode instigation of transverse acoustic waves // *Analyst.* – 2004. – Vol. 129. – №3. – P. 219-224.
- 22 Mindlin R.D. Electromagnetic radiation from a vibrating quartz plate // *Int. J. of Solids and Structures.* – 1973. – Vol. 9. – № 6. – P. 697-702.
- 23 Weis O. Surface excitation of hypersound in piezoelectric crystals by plane electromagnetic waves // *Z. Phys. B. Con. Mat.* – 1975. – Vol. 21. – №1. – P. 1-10.
- 24 Баранский К.Н., Зубарева М.А., Яковлев И.А. Возбуждение и регистрация упругих колебаний в пьезокристаллах вихревым электрическим полем катушки индуктивности // *Письма ЖЭТФ.* –1988. –Т. 47.– № 5.– С. 243-245.
- 25 Campbell C. F., Weber R. J. Calculation of radiated electromagnetic power from bulk acoustic wave resonators // 47th. Frequency Control Symposium, 1993. – P. 472-475.
- 26 Brock D.W., Joshi N.R., Russell S.D., Lasher M.E., Kasa S.D. Nondestructive acoustic emission testing system using electromagnetic excitation and method for using same // Patent: US 6823736 B1. The United States of America. – 30 Nov 2004.
- 27 Kjame J.J. Wave propagation in piezoelectric crystals // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1949. – Vol. 21. № 1. – P.159-164.
- 28 Special topics in the theory of piezoelectricity. Ed. J.Yang – New York: Springer, 2009.– 342 p.
- 29 Reed E.J., Armstrong M.R., Kim K., Glownia J.H. Atomic-scale time and space resolution of terahertz frequency acoustic waves // *Physical review letters.* – 2008. – V. 101. № 1. – Art. 014302 (4 p.).
- 30 Darinskii A.N., Clezio L.E., Feuillard G. The role of electromagnetic waves in the reflection of acoustic waves in piezoelectric crystals // *Wave Motion.* – 2008. – Vol. 45. № 4. – P. 428–444.
- 31 Darinskii A.N., Clezio L.E., Feuillard G. Electromagnetic Surface Wave Attenuation Caused by Acoustic Wave Radiation // *Electromagnetics.* – 2008. – Vol. 28. № 3. – P. 175-185.
- 32 Li S. The electromagneto-acoustic surface wave in a piezoelectric medium: The Bleustein–Gulyaev mode // *J. Appl. Phys.* – 1996. – V. 80. № 9. – P.5264-5269.-
- 33 Guo S. An eigen theory of waves in piezoelectric solids // *Acta Mech. Sin.* – 2010. – Vol. 26. – №2. – P. 241-246.

- 34 Березина С.И., Лямов В.Е., Шандаров С.М. Медленная волна со структурой электромагнитной волны в пьезоэлектрических и магнитострикционных средах // Изв. вузов. Физика. –1976. № 10. – С. 32-36.
- 35 Буримов Н.И., Шандаров С.М., Серебренников Л.Я. Структура электрических и магнитных полей поперечно-пьезоактивных поверхностных акустических волн в кристаллах симметрии 43m, 23 // Изв. вузов. Радиофизика. – 1989. Т. 32. № 3. – С. 362-368.
- 36 Lee P.C.Y., Kim Y.G., Prevost J.H. Electromagnetic radiation from doubly rotated piezoelectric crystal plates vibrating at thickness frequencies // Journal of Applied Physics 67. – 1990. – Vol. 67. № 11. – P. 6633-6642.
- 37 Romeo M. Electromagnetoelastic waves at piezoelectric interfaces // Int. J. Eng. Sci. – 2004. – Vol. 42. – № 8. – P. 753-768.
- 38 Romeo M. Non-dispersive and dispersive electromagnetoacoustic SH surface modes in piezoelectric media //Wave motion. – 2004. – Vol. 39. – № 2. – P. 93-110.
- 39 Tong M.S., Chew W.C. Coupled Integral Equations for Microwave Induced Elastic Wave in Elastic Media// Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. – 2010. – Vol. 58. – №7. – P. 2309-2317.
- 40 Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. –М.: Наука, 1965.– 388 с.
- 41 Musgrave M.J.P. Crystal Acoustics: Introduction to the Study of Elastic Waves and Vibrations in Crystals. San Francisco: Holden-Day, 1970. 288 p.
- 42 Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. – М.: Изд-во Моск ун-та, 1983. – 224 с.
- 43 Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. – 1950. – Vol. 21. № 2. – P. 89-93.
- 44 Haskell N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. Amer. – 1953. V. 43. № 1. – P. 17-34.
- 45 Kennet B.L.N. Seismic Wave Propagation in Stratified Media. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. – 342 p.
- 46 Ting T.C.T. Anisotropic Elasticity: Theory and Applications. New York: Oxford University Press, 1996. – 592 p.
- 47 Ержанов Ж.С., Жубаев Н.Ж., Тлеукепов С.К. Сейсмические волны в неоднородной среде. – Алма-Ата: Наука – 1985. – 176 с.
- 48 Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
- 49 Berreman D.W., Optics in stratified and anisotropic media: 4x4 matrix formulation // J. Opt. Soc. Amer. – 1972. – V. 62. № 4. – P. 502-510.
- 50 Alshits V.I., Maugin G.A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate //Wave Motion. – 2005.– Vol. 41. № 4. – P. 357–394.
- 51 Norris A.N., Shuvalov A.L., Kutsenko A.A., Analytical formulation of three-dimensional dynamic homogenization for periodic elastic systems // Proc. R. Soc. A. – 2012.– P. 468-474.

52 Wang L., Rokhlin S.I. Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media // *Ultrasonics*. – 2001. – Vol. 39. № 6. – P. 413-424.

53 Zhou Y.Y., Chen W.Q., Lu C.F., Guo Y.Q.. Reverberation-ray matrix analysis of free vibration of piezoelectric laminates // *J. Sound Vib.* – 2009. Vol. 326. № 3-5. – P. 821–836.

54 Зинчук Л.П., Подлипенец А.Н., Шульга Н.А. О построении дисперсионных уравнений для электроупругих сдвиговых волн в слоисто-периодических средах // *Прикл. механика*. – 1990. Т. 26. № 11. – С. 84-93.

55 Подлипенец А.Н. Распространение гармонических волн в ортотропных материалах с периодической структурой // *Прикл. механика*. 1984. Т. 20. № 7. С. 20-24.

56 Stroh A.N., Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* – 1962.– №41. – P. 77-103.

57 Tanuma K. Stroh formalism and Rayleigh waves // *J. Elasticity*. 2007. Vol. 89. № 1-3. – P. 5-154.

58 Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner, 1910. – 420 p.

59 Байконысов О., Тлеукунов С. О методе решения некоторых задач распространения упругих волн при наличии периодической неоднородности / в кн.: математические вопросы теории распространения волн. 15. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1985. –Т.148. – С. 30-33.

60 Tleukenov S.K. Characteristic matrix of a periodically inhomogeneous layer // *J. Math. Sci.* 1990. – Vol. 50. № 6. – P. 2058-2062.

61 Tleukenov S.K. Disposition of roots of the dispersion equation of a waveguide periodically inhomogeneous according to depth // *J. Math. Sci.* 1991. – Vol. 55. № 3. – P. 1766-1770.

62 Tleukenov S.K. On bending vibrations of a periodically inhomogeneous orthotropic plate // *J. Math. Sci.* 1991. - Vol. 57. № 3. – P. 3181-3182.

63 Tleukenov S.K. Energy absorption and discontinuity of displacements on boundaries with nonrigid contact // *J. Math. Sci.*- 1985. Vol. 30. № 5.- P. 2467-2470.

64 Tleukenov S. The structure of propagator matrix and its application in the case of the periodical inhomogeneous media // *Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations.*-1989.–Kurukshetra, India.–P. 4.

65 Тлеукунов С.К., Оспан А.Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы: АГУ им.Абая, 2001. – 67 с.

66 Тлеукунов С.К. Волновые процессы и метод матрицанта // *Вест. ЕНУ. Сер. естест.-техн. наук*. Астана: ЕНУ им.Л.Н. Гумилева. 2011. №4 (83). С.68-74.

67 Тлеукунов С.К. Метод матрицанта: Распространение волн в анизотропных средах. Второе издание. Берлин: Lap-Lambert academic publishing, 2014.–157 с.

68 Tleukenov S.K. A method for the analytical description of coupled-field waves in various anisotropic media// *Acta Mechanica*. – 2014.– Vol. 225. – №4-5. – P. 1-12. DOI:10.1007/s00707-014-1149-6.

69 Рахимова Ш.Н. Структура фундаментальных решений и закономерности распространения двумерных пьезоупругих волн в

анизотропных средах // дис. ... кан. физ.-мат. наук: 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела. Алматы: КазНУ им.Аль-Фараби, 2006. – 117 с.

70 Жукенов М.К. Теоретическое изучение распространения электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом // дис. ... кан. физ.-мат. наук: 01.04.02 - теоретическая физика (на казахском языке). Алматы: КазНУ им.Аль-Фараби, 2009. – 97 с.

71 Досанов Т.С. Изучение закономерностей распространения связанных волн в анизотропных пьезомагнитных средах методом матрицанта // дис. ... кан. физ.-мат. наук: 01.04.02 – теоретическая физика. Алматы: КазНУ им.Аль-Фараби, 2009. – 110 с.

72 Тлеукунов С.К., Испулов Н.А. О решении связанной задачи распространения термоупругой волны // Вест. Сер. физ.-мат. Павлодар: ПГУ им. С. Торайгырова. 2010. № 4. – С.56-65.

73 Тлеукунов С.К., Сагайдак Т.В. Структура фундаментальных решений полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны // Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «III Сатпаевские чтения». Павлодар, 2003. – Т.7.– С. 158-163.

74 Распространение связанных упругих и электромагнитных волн в средах с пьезоэлектрическим эффектом для гексагональной, тетрагональной, ромбической и моноклинной сингонии: отчет о НИР (промежуточный)/ АО «Нац. центр научно-техн. информ.»: рук. Тлеукунов С.К. Астана, 2013.– гос.рег. № 0112РК02379. – 46 с.

75 Mozhaev V.G. Some new ideas in the theory of surface acoustic waves in anisotropic media // IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics. Eds: D.F. Parker, A.H. England. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. – P. 455-462.

76 V.G. Mozhaev, A new type of surface acoustic waves in solids due to nonlinear elasticity // Phys. Lett A. – 1989. – Vol. 139. – № 7. – P. 333-337.

77 Mozhaev V.G., Weihnacht M. Incredible negative values of effective electromechanical coupling coefficient for surface acoustic waves in piezoelectrics // Ultrasonics. – 2000. – Vol. 37.– № 10. – P. 687-691.

78 Mozhaev V.G., Weihnacht M. Sectors of nonexistence of surface acoustic waves in potassium niobate // 2002 IEEE Ultrasonics Symp. Proc. New York: IEEE, 2002. – Vol. 1. – P. 391-395.

79 Волошинов В.Б., Поликарпова Н.В., Можяев В.Г. Близкое к обратному отражение объемных акустических волн при скользящем падении в кристалле парателлурита // Акуст. журн. – 2006. –Т. 52.– №3. – С. 297-305.

80 Parygin V.N., Vershoubskiy A.V., Mozhaev V.G., Weihnacht M. Prolonged acousto-optic interaction with Lamb waves in crystalline plates // Ultrasonics. – 2000. – Vol. 38. № 1-8. – P. 594-597.

81 Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials // Appl. Phys. Lett. – 1968. –Vol. 12. – P. 412–413.

82 Гуляев Ю.В. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах //Письма в ЖЭТФ. 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 63-65.

- 83 Gulyaev Yu. V. Review of shear surface acoustic waves in solids // IEEE Trans. – 1998. – Vol. UFFC-45. № 4. – P. 935–938.
- 84 Гуляев Ю.В., Плесский В.П. Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах // УФН.–1989. – Т.157. – №1.– С. 85-127.
- 85 Гуляев Ю.В., Пустовойт В.И. Усиление поверхностных волн в полупроводниках // ЖЭТФ. – 1964.– Т.47, №6. – С. 2251-2253.
- 86 Barnett D.M., Lothe J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators // Phys. Stat. Sol. (b). – 1975. – № 67.1.– P. 105-111.
- 87 Tseng C.C. Piezoelectric surface waves in cubic and orthorhombic crystals // Appl. Phys. Lett. – 1970. – Vol.16. – № 6. – P. 253-255.
- 88 White R.M., Voltmer F.W. Direct piezoelectric coupling to surface elastic waves // Appl. Phys. Lett. – 1965. – Vol.7. – № 12. – P. 314-316.
- 89 Martin S.J., Ricco A.J., Niemczyk T.M., Frye G.C. Characterization of SH acoustic plate mode liquid sensor // Sens. Actuator. – 1989. – Vol. 20. – P. 253-268.
- 90 Zhang C., Caron J. J., Vetelino J. F. The Bleustein–Gulyaev wave for liquid sensing applications //Sensors and Actuators B: Chemical. – 2001. – Vol. 76. № 1. – P. 64-68.
- 91 Zaitsev B., Joshi S., Kuznetsova I., Borodina I. Acoustic waves in piezoelectric plates bordered with viscous and conductive liquids // Ultrasonics. – 2001. – Vol. 39. №1. – P. 45-50.
- 92 Kuznetsova I.E., Borodina I.A., Zaitsev B.D., Teplykh A.A. The peculiarities of propagation of backward acoustic waves of higher orders in piezoelectric plates // 2006 IEEE Int. Ultras. Symp. Proc. New York: IEEE, 2006. – P. 345-346.
- 93 Теплых А.А. Энергетические характеристики акустических волн в пьезоэлектрических материалах и структурах: // дис. ... кан. физ.-мат. наук: 01.04.03/ Саратовский гос.унив. им.Чернышевского. – Саратов, 2006. – 200 с.
- 94 Every A.G., Neiman V.I. Reflection of electroacoustic waves in piezoelectric solids: Mode conversion into four bulk waves // J. Appl. Phys. –1992. – Vol. 71. № 12.– P. 6018–6024.
- 95 Burkov S.I., Sorokin B.P., Karpovich A.A., Aleksandrov K.S. Reflection and refraction of bulk acoustic waves in piezoelectric crystals under the action of bias electric field and uniaxial pressure //2008 IEEE Int. Ultras. Symp. Proc. New York: IEEE, 2008. – P. 2161–2164.
- 96 Pang Y., Liu J.-X. Reflection and transmission of plane waves at an imperfectly bonded interfacebetween piezoelectric and piezomagnetic media //Eur J. Mech. A- Solid. 2011.– Vol. 30. № 5. – P. 731-740.
- 97 Yuan X. Zhu Z.H. Reflection and refraction of plane waves at interface between two piezoelectric media // Acta Mech. –2012. – №223. – P. 2509–2521.
- 98 Балакирев М.К., Гишинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезоэлектрик–вакуум// ФТТ. 1969. –Т .11, №9. –С. 1027-1029.
- 99 Альшиц В.И., Даринский А.Н., Шувалов А.Л. Теория отражения акустоэлектрических волн в полубесконечной пьезоэлектрической среде. II. Неметаллизированная поверхность // Кристаллография. – 1990. Т. 35. – № 1. – С. 7-16.

100 Волошинов В.Б., Макаров О.Ю., Поликарпова Н.В. Близкое к обратному отражение упругих волн в акустооптическом кристалле парателлурита // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 31. – №8. – С. 79-87.

101 Тлеуменов С.К., Жукенов М.К. Аналитическое решение задачи отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропного диэлектрика и анизотропного диэлектрика с магнитоэлектрическим эффектом // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2009. – № 5(267). – С. 67-69.

102 Тлеуменов С.К., Досанов Т.С., Маралбаева М.Б. Отражение электромагнитных волн от пьезоупругого полупространства // VII Сатпаевские чтения: международная научная конференция молодых ученых, студентов и школьников – Павлодар, 2007.– С. 256-262.

103 Можаяев В.Г. Анализ электрических полей, возникающих при отражении объемных акустических волн от поверхности пьезоэлектриков // Акуст. журн. –1988. – Т. 34. № 4. – С. 684-689.

104 Gene H.H. Ferroelectric ceramics: History and technology // J. Amer. Ceram. Soc. –1999. – Vol. 82. № 4. – P. 797-818.

105 Chen J., Cheng J., Dong S. Review on high temperature piezoelectric ceramics and actuators based on BiScO<sub>3</sub>–PbTiO<sub>3</sub> solid solutions//J. Adv. Dielect. – 2014.– Vol. 4. № 1. – Art. 1430002 (14 p.).

106 Zgonik M., Schlessler R., Biaggio I., Voit E., Tscherry J., Günter P. Materials constants of KNbO<sub>3</sub> relevant for electro- and acousto-optics // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 74. – № 2. – P. 1287-1297.

107 Nakamura K., Oshiki M. Theoretical analysis of horizontal shear mode piezoelectric surface acoustic waves in potassium niobate // Appl. Phys. Lett. – 1997. –Vol. 71. – P. 3203–3205.

108 Yamanouchi K., Odagawa H., Kojima T., Matsumura T. Theoretical and experimental study of super high electromechanical coupling surface acoustic wave propagation in KNbO<sub>3</sub> single crystal // Electron. Lett. 1997. – Vol. 33. №3. – P. 193-194.

109 Gao Z.L., Sun Y.X., Yin X., Wang S.P., Jiang M.H., Tao X.T., Growth and electricelastic properties of KTiOAsO<sub>4</sub> single crystal // J. Appl. Phys. – 2010. – Vol. 108. №2 – Art. 024103 (4 p.).

110 Taziev R.M. Surface and quasi-longitudinal acoustic waves in KTiOAsO<sub>4</sub> single crystals // Ultrasonics. – 2014. – №54. № 2. – P. 425-427.

111 Коломенский А.А., Мазнев А.А. Наблюдение фононной фокусировку при импульсном лазерном возбуждении поверхностных акустических волн в кремнии// Письма ЖЭТФ. – 1991. – Т. 53.– № 8. – С. 403-406.

112 Every A.G., Maznev A.A., Grill W., Pluta M., Comins J.D., Wright O.B., Matsuda O., Sachse W., Wolfe J.P. Bulk and surface acoustic wave phenomena in crystals: Observation and interpretation // Wave Motion. 2013. – Vol.50. № 8.– P. 1197-1217.

113 Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1966. – 576 с.

114 Pease M.C. Methods of Matrix Algebra. New York: Academic Press, 1965. – 406 p.

- 115 Акустические кристаллы. Справочник. / под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. – 682 с.
- 116 Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E. The energy density and power flow of acoustic waves propagating in piezoelectric media. // IEEE Trans. 2003. – Vol. UFFC-50. № 12. – P. 1762-1765.
- 117 Laude V., Reinhardt A., Khelif A. Equality of the energy and group velocities of bulk acoustic waves in piezoelectric media // IEEE Trans. 2005. – Vol. UFFC-52. № 10. – P. 1869-1871.
- 118 Maznev A.A., Lomonosov A.M., Hess P., Kolomenskii Al.A. Anisotropic effects in surface acoustic wave propagation from a point source in a crystal // Eur. Phys. J.B. – 2003. – Vol. 35. № 3. – P. 429-439.
- 119 Зубрицкий В.В. Фокусировка фононов в кристаллах CdSe, ZnS, ZnO // ЖТФ. 1997. – Т. 67. № 6.- С. 59-64.
- 120 Komatitsch, D., Carcione, J. M., Cavallini, F., Favretto-Cristini, N. Elastic surface waves in crystals–Part 2: Cross-check of two full-wave numerical modeling methods //Ultrasonics. – 2011. – Vol. 51. №8. – P. 878-889.
- 121 Poncelet O., Deschamps M., Every A.G., Audoin B. Extension to cuspidal edges of wave surfaces of anisotropic solids: Treatment of near cusp behavior // Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. V. 20. Eds: D.O. Thompson, D.E. Chimenti. AIP Conference Proceedings. 2001.- Vol. 557. – P. 51-58.
- 122 Davydov S.A., Trenikhin P.A., Shandarov V.M., Shandarova K.V., Kip D., Rüter C., Chen F. Quasi-one-dimensional photonic lattices and superlattices in lithium niobate: Linear and nonlinear discrete diffraction of light // Phys. Wave Phenom. – 2010. – Vol.18. № 1. – P. 1-6.
- 123 Keller S. M., Carman G. P. Plane wave dynamics in multiferroic materials using Maxwell's equations and equation of motion // Proc. SPIE. 2012. Vol. 8342. Behavior and Mechanics of Multifunctional Materials and Composites. – Art. 834204 (10 p).
- 124 Бархатов А.Н., Горская Н.В., Горюнов А.А., Можяев В.Г., Руденко О.В. Акустика в задачах: учеб. рук-во / под ред. С.Н. Гурбатова, О.В. Руденко. - М.: Наука. Физматлит, 1996. – 336 с.
- 125 Koerber G., Vogel R.F. Generalized Bleustein modes // IEEE Trans. 1972. – V. SU-42. № 1. – P. 3-8.
- 126 Koerber G., Vogel R.F. SH-mode piezoelectric surface waves on rotated cuts//IEEE Trans. Sonics Ultrason., 1973 – Vol. SU-20. № 1. – P. 9-12.
- 127 Soluch W. Calculation of Bleustein–Gulyaev Waves Parameters in KTiOPO<sub>4</sub> crystal // IEEE Trans. 1995. Vol. UFFC-42. № 6. – P. 977–978.
- 128 Collet B., Destrade M. Explicit secular equations for piezoacoustic surface waves: Shear-horizontal modes // J. Acoust. Soc. Amer. – 2004. – Vol. 116. № 6. – P. 3432-3442.
- 129 Yang J.S. Bleustein-Gulyaev waves in piezoelectromagnetic materials //International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 2000. – Vol.12. –№ 3. – С. 235-240.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Список опубликованных работ

1 Tleukenov S.K., Zhakiyev N.K., Yeltinova L. An analytical solution of the reflection and refraction problems for coupled waves in elastic and piezoelectric media // 2013 IEEE Int. Ultras. Symp. Proc. (Joint UFFC, EFTF and PFM Symp.). New York: IEEE, 2013. – P. 1025-1028.

2 Тлеукуенов С.К., Ельтинова Л., Жакиев Н.К. Условия существования волн Рэлея вдоль свободной границы анизотропных сред кубической, ромбической, тетрагональной и гексагональной сингонии // Вест. Сер. естест.-техн. наук. ЕНУ им.Л.Н. Гумилева. – 2012. – №4(89) - С. 72-78.

3 Тлеукуенов С., Жакиев Н.К., Ельтинова Л. Угол сноса между фазовой и групповой скоростями акустических волн в тетрагональных кристаллах // Вест. Сер. естест.-техн. наук. ЕНУ им.Л.Н. Гумилева. – 2014. – №2(99) – С. 269-273.

4 Тлеукуенов С., Жакиев Н.К., Отражение электромагнитной волны на границе пьезоэлектрического полупространства // Вест. Сер. естест.-техн. наук. ЕНУ им.Л.Н. Гумилева. – 2014. – № 4 (101). Ч. 1. – С. 289-293.

5 Тлеукуенов С., Жакиев Н.К. Аналитические условия существования волн Гуляева-Блюстейна в тетрагональных кристаллах. Известия РАН. Серия физическая. – 2014. – Т. 78. – №6. – С. 773-776. ISSN 1062-8738. DOI:10.7868/S0367676514020318.

6 Tleukenov S., Zhakiev N.K., Yeltinova L. Propagation of coupled waves of different nature in anisotropic continuous media: method for theoretical description // Abstracts Book of the 7<sup>th</sup> General Meeting of ACCMS-VO, Sendai, Japan, 23-25 nov. 2012. – P. 9.

7 Tleukenov S.K., Zhakiyev N.K., Yeltinova L., Inerbaev T. Conditions of existence Bleustein–Gulyaev waves for different anisotropic classes: beyond quasistatic approximation// Book of Abstracts. The 7<sup>th</sup> Conference of the Asian Consortium on Computational Materials Science (ACCMS-7), Nakhon Ratchasima, Thailand, 23-28 July 2013. – P. 24.

8 Тлеукуенов С., Жакиев Н.К. Аналитическое представление условий существования волн Гуляева-Блюстейна для определенного класса кристаллов // Сборник трудов XIV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн”, “Волны-2013”. 20-25 мая 2013 г. Можайск, Московская обл. [Электронный ресурс]. М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013. Секция 9. – С. 66-69.

9 Тлеукуенов С.К., Жакиев Н.К., Ельтинова Л. Определение условий существования волн Гуляева-Блюстейна методом матрицанта для пьезокристаллов тетрагональной сингонии // Актуальные проблемы современной физики: Материалы международной научной конф. – Алматы: КазНУ им.Аль-Фараби, 2012. - С. 221-225.

10 Жакиев Н.К., Ельтинова Л., Кульназаров И. Расчет волнового поля при отражении и преломлении упругих и электромагнитных волн методом матрицанта//Инновационное развитие и востребованность науки в современном

Казахстане: материалы V межд. научной конф. молодых ученых: Фонд Первого Президента РК – Алматы, 2011. - С. 64-66.

11 Тлеукунов С.К., Ельтинова Л., Жакиев Н.К. Получение уравнения волн Рэлея для свободной границы анизотропных сред кубической и ромбической сингонии //Таймановские чтения-2012: материалы международной научной конференции. – Уральск: ЗКГУ, 2012. - С. 188-193.

12 Тлеукунов С.К., Кульназаров И., Ельтинова Л., Жакиев Н.К. Структура матрицант уравнений термоупругих волн в анизотропных средах // Функциональный анализ и его приложения: материалы международной научной конференции. – Астана: ЕНУ, 2012. - С. 288-289.

13 Tleukenov S.K., Zhakiyev N.K., Manasyan A. Reflection and refraction of electromagnetic wave at the surface an anisotropic media for computation parameters of media // The Working Group Meeting of The Asian Consortium on Computational Materials Science (ACCMS-WGM-2014) Astana, Kazakhstan, june 5-7, 2014. – <http://accms2014.kz>. – P. 27.

14 S. Tleukenov, N.K. Zhakiyev, Asylbek A. The shear horizontal surface waves on orthorhombic piezoelectric layer // Radiation effects in insulators and non-metallic materials (REINM-2014) Astana, Kazakhstan, june 2-4, 2014. – P. 37.

15 Тлеукунов С., Жакиев Н.К. Программа для вычисления элементов матрицы коэффициентов СДУ (10x10), описывающих связанные волны в пьезоэлектриках (Программа для ЭВМ) // Свидетельство о государственной регистрации права на объект авторского права №1747 от 15/09/2014.