Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 517.52

На правах рукописи

ЖАНТАКБАЕВА АЯГОЗ МЕЛИСОВНА

О суммируемости коэффициентов рядов Фурье функций из пространства Лоренца

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Нурсултанов Е.Д.
Зарубежный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Дьяченко М.И. (Россия)

Республика Казахстан

Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

f^* – невозрастающая перестановка функции f

a^* – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

L_p – пространство Лебега

L_{pq} – пространство Лоренца

l_p – дискретное пространство Лебега

l_{pq} – дискретное пространство Лоренца

$\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел

Ψ – ортонормированная система функций

$a_k(f)$ – коэффициенты Фурье по системе Ψ

$\overline{a}_k$ – усреднение типа Харди последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\widetilde{a}_k$ – усреднение типа Беллмана последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

Δa_k – разность последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

f' – производная функции f

$\widehat{f}$ – преобразование Фурье

$c_i,\ i = 1, ..., n, ...$ – константы

p' – сопряженный параметр p

$A \hookrightarrow B$ – вложение квазинормированного пространства A в квазинормированное пространство B.

$\vec{a}$ – вектор $(a_1, ..., a_n)$

$\vec{a} < \vec{b}$ – неравенство понимается как $a_i < b_i,\ \forall i = 1, ..., n$

$\vec{a}^{\vec{b}}$ – запись означает следующее обозначение $a_1^{b_1}...a_n^{b_n}$

$\vec{p}\,'$ – сопряженный вектор к $\vec{p}$: $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}, \forall i = 1, ..., n$

$\asymp$ – знак эквивалентности

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Теория рядов Фурье является одним из основных направлений гармонического анализа [1]-[7]. Суммируемость коэффициентов Фурье является актуальным вопросом в теории рядов Фурье. Интерес к этому направлению объясняется его приложениями в различных разделах математики и в прикладных науках, а также наличием многих не решенных трудных проблем. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению неравенств типа Харди-Литтлвуда-Пэли для одномерных и кратных рядов Фурье. Интересным является вопрос о рассмотрении подобных неравенств для различных усреднений. Также исследованы необходимые и достаточные условия принадлежности функций в пространству L_p в терминах коэффициентов Фурье.

Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in [0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций [1]-[8]. Функции $f \in L[0;1]$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k$, где

$$a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$$

– коэффициенты ряда Фурье по системе Ψ.

Нас интересует связь между функцией и ее коэффициентами Фурье, т.е. если функция $f \in L_p$, $1 < p \leqslant \infty$, то что можно сказать о ее коэффициентах Фурье. Связь между интегрируемостью функции и суммируемостью ее коэффициентов исследуется с XVIII века. При исследовании этого вопроса выделяют случаи $p = 2$ и $1 < p < 2$, $2 < p$. Для $p = 2$ наиболее ярким примером является *равенство Парсеваля*, полученное в 1799 году [1, 5, 7] (Французский математик Марк-Антуан Парсеваль, 1755-1836).

$$\int\limits_0^1 |f|^2dx = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

где a_k - коэффициенты Фурье по полной тригонометрической системе.

А для общих ортонормированных систем верно *неравенство Бесселя* [1, 5, 7, 9, 10] (Бессель Фридрих Вильгельм, 1784-1846).

Если $\Psi = \{\psi_n(t)\}_{n\in N}$, $t \in [0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций, $f \in L_2$ и $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$ - коэффициенты Фурье, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \int\limits_0^1 |f|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Верно и обратное утверждение, это *теорема Рисса-Фишера* [1, 5, 7, 9, 10] (Рисс Фриджес 1880-1956), (Рональд Эйлмер Фишер, 1890-1962).

Если $\Psi = \{\psi_n(t)\}_{n\in N}$, $t \in [0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций, $f \in L_2$ и последовательность a_k такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, тогда существует $f \in L_2$ такая, что $a_k(f) = a_k$ и верно неравенство

$$\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Как мы видим в этом утверждении нету условия полноты системы, если система полна, то получим равенство Парсеваля. Эти утверждения показывают связь между интегрируемостью функции $|f|^2$ и суммируемостью ее коэффициентов Фурье. Последние два утверждения можно рассматривать, как необходимые и достаточные условия принадлежности функции f пространству L_2.

А при $p \neq 2$ такого, как равенство Парсеваля, абсолютного результата нет.

В 1912-1913 г.г. Юнгом (William Henry Young, 1863-1942) была доказана теорема для специальных значений p вида $\frac{2k}{2k-1}$, $k \in N$. А в 1923 году Феликс Хаусдорф (1868-1942) доказал для любого $p \in (1;2]$, т.о. теорема получила название *теорема Хаусдорфа - Юнга* [8].

1) Если $f \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$, тогда

$$\|a\|_{p'} \leqslant \|f\|_p;$$

2) Если $p \geqslant 2$, $a_n \in l_{p'}$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi ikx}$ сходится в метрике L_p к f:

$$\|f\|_{L_p} \leqslant \|a\|_{l_{p'}}.$$

В том же году Фриджес Рисс показал, что этот результат сохраняет силу для общих ортонормированных систем, состоящий из интегрируемых функций $\psi_n(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\psi_n(x)| \leqslant M$$

для почти всех x.

1) Если $f \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$ тогда

$$\|a\|_{p'} \leqslant M^{\frac{2}{p}-1}\|f\|_p;$$

2) если $p \geqslant 2$, $a_n \in l_{p'}$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ сходится к некоторой f из L_p :

$$\|f\|_{L_p} \leqslant M^{1-\frac{2}{p}}\|a\|_{l_{p'}}.$$

Идея вывода теоремы Хаусдорфа-Юнга и ее обобщения, данного Ф. Риссом, из теоремы выпуклости принадлежит Марселю Риссу. Также показана Харди и Литтлвудом неулучшаемость теоремы Хаусдорфа-Юнга в 1926 году [6, 11].

Аналог теоремы Хаусдорфа-Юнга для преобразования Фурье доказан Е. Титчмаршем [12] в 1924 году.

Пусть $f \in L_1$ и

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_R f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx, \ \ \xi \in R$$

называется преобразованием Фурье. Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $f \in L_p$, тогда последовательность

$$F_N(\xi) = \int\limits_{|x|\leqslant N} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx, \ \ \xi \in R$$

сходится по норме $L_{p'}$ и для предельной функции имеет место неравенство

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leqslant \|f\|_p.$$

Это неравенство было улучшено в 1961 г. К.И.Бабенко (1919-1987) [13], при p' четное, оценка с константой. А для всех $p' \geqslant 2$, то есть $1 < p \leqslant 2$ в 1975 году улучшил У. Бекнер [14] (John William Beckner).

В 1926 г Харди Годфри Харолд (1877-1947) и Литлвуд Джон Идензор (1885-1977) доказали неравенство для тригонометрической системы, в последствии Пэли Раймонд Эдвард Алан Христофер (1907-1933) распространил этот результат для любой ортонормированной ограниченной в совокупности системы.

Теорема A. (Харди-Литтвуд-Пэли) [5] (с. 165), [15] *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in [0;1]$ - *ортонормированная в* $L_2[0;1]$ *система функций. Для всех* $n \in$

N: $\psi_n \in L$, удовлетворяют условию $|\psi_n(x)| \leqslant M$ для почти всех x.

1) Если $1 < p \leqslant 2$ и $f \in L_p$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k$, где $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p M^{\frac{2}{p}-1}\|f\|_{L_p[0,1]}.$$

2) Если $p \geqslant 2$ и последовательность a_n : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p < \infty$, то существует $f \in L_p$ такая, что $a_n = a_n(f)$, и *$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x) = f(x)$ в смысле L_p и верно неравенство*

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leqslant c_p M^{1-\frac{2}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Затем это утверждение в 1937 году было обобщено *Марцинкевичем и Зигмундом* [16]-[17].

Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in [0;1]$ - ортонормированная система, причем $r \in (2;\infty]$ и

$$\|\psi_n\|_r \leqslant M_n,\ n \in N,$$

где $\{M_n\}$ - неубывающая последовательность.

Если $2 \leqslant q < r$ и последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$\Omega_q(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q M_k^{(q-2)\frac{r}{r-2}} k^{(q-2)\frac{r-1}{r-2}}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ сходится в $L_q[0;1]$ к некоторой функции f, причем

$$\|f\|_{L_q[0,1]} \leqslant c(q,r)\Omega_q(a).$$

Неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли получается при $M_n = M$, $r = \infty$.

Также хорошо известно неравенство *Пэли* (1931 г.), которое имеет различие с неравенством Харди-Литтлвуда-Пэли тем, что вместо $|a_k|$ суммируются невозрастающие перестановки a_k^* последовательности a_k. То есть верно
1) если $1 < p \leqslant 2$ и $f \in L_p$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\|f\|_{L_p[0,1]}.$$

2) Пусть $2 \leqslant p < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{p-2}(a_k^*)^p < \infty$, тогда существует $f \in L_p$ такая, что $a_n(f) = a_n$ и

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^*)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что неравенство Пэли сильнее чем неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли, а неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли сильнее чем неравенство Рисса (для тригонометрических систем - Хаусдорфа-Юнга).

Действительно, рассмотрим последовательность

$$a_n = n^{-3/4}(\ln(n+1))^{-3/4}$$

для всех $n \in N$. Является ли она последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции $f \in L_p$ $(p = 4)$?

Так как $p = 4$, то по теореме Харди-Литтлвуда-Пэли имеем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(n+1)}$$

сходится. Ответ - да, то есть найдется функция из пространства L_4 и

$$a_n = n^{-3/4}(\ln(n+1))^{-3/4}$$

являются коэффициентами Фурье этой функции. Видим, что теорема Харди-Литтлвуда-Пэли работает.

А если рассмотреть теорему Рисса, учитывая $p = 4$, то $p' = \frac{4}{3}$, тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$$

расходится. Ответ - теорема Рисса здесь не поможет получить решение вопроса.

Питтом было получено неравенство обобщающее неравенств Харди-Литтлвуда-Пэли и Рисса

1) если $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant q \leqslant p'$ и $f \in L_p$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_p[0,1]}.$$

2) Пусть $2 \leqslant p < \infty$, $p' \leqslant q \leqslant p$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}|a_k|^q < \infty,$$

тогда существует $f \in L_p$ такая, что $a_n(f) = a_n$ и

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, что при $q = p$ из этого результата следует неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли, при $q = p'$ следует неравенство Рисса.

Также известно неравенство *Харди-Литтлвуда-Стейна* для пространств Лоренца [18] (с. 490).

1) Если $1 < p < 2$, $0 < q \leqslant \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,q}[0,1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1}(a_k^*)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

2) Пусть $2 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}(a_k^*)^q < \infty$, тогда существует $f \in L_{p,q}$ такая, что $a_n(f) = a_n$ и

$$\|f\|_{L_{p,q}[0,1]} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}(a_k^*)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, при $p = q$, то следует результат Пэли.

Отметим, что в случае $1 < p < 2$ все неравенства дают необходимые условия принадлежности функции в пространству L_p или L_{pq}, а в случае $2 < p < \infty$ – достаточные условия принадлежности функции в пространству.

Для пространства Лоренца при $p = 2$ и $q \neq 2$ неравенство не сохраняется, этот случай исследован С.В. Бочкаревым в 1997 году [19], Е.Д. Нурсултановым [20] в 2000 году.

Для преобразования Фурье подобные неравенства также были исследованы в работе [21].

При $2 < p < \infty$ эти методы суммирования не дают определить сходимость, т.е. нет смысла суммировать этими методами. В [2] (стр. 249) и [22] (стр. 154-158) можно найти соответствующий пример при $p = q$.

Карлеман [1, 5, 7, 22, 23] показал, что существует непрерывная функция f, у которой ряд состоящий из ее коэффициентов Фурье расходится.

Теорема Карлемана. Для любого малого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $f \in C[0;1](\subset L_p[0;1],\ \ p > 2)$, что коэффициенты Фурье этой функции $a_k = \int\limits_0^1 f(x)e^{i2\pi kx}dx$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{2-\varepsilon} = +\infty.$$

По равенству Парсеваля и затем использовав свойство вложения пространства L_p при $p > 2$ получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \leqslant c\|f\|_p < \infty$$

Здесь по утверждению Карлемана снизу получится расходящийся ряд, таким образом, эта оценка самая наилучшая. Но в 1998 г. Нурсултановым Е.Д. [24] была получена следующая теорема

Теорема Нурсултанова. Если $2 < p < \infty, \quad 0 < q \leqslant \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,q}[0, 2\pi]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} \left(\bar{a}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}. \tag{1}$$

При $q = \infty$

$$\sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p'}} \bar{a}_k \leqslant C\|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]}, \tag{2}$$

где $\bar{a}_k = \frac{1}{k}\left|\sum\limits_{m=1}^{k} a_m\right|$.

Здесь суммируются средние арифметические полученные по модулю суммы, показывает метод суммирования по таким средним, так называемым средние типа Харди. Отметим данное неравенство верно и для $1 < p < \infty$.

При $q = 1$ будет верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p'}-1} \left(\bar{a}_k\right) \leqslant c\|f\|_{L_{p,1}[0,1]}. \tag{3}$$

При $q = p'$ будет верно неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\bar{a}_k \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c \|f\|_{L_{p,p'}[0,1]}. \tag{4}$$

Исследуется задача для каких еще усреднений можно получить неравенство типа Харди-Литтлвуда-Пэли. Так как подобное неравенство в терминах усреднений первым получил Е.Д.Нурсултанов, то задачу можно сформулировать таким образом: Какие еще можно получить неравенства типа Нурсултанова?

В связи с этим были рассмотрены разные усреднения: усреднение типа преобразования Беллмана, обобщенное усреднение типа Харди (в некоторых источниках усреднения типа Рисса), и целью разделов 1 и 2 является доказать неравенства типа Нурсултанова для усреднений типа Харди (обобщенное) и Беллмана в одномерном и кратном случаях.

Третья глава посвящена изучению необходимым и достаточным условиям принадлежности функции в пространству L_p.

В 1926 году Харди и Литтлвудом [1, 5, 7] была доказана теорема

Теорема B. (Харди-Литтлвуд) *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$. *Если* $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *-монотонно невозрастающая, стремящаяся к нулю последовательность,* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi k x$ *, то для того чтобы* $f \in L_p[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *принадлежала пространству Лоренца* $l_{p'p}$.

Этот результат на пространство Лоренца и более общие симметричные пространства обобщен в работах Е.М. Семенова [25], А.Б. Гулисашвили [26], У. Загбера [27], В.А. Родина [28, 29].

Теорему Харди - Литтлвуда для системы Уолша доказал Ф. Мориц [30] и для мультипликативной системы М.Ф. Тиман и К. Тухлиев [31].

Для кратных тригонометрических рядов проводили исследования Ф. Мориц [30], М.И. Дьяченко [32],[33].

Условие монотонности коэффициентов Фурье нельзя отбросить совсем. Без него утверждение, вообще говоря, не верно. Возможен вариант с ослаблением условия монотонности.

В.А. Кокилашвили [34] для тригонометрических рядов ослабил условие монотонности, заменив его на условие квазимонотонности. Для рядов по мультипликативной системе с квазимонотонными коэффициентами теорему Харди - Литтлвуда доказал Г.А. Акишев [35]. Также следует отметить работы [36]-[40]. В [41] условие монотонности заменено на требование

$$\sum_{m=k}^{2k} |\Delta a_m| \leqslant Ck^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

и

$$a_k \geqslant 0, \tag{6}$$

где $C > 1$ и $\alpha \in (0;1]$.

Цель работы. Целью диссертационной работы являются: изучение рядов состоящих из коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца и анизотропных пространств Лоренца и получение необходимых условий принадлежности функций этим пространствам, тем самым доказать неравенства типа Нурсултанова для усреднений типа (обобщенного) Харди и Беллмана. Доказать кратный аналог этих утверждений. Получить теоремы типа Харди-Литтлвуда, т.е. ослабить условие монотонности (обобщенной монотонности) и получить необходимые и достаточные условия принадлежности функций в пространству Лебега.

Объекты исследования. Объектами исследования являются - тригонометрические ряды Фурье, коэффициенты Фурье и их усреднения.

Общая методика исследования. В диссертации систематически применяются методы и результаты теории интерполяции.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты:

– Введены пространства $n_{p,q,\alpha}$ и $n_{p,q}(\lambda)$. Изучены их интерполяционные свойства.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Харди коэффициентов тригонометрических рядов Фурье функций из пространства Лоренца.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Беллмана коэффициентов тригонометрических рядов Фурье функций из пространства Лоренца.

– Получены теоремы типа Харди-Литтлвуда с ослаблением условия монотонности коэффициентов Фурье и теорему типа Харди-Литтлвуда для коэффициентов Фурье, которые имеют ограниченную вариацию.

– Введены анизотропные пространства $n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}$ и $n_{\vec{p},\vec{q}}(\lambda)$. Изучены их интерполяционные свойства.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Харди коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропных пространств Лоренца.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Беллмана коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропных пространств Лоренца.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории дифференциальных уравнении, теории приближений, теории функциональных пространств.

Апробация полученных результатов. По результатам диссертации были сделаны доклады на международных конференциях, школах, в том числе в международном форуме "Ломоносов-2012" молодых ученых в городе Москва и на научно-исследовательском семинаре "Ортогональные тригонометрические ряды" под руководством профессоров Потапова М.К., Лукашенко Т.П., Скворцова В.А., Дьяченко М.И., на семинаре под руководством профессора центра математических исследований г. Барселоны (Испания) С.Ю. Тихонова, на английском семинаре профессоров Кардиффского университета В.И. Буренкова и Т.В. Тарарыковой, на семинаре под руководством академиков НАН РК М. Отелбаева, Р. Ойнарова и профессоров Е.Д. Нурсултанова, К.Н. Оспанова, Н.А. Бокаева в ЕНУ имени Л.Н. Гумилева.

Опубликованы тезисы и статьи в Алматы, Астане, Актобе, Караганде, Баку (Азербайджан), Уфе, Москве (Россия), Барселоне (Испания).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в следующих изданиях:

Публикации в международных изданиях имеющих импакт-фактор:

1. Жантакбаева А.М., Е.Д.Нурсултанов. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Вестник. Серия математика-механика. - Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова. - 2004. - № 2. - С. 64-66, Scopus (0,133)

Публикации в международных изданиях:

2. Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D. The Hardy-Littlewood-Stein inequality // Preprint CRM. Publicat el. - 2012. - № 1102. - P. 1-12.

Публикации в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования Республики Казахстан:

3. Жантакбаева А.М., Е.Д.Нурсултанов. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Математический журнал. Алматы. - 2013. - Т. 13, № 1(47). - С. 73-89.

4. Жантакбаева А.М. Неравенство Пэли для преобразования типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье // Вестник. Серия математическая. - Караганды: КарГУ имени Е.А.Букетова. - 2013. - Т. 70, № 2 - С. 86-93.

5. Жантакбаева А.М. О суммируемости средних Беллмана коэффициентов кратных рядов Фурье функций из изотропного пространства Лоренца // Математический журнал. - Алматы, 2013. - Т. 13, № 3(49). - С. 83-93.

Публикации в материалах зарубежных конференций:

6. Zhantakbayeva A.M. On the summability of fourier coefficients of functions from Lorentz space // Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July. - 2011. - С. 96.

7. Жантакбаева А.М. О сходимости усреднений коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Спектральная теория операторов и ее приложения: материалы международной конференции, - Уфа, 13-16 июня. - 2011. - С. 32-33.

8. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функций из пространства Лоренца // Ломоносов-2012: XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. - Москва. - 2012. - С. 1-2.

9. Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D. Hardy-Littlewood type theorems for classes of functions with general monotone Fourier coefficients // Theses of reports of the Fourth International Conference dedicated to Corresponding Member of RAS, Member of European Academy of Sciences, Professor L.D. Kudryavtsev on the occasion of his 90th anniversary, March 25-29. - Moscow. - 2013. - P. 42-44.

Публикации в материалах международных и республиканских конференций:

10. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Ломоносов-2011: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. - Астана. - 2011. С. 46-47.

11. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функций из пространства Лоренца // Ломоносов - 2012: международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых уче-

ных, Астана. - 2012. - С. 52-53.

12. Жантакбаева А.М. О суммируемости обобщенных средних типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье // Проблемы дифференциального уравнения и математической физики: сборник научного семинара. - Актобе. - 2012. - С.264-266.

13. Жантакбаева А.М. О суммируемости средних типа Харди и Беллмана коэффициентов кратных рядов Фурье // Функционалдық анализ және оның қолданылулары: халықаралық ғылыми конференциясының баяндамалар тезистері. - Астана. - 2012. - Б. 43-44.

14. Жантакбаева А.М. Теоремы типа Харди-Литтлвуда // Дифференциальные уравнения и применения: материалы международной конференции. - Актобе. - 2013. - С. 187-189.

15. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лебега // Ломоносов - 2013: международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, Астана. - 2013. - С. 27-30.

Публикация в Казахстанском журнале:

16. Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D. Hardy-Littlwood type theorems // Eurasian Mathematical Journal. - Astana. - 2013. - Vol. 4, № 2. -P. 140-143.

Структура и объем диссертации. Работа, объемом 70 страниц, состоит из обозначения и сокращения, введения, необходимых определений и утверждений, основных трех разделов, заключения, списка литературы, включающего 45 наименований.

Утверждения имеют номера, состоящие из трех индексов. Первый индекс имеет номер раздела, второй – номер пункта в разделе, третий – собственный номер утверждения в данном пункте. Формулы имеют номера, состоящие из двух индексов. Первый индекс имеет номер раздела, а второй – собственный номер формулы.

Необходимые определения и утверждения.

Пусть (A_0, A_1) - совместимая пара банаховых пространств [15].

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\right), \ a \in A_0 + A_1$$

- функционал Петре, $0 < t < \infty$.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \ \ \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta} K(t,a))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \ \ \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a)) < \infty \right\}.$$

Введем определения пространств Лебега и Лоренца. Определим их на отрезке $[0,1]$.

Пусть $0 \leqslant p < \infty$. Множество всех измеримых функций определенных на $[0,1]$ называется пространством Лебега $L_p[0,1]$, если конечна величина

$$\|f\|_{L_p[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

В 1950 г. Лоренцем были введены пространства Лоренца [15], [42]. Пусть $0 < p < \infty$, и $0 < q \leqslant \infty$. Пространство Лоренца $L_{p,q}[0,1]$ определим как пространство измеримых функций f определенных на $[0,1]$, для которых конечны величины, если $q < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

если $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

Здесь $f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x : |f(x)| > \sigma\} \leqslant t\}$ - невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

Отметим некоторые свойства невозрастающей перестановки:

1^0. $|f| \leqslant |g| \Rightarrow f^* \leqslant g^*$

2^0. $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$

3^0. $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leqslant f^*(t_1) + g^*(t_2)$

4^0. $m(\sigma, f) = m(\sigma, f^*)$

Заметим, если $p=q$ так, как $|f(x)|$ и $f^*(x)$ равноизмеримы то пространство Лоренца $L_{p,q}$ совпадает с пространством Лебега L_p.

1^0. *Если* $0<p\leqslant p_1<\infty$, $0<q,q_1\leqslant\infty$, *то*

$$L_{p_1q_1}[0,1]\hookrightarrow L_{pq}[0,1].$$

2^0. *Если* $0<p<\infty$, $0<q\leqslant q_1\leqslant\infty$, *то*

$$L_{pq}[0,1]\hookrightarrow L_{pq_1}[0,1].$$

3^0. *Если* $0<\theta<1$, $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$, $p_1\neq p_2$ $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_1}$, *то*

$$(L_{p_1q_1},L_{p_2q_2})_{\theta,q}=L_{pq}$$

Теперь определим дискретный аналог пространства Лоренца l_{pq}, элементами которого будут числовые последовательности $\xi=\{\xi_k\}_{k=\infty}^{\infty}$ с единственной предельной точкой 0, для которых конечна величина

$$\|\xi\|_{l_{pq}}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\xi_m^*|^q m^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}},\ \text{ при }\quad 0<q<\infty,$$

$$\|\xi\|_{l_{p\infty}}=\sup_m m^{\frac{1}{p}}\xi_m^*\ \text{ при }\quad q=\infty,$$

где $\{\xi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$ невозрастающая перестановка последовательности $\{|\xi_k|\}_{k=\infty}^{\infty}$.

Известно обобщенное неравенство Минковского [9], если

$$0<\nu\leqslant\mu\leqslant\infty,$$

то верно

$$\|\|a\|_{l_\nu}\|_{l_\mu}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{km}|^\nu\right)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{km}|^\mu\right)^{\frac{\nu}{\mu}}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\|\|a\|_{l_\mu}\|_{l_\nu}.$$

Пусть $\Psi=\{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x\in[0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций Для функции $f\in L[0;1]$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k$, где $a_k(f)=\int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$ – коэффициенты Фурье функции $f\in L[0;1]$ по системе Ψ.

Через $\bar{a}$ будем обозначать вектор $(a_1, ..., a_n)$, запись $\bar{a} < \bar{b}$ означает, что $a_i < b_i$, для всех $i = 1, ..., n$. Также определим следующие обозначения $\bar{a}^{\bar{b}} = a_1^{b_1}...a_n^{b_n}$, $\bar{p}'$ - сопряженный вектор к $\bar{p}$, т.е. $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}, \quad \forall i = 1, ..., n$.

Запись $\|f\|_p \asymp J_p(a(f))$ понимается так, что $f \in L_p \Leftrightarrow J_p(a(f)) < \infty$ и существует положительные постоянные C_1, C_2 :

$$C_1 J_p(a(f)) \leqslant \|f\| \leqslant C_2 J_p(a(f)).$$

Нам понадобятся вспомогательные утверждения.

В работе [20] был введен интерполяционный метод для анизотропных пространств.

Пусть A_1 - банахово пространство, A_2 - функциональная банахова решетка [44].

Через $A = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1-значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ определяется индуктивно. Его назовем анизотропным пространством размерности n.

Пусть $\mathbf{A_0} = (A_1^0, ..., A_n^0)$, $\mathbf{A_1} = (A_1^1, ..., A_n^1)$ два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, \ i = 1, ..., n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, ..., A_n^{\varepsilon_n})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \|...\|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}}...\|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных $\mathbf{A_0}$ и $\mathbf{A_1}$ пространств назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$. Пусть

$$K(\vec{t}, a; \mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}) = \inf\{\sum_{\varepsilon \in E} \vec{t}^{\vec{\varepsilon}} \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} : \ \ a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \ a_\varepsilon \in A_\varepsilon\}$$

- функционал Петре. При $0 < \vec{q} = (q_1, ..., q_n) < \infty$, $0 < \vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_n) < 1$, обозначим через $\mathbf{A}_{\vec{\theta}, \vec{q}} = (\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})_{\vec{\theta}, \vec{q}}$ линейное подмножество $\sum\limits_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, состоящее из элементов для которых

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\vec{\theta}, \vec{q}}} = \left(\int_0^\infty ... \left(\int_0^\infty (t_1^{-\theta_1} ... t_n^{-\theta_n} K(\vec{t}, a))^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty, \text{ если } \vec{q} < \infty \text{ и}$$

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\vec{\theta}, \vec{\infty}}} = \sup_{0 < \vec{t} < \infty} \vec{t}^{-\vec{\theta}} K(\vec{t}, a) < \infty, \ \text{ при } \ q = \infty.$$

Пусть $1 \leqslant \vec{p} < \infty,\ 0 < \vec{q} \leqslant \infty$, где $\vec{p} = (p_1, .., p_n)$, $\vec{q} = (q_1, .., q_n)$. Множество всех измеримых функций определенных на $[0,1]^n$ называется пространством Лоренца $L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n$, если конечны величины:

$$\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n} = \left(\int_0^1 ... \left(\int_0^1 \left(x_1^{\frac{1}{p_1}} ... x_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1,...,*_n}(x_1, ..., x_n) \right)^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... dx_n \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty$$

при $0 < \vec{q} < \infty$,

$$u \quad \|f\|_{L_{\vec{p},\infty}[0,1]^n} = \sup_{(t_1,...,t_n)\in[0;1]^n} \vec{t}^{\frac{\vec{1}}{\vec{p}}} f^*(\vec{t}) < \infty \quad \text{при} \quad \vec{q} = \infty.$$

Здесь $f^{*_1,...,*_n}(\vec{t}) = \inf\{\sigma : \mu\{\vec{x} \in R^n : \ |f(\vec{x})| > \sigma\} < \vec{t}\}$ - невозрастающая перестановка функции $f(\vec{t})$ по каждой переменной.

Нам понадобится теорема Харди-Литтлвуда для пространства Лоренца. Ее доказал для симметричных пространств Семенов Е.М. [25], также в работе Загера Ю. доказана для косинус и синус рядов функции из пространства Лоренца [27]. В частности верна

Лемма. *Если* $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $0 < q \leqslant \infty$, $f \sim \sum\limits_{k\in N} a_k e^{2\pi ikx}$ *и* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонно убывают, то для того, чтобы* $f \in L_{p',q}[0;1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежала в пространству Лоренца $l_{p,q}$, причем

$$\|f\|_{L_{p',q}} \asymp \|a\|_{l_{p,q}}. \tag{7}$$

Основное содержание работы. Перейдем к основным результатам диссертационной работы. В работе неравенства понимаются так, если правая сторона имеет смысл, то и левая сторона имеет смысл.

Работа состоит из трех разделов, восьми подразделов. Раздел 1 посвящен неравенствам типа Харди-Литтлвуда-Пэли для усреднений типа Харди и Беллмана в одномерном случае.

В 1.1 вводятся пространства $n_{p,q,\alpha}$ и $n_{p,q}(\lambda)$ и рассматриваются их интерполяционные свойства. Результаты этого подраздела будут служить аппаратом исследования диссертационной работы.

В подразделе 1.2 изучается суммируемость усреднений типа Харди коэффициентов Фурье. Основным результатом этого подраздела является следующая теорема

Теорема 1.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leqslant \infty$ *и*

$$f \in L_{p,q}, \quad f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}.$$

Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию: при* $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\sup_{1 \leqslant m \leqslant k} m^{2-\alpha} |\lambda_m - \lambda_{m+1}| \leqslant D \frac{1}{k^\alpha} \left| \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \right|,$$

где $D > 0$*- некоторая константа, не зависящая от индекса* k*. Тогда имеет место неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p'}} \overline{a}_k(\lambda) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \|f\|_{L_{p,q}[0,1]},$$

где $\overline{a}_k(\lambda) = \frac{1}{\left|\sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m\right|} \left| \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m a_m \right|, \ k \in N.$

При $q = \infty$ справедливо

$$\sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p'}} \overline{a}_k(\lambda) \leqslant c \|f\|_{L_{p\infty}}.$$

В 1.3 изучается суммируемость усреднений типа Беллмана коэффициентов Фурье. Основным результатом этого подраздела является следующая теорема

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leqslant \infty$*. Если*

$$f \in L_{p,q}[0,1] \ \text{и} \ f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx},$$

$\alpha > \frac{1}{p}$, *тогда верно*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \right| \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}$$

при $0 < q < \infty$.

А при $q = \infty$ справедливо

$$\sup_{k \in N} k^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \right| \leqslant c \|f\|_{L_{p\infty}}.$$

Раздел 2 посвящен изучению неравенств типа Харди-Литтлвуда-Пэли для усреднений типа Харди и Беллмана в многомерном случае.

В 2.1 и 2.2 вводятся анизотропные пространства $n_{\vec{p},\vec{q},\alpha}$ и $n_{\vec{p},\vec{q}}(\lambda)$ и рассматриваются их интерполяционные свойства.

В 2.3 изучается суммируемость усреднений типа Беллмана коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца. Основным результатом этого подраздела является следующая теорема

Теорема 2.3.1. *Пусть параметры* $1 < \vec{p} < \infty,\ 0 < \vec{q} \leqslant \infty$, *число* $\vec{\alpha} > \frac{1}{\vec{p}}$, *где* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. *Пусть* 1-*периодическая по каждой переменной функция* $f(x_1, ..., x_n)$ *имеет ряд Фурье по тригонометрической системе вида*

$$\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1...k_n} e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_nx_n)},$$

где коэффициенты

$$a_{k_1...k_n} = \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 f(x_1, ..., x_n) e^{-2\pi i(k_1x_1+...+k_nx_n)} dx_1...dx_n.$$

Тогда, если $f(x_1, ..., x_n) \in L_{\vec{p}\vec{q}}[0;1]^n$, *то при* $0 < \vec{q} < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\alpha_1-\frac{1}{p_1}} \left| \sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1...m_n}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}} \right| \right)^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant c\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n}.$$

При $\vec{q} = (\infty, ..., \infty)$, *верно*

$$\sup_{k_1,...,k_n \in N} k_1^{\alpha_1-\frac{1}{p_1}} \dots k_n^{\alpha_1-\frac{1}{p_n}} \left| \sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1...m_n}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}} \right| \leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{\infty}}}.$$

В 2.4 изучается суммируемость усреднений типа Харди коэффициентов Фурье из пространства Лоренца.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $1 < \vec{p} < \infty, 0 < \vec{q} \leqslant \infty, \vec{p}' = \frac{\vec{p}}{\vec{p}-1}$. *Последовательность* $\lambda = \{\lambda_{k_1,k_2...k_n}\}_{k_1,k_2,...,k_n=1}^{\infty} = \{\lambda_{k_1}^1 \lambda_{k_2}^2 \dots \lambda_{k_n}^n\}_{k_1,k_2,...,k_n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\prod_{j=1}^{n} \sup_{1 \leqslant m_j \leqslant k_j} {m_j}^{2-\alpha_j} |\lambda_{m_j}^j - \lambda_{m_j+1}^j| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{D_j}{k_j^{\alpha_j}} \left| \sum_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^j \right|,$$

число $\vec{\alpha} > \frac{1}{\vec{p'}}$, где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D_j*-некоторая константа не зависящая от индекса* k_j. *Если* $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{\vec{p}\vec{q}}[0;1]^n$. *Тогда при* $0 < \vec{q} < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{\frac{q_n}{p_n}'} \dots \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{q_2}{p_2}'} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{1/p_1'} \bar{a}_{k_1\dots k_n}(\lambda)\right)^{q_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{k_2}\right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0;1]^n},$$

где

$$\bar{a}_{k_1\dots k_n}(\lambda) = \frac{1}{\left|\sum\limits_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum\limits_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1\dots m_n}\right|} \left|\sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1\dots m_n} a_{m_1\dots m_n}\right|, \ k_1, \dots, k_n \in N.$$

При $\vec{q} = (\infty, \dots, \infty)$

$$\sup_{k_1,\dots,k_n \in N} k_1^{\frac{1}{p_1'}} \dots k_n^{\frac{1}{p_n'}} \bar{a}_{k_1,\dots,k_n}(\lambda) \leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{\infty}}[0;1]^n}.$$

В третьем разделе исследуются теоремы типа Харди-Литтлвуда. Основными результатами этого раздела являются следующие

Теорема 3.1.1. *Пусть* $1 < \frac{1}{\alpha} < p < \infty$ *и* $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) e^{2\pi i k x}$. *Если выполнено условие*

$$|a_k| \leqslant C k^{\alpha - 1} \left|\sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}}\right|, \quad k \in \mathbb{N},$$

и $f \in L_p[0,1]$, *то*

$$\left(\sum_{k \in N} k^{p-2} |a_k(f)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(p,\alpha)\|f\|_p.$$

Приведен пример показывающий существенность условия на α.

Теорема 3.1.2. *а) Если* $2 < p < 1/\alpha$, *тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется функция* f, *такая, что*

$$|a_k| \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \left|\sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}}\right|, \quad k \in \mathbb{N}$$

и $\|f\|_{L_p} < \delta$, *но* $J_p(a(f)) \geqslant 1$.

b) Если $1 < p < \min(1/\alpha, 2)$, *то существует тригонометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$ *такой, что*

$$|a_k| \leqslant \frac{C}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{a_m}{m^\alpha}$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и $J_p(a(f)) < \infty$, *но данный ряд не является рядом Фурье никакой интегрируемой функции.*

Получено необходимое и достаточное условие принадлежности функции в пространству L_p.

Теорема 3.1.4. *Пусть* $1 \leqslant 1/\alpha < p < 2$. *Если при всех* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} |\Delta a_k| \leqslant C \sum_{k=m+1}^{\infty} \left| \sum_{r=2^{k-1}}^{2^k} \frac{a_r(f)}{r^\alpha} \right|,$$

тогда

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{\frac{m}{p'}} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\Delta a_k| \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha-\frac{1}{p})m} \left| \sum_{r=2^{m-1}}^{2^m} \frac{a_r(f)}{r^\alpha} \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$