Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 517.52 На правах рукописи

ЖАНТАКБАЕВА АЯГОЗ МЕЛИСОВНА

О суммируемости коэффициентов рядов Фурье функций из пространства Лоренца

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Нурсултанов Е.Д.
Зарубежный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Дьяченко М.И. (Россия)

Республика Казахстан
Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

f^* – невозрастающая перестановка функции f

a^* – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

L_p – пространство Лебега

L_{pq} – пространство Лоренца

l_p – дискретное пространство Лебега

l_{pq} – дискретное пространство Лоренца

$\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел

Ψ – ортонормированная система функций

$a_k(f)$ – коэффициенты Фурье по системе Ψ

$\overline{a}_k$ – усреднение типа Харди последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\widetilde{a}_k$ – усреднение типа Беллмана последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

Δa_k – разность последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

f' – производная функции f

$\widehat{f}$ – преобразование Фурье

$c_i, \ i = 1, ..., n, ...$ – константы

p' – сопряженный параметр p

$A \hookrightarrow B$ – вложение квазинормированного пространства A в квазинормированное пространство B.

$\vec{a}$ – вектор $(a_1, ..., a_n)$

$\vec{a} < \vec{b}$ – неравенство понимается как $a_i < b_i, \ \forall i = 1, ..., n$

$\vec{a}^{\vec{b}}$ – запись означает следующее обозначение $a_1^{b_1}...a_n^{b_n}$

$\vec{p}\,'$ – сопряженный вектор к $\vec{p}$: $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}, \forall i = 1, ..., n$

$\asymp$ – знак эквивалентности

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Теория рядов Фурье является одним из основных направлений гармонического анализа [1]-[7]. Суммируемость коэффициентов Фурье является актуальным вопросом в теории рядов Фурье. Интерес к этому направлению объясняется его приложениями в различных разделах математики и в прикладных науках, а также наличием многих не решенных трудных проблем. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению неравенств типа Харди-Литтлвуда-Пэли для одномерных и кратных рядов Фурье. Интересным является вопрос о рассмотрении подобных неравенств для различных усреднений. Также исследованы необходимые и достаточные условия принадлежности функций в пространству L_p в терминах коэффициентов Фурье.

Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in [0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций [1]-[8]. Функции $f \in L[0;1]$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k$, где

$$a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$$

– коэффициенты ряда Фурье по системе Ψ.

Нас интересует связь между функцией и ее коэффициентами Фурье, т.е. если функция $f \in L_p,\ 1 < p \leqslant \infty$, то что можно сказать о ее коэффициентах Фурье. Связь между интегрируемостью функции и суммируемостью ее коэффициентов исследуется с XVIII века. При исследовании этого вопроса выделяют случаи $p = 2$ и $1 < p < 2,\ 2 < p$. Для $p = 2$ наиболее ярким примером является *равенство Парсеваля*, полученное в 1799 году [1, 5, 7] (Французский математик Марк-Антуан Парсеваль, 1755-1836).

$$\int\limits_0^1 |f|^2dx = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

где a_k - коэффициенты Фурье по полной тригонометрической системе.

А для общих ортонормированных систем верно *неравенство Бесселя* [1, 5, 7, 9, 10] (Бессель Фридрих Вильгельм, 1784-1846).

Если $\Psi = \{\psi_n(t)\}_{n\in N}$, $t \in [0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций, $f \in L_2$ и $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$ - коэффициенты Фурье, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \int\limits_0^1 |f|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Верно и обратное утверждение, это *теорема Рисса-Фишера* [1, 5, 7, 9, 10] (Рисс Фриджес 1880-1956), (Рональд Эйлмер Фишер, 1890-1962).

Если $\Psi = \{\psi_n(t)\}_{n \in N}$, $t \in [0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций, $f \in L_2$ и последовательность a_k такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, тогда существует $f \in L_2$ такая, что $a_k(f) = a_k$ и верно неравенство

$$\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Как мы видим в этом утверждении нету условия полноты системы, если система полна, то получим равенство Парсеваля. Эти утверждения показывают связь между интегрируемостью функции $|f|^2$ и суммируемостью ее коэффициентов Фурье. Последние два утверждения можно рассматривать, как необходимые и достаточные условия принадлежности функции f пространству L_2.

А при $p \neq 2$ такого, как равенство Парсеваля, абсолютного результата нет.

В 1912-1913 г.г. Юнгом (William Henry Young, 1863-1942) была доказана теорема для специальных значений p вида $\frac{2k}{2k-1}$, $k \in N$. А в 1923 году Феликс Хаусдорф (1868-1942) доказал для любого $p \in (1;2]$, т.о. теорема получила название *теорема Хаусдорфа - Юнга* [8].

1) Если $f \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$, тогда

$$\|a\|_{p'} \leqslant \|f\|_p;$$

2) Если $p \geqslant 2$, $a_n \in l_{p'}$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi ikx}$ сходится в метрике L_p к f:

$$\|f\|_{L_p} \leqslant \|a\|_{l_{p'}}.$$

В том же году Фриджес Рисс показал, что этот результат сохраняет силу для общих ортонормированных систем, состоящий из интегрируемых функций $\psi_n(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\psi_n(x)| \leqslant M$$

для почти всех x.

1) Если $f \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$ тогда

$$\|a\|_{p'} \leqslant M^{\frac{2}{p}-1}\|f\|_p;$$

2) если $p \geqslant 2$, $a_n \in l_{p'}$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ сходится к некоторой f из L_p :

$$\|f\|_{L_p} \leqslant M^{1-\frac{2}{p}}\|a\|_{l_{p'}}.$$

Идея вывода теоремы Хаусдорфа-Юнга и ее обобщения, данного Ф. Риссом, из теоремы выпуклости принадлежит Марселю Риссу. Также показана Харди и Литтлвудом неулучшаемость теоремы Хаусдорфа-Юнга в 1926 году [6, 11].

Аналог теоремы Хаусдорфа-Юнга для преобразования Фурье доказан Е. Титчмаршем [12] в 1924 году.

Пусть $f \in L_1$ и

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_R f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx, \ \ \xi \in R$$

называется преобразованием Фурье. Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $f \in L_p$, тогда последовательность

$$F_N(\xi) = \int\limits_{|x|\leqslant N} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx, \ \ \xi \in R$$

сходится по норме $L_{p'}$ и для предельной функции имеет место неравенство

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leqslant \|f\|_p.$$

Это неравенство было улучшено в 1961 г. К.И.Бабенко (1919-1987) [13], при p' четное, оценка с константой. А для всех $p' \geqslant 2$, то есть $1 < p \leqslant 2$ в 1975 году улучшил У. Бекнер [14] (John William Beckner).

В 1926 г Харди Годфри Харолд (1877-1947) и Литлвуд Джон Идензор (1885-1977) доказали неравенство для тригонометрической системы, в последствии Пэли Раймонд Эдвард Алан Христофер (1907-1933) распространил этот результат для любой ортонормированной ограниченной в совокупности системы.

Теорема А. (Харди-Литтвуд-Пэли) [5] (с. 165), [15] *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in [0;1]$ - *ортонормированная в* $L_2[0;1]$ *система функций. Для всех* $n \in$

N: $\psi_n \in L$, удовлетворяют условию $|\psi_n(x)| \leqslant M$ для почти всех x.
1) Если $1 < p \leqslant 2$ и $f \in L_p$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k$, где $a_k(f) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p M^{\frac{2}{p}-1}\|f\|_{L_p[0,1]}.$$

2) Если $p \geqslant 2$ и последовательность a_n: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p < \infty$, то существует $f \in L_p$ такая, что $a_n = a_n(f)$, и *$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x) = f(x)$ в смысле L_p и верно неравенство*

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leqslant c_p M^{1-\frac{2}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Затем это утверждение в 1937 году было обобщено *Марцинкевичем и Зигмундом* [16]-[17].

Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in [0;1]$ - ортонормированная система, причем $r \in (2;\infty]$ и

$$\|\psi_n\|_r \leqslant M_n, \; n \in N,$$

где $\{M_n\}$ - неубывающая последовательность.

Если $2 \leqslant q < r$ и последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$\Omega_q(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q M_k^{(q-2)\frac{r}{r-2}} k^{(q-2)\frac{r-1}{r-2}}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ сходится в $L_q[0;1]$ к некоторой функции f, причем

$$\|f\|_{L_q[0,1]} \leqslant c(q,r)\Omega_q(a).$$

Неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли получается при $M_n = M$, $r = \infty$.

Также хорошо известно неравенство *Пэли* (1931 г.), которое имеет различие с неравенством Харди-Литтлвуда-Пэли тем, что вместо $|a_k|$ суммируются невозрастающие перестановки a_k^* последовательности a_k. То есть верно
1) если $1 < p \leqslant 2$ и $f \in L_p$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}(a_k^*)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\|f\|_{L_p[0,1]}.$$

2) Пусть $2 \leqslant p < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{p-2}(a_k^*)^p < \infty$, тогда существует $f \in L_p$ такая, что $a_n(f) = a_n$ и

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}(a_k^*)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что неравенство Пэли сильнее чем неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли, а неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли сильнее чем неравенство Рисса (для тригонометрических систем - Хаусдорфа-Юнга).

Действительно, рассмотрим последовательность

$$a_n = n^{-3/4}(\ln(n+1))^{-3/4}$$

для всех $n \in N$. Является ли она последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции $f \in L_p$ $(p = 4)$?

Так как $p = 4$, то по теореме Харди-Литтлвуда-Пэли имеем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3(n+1)}$$

сходится. Ответ - да, то есть найдется функция из пространства L_4 и

$$a_n = n^{-3/4}(\ln(n+1))^{-3/4}$$

являются коэффициентами Фурье этой функции. Видим, что теорема Харди-Литтлвуда-Пэли работает.

А если рассмотреть теорему Рисса, учитывая $p = 4$, то $p' = \frac{4}{3}$, тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$$

расходится. Ответ - теорема Рисса здесь не поможет получить решение вопроса.

Питтом было получено неравенство обобщающее неравенств Харди-Литтлвуда-Пэли и Рисса

1) если $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant q \leqslant p'$ и $f \in L_p$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_p[0,1]}.$$

2) Пусть $2 \leqslant p < \infty$, $p' \leqslant q \leqslant p$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}|a_k|^q < \infty,$$

тогда существует $f \in L_p$ такая, что $a_n(f) = a_n$ и

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, что при $q = p$ из этого результата следует неравенство Харди-Литтлвуда-Пэли, при $q = p'$ следует неравенство Рисса.

Также известно неравенство *Харди-Литтлвуда-Стейна* для пространств Лоренца [18] (с. 490).

1) Если $1 < p < 2$, $0 < q \leqslant \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,q}[0,1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1}(a_k^*)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

2) Пусть $2 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}(a_k^*)^q < \infty$, тогда существует $f \in L_{p,q}$ такая, что $a_n(f) = a_n$ и

$$\|f\|_{L_{p,q}[0,1]} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}(a_k^*)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, при $p = q$, то следует результат Пэли.

Отметим, что в случае $1 < p < 2$ все неравенства дают необходимые условия принадлежности функции в пространству L_p или L_{pq}, а в случае $2 < p < \infty$ – достаточные условия принадлежности функции в пространству.

Для пространства Лоренца при $p = 2$ и $q \neq 2$ неравенство не сохраняется, этот случай исследован С.В. Бочкаревым в 1997 году [19], Е.Д. Нурсултановым [20] в 2000 году.

Для преобразования Фурье подобные неравенства также были исследованы в работе [21].

При $2 < p < \infty$ эти методы суммирования не дают определить сходимость, т.е. нет смысла суммировать этими методами. В [2] (стр. 249) и [22] (стр. 154-158) можно найти соответствующий пример при $p = q$.

Карлеман [1, 5, 7, 22, 23] показал, что существует непрерывная функция f, у которой ряд состоящий из ее коэффициентов Фурье расходится.

Теорема Карлемана. Для любого малого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $f \in C[0;1](\subset L_p[0;1],\ \ p > 2)$, что коэффициенты Фурье этой функции $a_k = \int\limits_0^1 f(x)e^{i2\pi kx}dx$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{2-\varepsilon} = +\infty.$$

По равенству Парсеваля и затем использовав свойство вложения пространства L_p при $p > 2$ получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \leqslant c\|f\|_p < \infty$$

Здесь по утверждению Карлемана снизу получится расходящийся ряд, таким образом, эта оценка самая наилучшая. Но в 1998 г. Нурсултановым Е.Д. [24] была получена следующая теорема

Теорема Нурсултанова. Если $2 < p < \infty$, $\quad 0 < q \leqslant \infty$, $\quad p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,q}[0, 2\pi]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} \left(\bar{a}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}. \tag{1}$$

При $q = \infty$

$$\sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p'}} \bar{a}_k \leqslant C\|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]}, \tag{2}$$

где $\bar{a}_k = \frac{1}{k}\left|\sum\limits_{m=1}^{k} a_m\right|$.

Здесь суммируются средние арифметические полученные по модулю суммы, показывает метод суммирования по таким средним, так называемым средние типа Харди. Отметим данное неравенство верно и для $1 < p < \infty$.

При $q = 1$ будет верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p'}-1} \left(\bar{a}_k\right) \leqslant c\|f\|_{L_{p,1}[0,1]}. \tag{3}$$

При $q = p'$ будет верно неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\bar{a}_k \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c \|f\|_{L_{p,p'}[0,1]}. \tag{4}$$

Исследуется задача для каких еще усреднений можно получить неравенство типа Харди-Литтлвуда-Пэли. Так как подобное неравенство в терминах усреднений первым получил Е.Д.Нурсултанов, то задачу можно сформулировать таким образом: Какие еще можно получить неравенства типа Нурсултанова?

В связи с этим были рассмотрены разные усреднения: усреднение типа преобразования Беллмана, обобщенное усреднение типа Харди (в некоторых источниках усреднения типа Рисса), и целью разделов 1 и 2 является доказать неравенства типа Нурсултанова для усреднений типа Харди (обобщенное) и Беллмана в одномерном и кратном случаях.

Третья глава посвящена изучению необходимым и достаточным условиям принадлежности функции в пространству L_p.

В 1926 году Харди и Литтлвудом [1, 5, 7] была доказана теорема

Теорема В. (Харди-Литтлвуд) *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$. *Если* $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *-монотонно невозрастающая, стремящаяся к нулю последовательность,* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi k x$ *, то для того чтобы* $f \in L_p[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *принадлежала пространству Лоренца* $l_{p'p}$.

Этот результат на пространство Лоренца и более общие симметричные пространства обобщен в работах Е.М. Семенова [25], А.Б. Гулисашвили [26], У. Загбера [27], В.А. Родина [28, 29].

Теорему Харди - Литтлвуда для системы Уолша доказал Ф. Мориц [30] и для мультипликативной системы М.Ф. Тиман и К. Тухлиев [31].

Для кратных тригонометрических рядов проводили исследования Ф. Мориц [30], М.И. Дьяченко [32],[33].

Условие монотонности коэффициентов Фурье нельзя отбросить совсем. Без него утверждение, вообще говоря, не верно. Возможен вариант с ослаблением условия монотонности.

В.А. Кокилашвили [34] для тригонометрических рядов ослабил условие монотонности, заменив его на условие квазимонотонности. Для рядов по мультипликативной системе с квазимонотонными коэффициентами теорему Харди - Литтлвуда доказал Г.А. Акишев [35]. Также следует отметить работы [36]-[40]. В [41] условие монотонности заменено на требование

$$\sum_{m=k}^{2k} |\Delta a_m| \leqslant C k^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

и

$$a_k \geqslant 0, \tag{6}$$

где $C > 1$ и $\alpha \in (0;1]$.

Цель работы. Целью диссертационной работы являются: изучение рядов состоящих из коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца и анизотропных пространств Лоренца и получение необходимых условий принадлежности функций этим пространствам, тем самым доказать неравенства типа Нурсултанова для усреднений типа (обобщенного) Харди и Беллмана. Доказать кратный аналог этих утверждений. Получить теоремы типа Харди-Литтлвуда, т.е. ослабить условие монотонности (обобщенной монотонности) и получить необходимые и достаточные условия принадлежности функций в пространству Лебега.

Объекты исследования. Объектами исследования являются - тригонометрические ряды Фурье, коэффициенты Фурье и их усреднения.

Общая методика исследования. В диссертации систематически применяются методы и результаты теории интерполяции.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты:

– Введены пространства $n_{p,q,\alpha}$ и $n_{p,q}(\lambda)$. Изучены их интерполяционные свойства.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Харди коэффициентов тригонометрических рядов Фурье функций из пространства Лоренца.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Беллмана коэффициентов тригонометрических рядов Фурье функций из пространства Лоренца.

– Получены теоремы типа Харди-Литтлвуда с ослаблением условия монотонности коэффициентов Фурье и теорему типа Харди-Литтлвуда для коэффициентов Фурье, которые имеют ограниченную вариацию.

– Введены анизотропные пространства $n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}$ и $n_{\vec{p},\vec{q}}(\lambda)$. Изучены их интерполяционные свойства.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Харди коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропных пространств Лоренца.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Беллмана коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропных пространств Лоренца.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории дифференциальных уравнении, теории приближений, теории функциональных пространств.

Апробация полученных результатов. По результатам диссертации были сделаны доклады на международных конференциях, школах, в том числе в международном форуме "Ломоносов-2012" молодых ученых в городе Москва и на научно-исследовательском семинаре "Ортогональные тригонометрические ряды" под руководством профессоров Потапова М.К., Лукашенко Т.П., Скворцова В.А., Дьяченко М.И., на семинаре под руководством профессора центра математических исследований г. Барселоны (Испания) С.Ю. Тихонова, на английском семинаре профессоров Кардиффского университета В.И. Буренкова и Т.В. Тарарыковой, на семинаре под руководством академиков НАН РК М. Отелбаева, Р. Ойнарова и профессоров Е.Д. Нурсултанова, К.Н. Оспанова, Н.А. Бокаева в ЕНУ имени Л.Н. Гумилева.

Опубликованы тезисы и статьи в Алматы, Астане, Актобе, Караганде, Баку (Азербайджан), Уфе, Москве (Россия), Барселоне (Испания).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в следующих изданиях:

Публикации в международных изданиях имеющих импакт-фактор:

1. Жантакбаева А.М., Е.Д.Нурсултанов. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Вестник. Серия математика-механика. - Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова. - 2004. - № 2. - С. 64-66, Scopus (0,133)

Публикации в международных изданиях:

2. Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D. The Hardy-Littlewood-Stein inequality // Preprint CRM. Publicat el. - 2012. - № 1102. - P. 1-12.

Публикации в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования Республики Казахстан:

3. Жантакбаева А.М., Е.Д.Нурсултанов. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Математический журнал. Алматы. - 2013. - Т. 13, № 1(47). - С. 73-89.

4. Жантакбаева А.М. Неравенство Пэли для преобразования типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье // Вестник. Серия математическая. - Караганды: КарГУ имени Е.А.Букетова. - 2013. - Т. 70, № 2 - С. 86-93.

5. Жантакбаева А.М. О суммируемости средних Беллмана коэффициентов кратных рядов Фурье функций из изотропного пространства Лоренца // Математический журнал. - Алматы, 2013. - Т. 13, № 3(49). - С. 83-93.

Публикации в материалах зарубежных конференций:

6. Zhantakbayeva A.M. On the summability of fourier coefficients of functions from Lorentz space // Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July. - 2011. - C. 96.

7. Жантакбаева А.М. О сходимости усреднений коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Спектральная теория операторов и ее приложения: материалы международной конференции, - Уфа, 13-16 июня. - 2011. - С. 32-33.

8. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функций из пространства Лоренца // Ломоносов-2012: XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. - Москва. - 2012. - С. 1-2.

9. Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D. Hardy-Littlewood type theorems for classes of functions with general monotone Fourier coefficients // Theses of reports of the Fourth International Conference dedicated to Corresponding Member of RAS, Member of European Academy of Sciences, Professor L.D. Kudryavtsev on the occasion of his 90th anniversary, March 25-29. - Moscow. - 2013. - P. 42-44.

Публикации в материалах международных и республиканских конференций:

10. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Ломоносов-2011: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. - Астана. - 2011. С. 46-47.

11. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функций из пространства Лоренца // Ломоносов - 2012: международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых уче-

ных, Астана. - 2012. - С. 52-53.

12. Жантакбаева А.М. О суммируемости обобщенных средних типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье // Проблемы дифференциального уравнения и математической физики: сборник научного семинара. - Актобе. - 2012. - С.264-266.

13. Жантакбаева А.М. О суммируемости средних типа Харди и Беллмана коэффициентов кратных рядов Фурье // Функционалдық анализ және оның қолданылулары: халықаралық ғылыми конференциясының баяндамалар тезистері. - Астана. - 2012. - Б. 43-44.

14. Жантакбаева А.М. Теоремы типа Харди-Литтлвуда // Дифференциальные уравнения и применения: материалы международной конференции. - Актобе. - 2013. - С. 187-189.

15. Жантакбаева А.М. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лебега // Ломоносов - 2013: международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, Астана. - 2013. - С. 27-30.

Публикация в Казахстанском журнале:

16. Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D. Hardy-Littlwood type theorems // Eurasian Mathematical Journal. - Astana. - 2013. - Vol. 4, № 2. -P. 140-143.

Структура и объем диссертации. Работа, объемом 70 страниц, состоит из обозначения и сокращения, введения, необходимых определений и утверждений, основных трех разделов, заключения, списка литературы, включающего 45 наименований.

Утверждения имеют номера, состоящие из трех индексов. Первый индекс имеет номер раздела, второй – номер пункта в разделе, третий – собственный номер утверждения в данном пункте. Формулы имеют номера, состоящие из двух индексов. Первый индекс имеет номер раздела, а второй – собственный номер формулы.

Необходимые определения и утверждения.

Пусть (A_0, A_1) - совместимая пара банаховых пространств [15].

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\right), \; a \in A_0 + A_1$$

- функционал Петре, $0 < t < \infty$.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \;\; \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta} K(t,a))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \;\; \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a)) < \infty \right\}.$$

Введем определения пространств Лебега и Лоренца. Определим их на отрезке $[0,1]$.

Пусть $0 \leqslant p < \infty$. Множество всех измеримых функций определенных на $[0,1]$ называется пространством Лебега $L_p[0,1]$, если конечна величина

$$\|f\|_{L_p[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

В 1950 г. Лоренцем были введены пространства Лоренца [15], [42]. Пусть $0 < p < \infty$, и $0 < q \leqslant \infty$. Пространство Лоренца $L_{p,q}[0,1]$ определим как пространство измеримых функций f определенных на $[0,1]$, для которых конечны величины, если $q < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

если $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

Здесь $f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x : |f(x)| > \sigma\} \leqslant t\}$ - невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

Отметим некоторые свойства невозрастающей перестановки:

1^0. $|f| \leqslant |g| \Rightarrow f^* \leqslant g^*$

2^0. $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$

3^0. $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leqslant f^*(t_1) + g^*(t_2)$

4^0. $m(\sigma, f) = m(\sigma, f^*)$

Заметим, если $p=q$ так, как $|f(x)|$ и $f^*(x)$ равноизмеримы то пространство Лоренца $L_{p,q}$ совпадает с пространством Лебега L_p.

1^0. *Если* $0<p\leqslant p_1<\infty$, $0<q,q_1\leqslant\infty$, *то*

$$L_{p_1q_1}[0,1]\hookrightarrow L_{pq}[0,1].$$

2^0. *Если* $0<p<\infty$, $0<q\leqslant q_1\leqslant\infty$, *то*

$$L_{pq}[0,1]\hookrightarrow L_{pq_1}[0,1].$$

3^0. *Если* $0<\theta<1$, $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$, $p_1\neq p_2$ $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_1}$, *то*

$$(L_{p_1q_1},L_{p_2q_2})_{\theta,q}=L_{pq}$$

Теперь определим дискретный аналог пространства Лоренца l_{pq}, элементами которого будут числовые последовательности $\xi=\{\xi_k\}_{k=\infty}^{\infty}$ с единственной предельной точкой 0, для которых конечна величина

$$\|\xi\|_{l_{pq}}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\xi_m^*|^q m^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}},\ \ \text{при}\quad 0<q<\infty,$$

$$\|\xi\|_{l_{p\infty}}=\sup_m m^{\frac{1}{p}}\xi_m^*\ \ \text{при}\quad q=\infty,$$

где $\{\xi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$ невозрастающая перестановка последовательности $\{|\xi_k|\}_{k=\infty}^{\infty}$.

Известно обобщенное неравенство Минковского [9], если

$$0<\nu\leqslant\mu\leqslant\infty,$$

то верно

$$\|\|a\|_{l_\nu}\|_{l_\mu}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{km}|^{\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{km}|^{\mu}\right)^{\frac{\nu}{\mu}}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\|\|a\|_{l_\mu}\|_{l_\nu}.$$

Пусть $\Psi=\{\psi_n(x)\}_{n\in N}$, $x\in[0;1]$ - ортонормированная в $L_2[0;1]$ система функций Для функции $f\in L[0;1]$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k$, где $a_k(f)=\int\limits_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}dx$ – коэффициенты Фурье функции $f\in L[0;1]$ по системе Ψ.

Через $\bar{a}$ будем обозначать вектор $(a_1, ..., a_n)$, запись $\bar{a} < \bar{b}$ означает, что $a_i < b_i$, для всех $i = 1, ..., n$. Также определим следующие обозначения $\bar{a}^{\bar{b}} = a_1^{b_1}...a_n^{b_n}$, $\bar{p}'$ - сопряженный вектор к $\bar{p}$, т.е. $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}$, $\forall i = 1, ..., n$.

Запись $\|f\|_p \asymp J_p(a(f))$ понимается так, что $f \in L_p \Leftrightarrow J_p(a(f)) < \infty$ и существует положительные постоянные C_1, C_2 :

$$C_1 J_p(a(f)) \leqslant \|f\| \leqslant C_2 J_p(a(f)).$$

Нам понадобятся вспомогательные утверждения.

В работе [20] был введен интерполяционный метод для анизотропных пространств.

Пусть A_1 - банахово пространство, A_2 - функциональная банахова решетка [44].

Через $A = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1-значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ определяется индуктивно. Его назовем анизотропным пространством размерности n.

Пусть $\mathbf{A_0} = (A_1^0, ..., A_n^0)$, $\mathbf{A_1} = (A_1^1, ..., A_n^1)$ два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1,\ i = 1, ..., n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, ..., A_n^{\varepsilon_n})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \|...\|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}}...\|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных $\mathbf{A_0}$ и $\mathbf{A_1}$ пространств назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$. Пусть

$$K(\vec{t}, a; \mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}) = \inf\{\sum_{\varepsilon \in E} \vec{t}^{\vec{\varepsilon}} \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} :\ \ a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon,\ a_\varepsilon \in A_\varepsilon\}$$

- функционал Петре. При $0 < \vec{q} = (q_1, ..., q_n) < \infty$, $0 < \vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_n) < 1$, обозначим через $\mathbf{A}_{\vec{\theta}, \vec{q}} = (\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})_{\vec{\theta}, \vec{q}}$ линейное подмножество $\sum\limits_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, состоящее из элементов для которых

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\vec{\theta}, \vec{q}}} = \left(\int_0^\infty ... \left(\int_0^\infty (t_1^{-\theta_1} ... t_n^{-\theta_n} K(\vec{t}, a))^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty, \text{ если } \vec{q} < \infty \text{ и}$$

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\vec{\theta}, \vec{\infty}}} = \sup_{0 < \vec{t} < \infty} \vec{t}^{-\vec{\theta}} K(\vec{t}, a) < \infty, \text{ при } q = \infty.$$

Пусть $1 \leqslant \vec{p} < \infty,\ 0 < \vec{q} \leqslant \infty$, где $\vec{p} = (p_1, .., p_n)$, $\vec{q} = (q_1, .., q_n)$. Множество всех измеримых функций определенных на $[0,1]^n$ называется пространством Лоренца $L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n$, если конечны величины:

$$\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n} = \left(\int_0^1 ... \left(\int_0^1 \left(x_1^{\frac{1}{p_1}} ... x_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1,...,*_n}(x_1, ..., x_n)\right)^{q_1} dx_1\right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... dx_n\right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty$$

при $0 < \vec{q} < \infty$,

$$и \quad \|f\|_{L_{\vec{p},\infty}[0,1]^n} = \sup_{(t_1,...,t_n)\in[0;1]^n} \vec{t}^{\frac{1}{\vec{p}}} f^*(\vec{t}) < \infty \quad \text{при} \quad \vec{q} = \infty.$$

Здесь $f^{*_1,...,*_n}(\vec{t}) = \inf\{\sigma : \mu\{\vec{x} \in R^n : \ |f(\vec{x})| > \sigma\} < \vec{t}\}$ - невозрастающая перестановка функции $f(\vec{t})$ по каждой переменной.

Нам понадобится теорема Харди-Литтлвуда для пространства Лоренца. Ее доказал для симметричных пространств Семенов Е.М. [25], также в работе Загера Ю. доказана для косинус и синус рядов функции из пространства Лоренца [27]. В частности верна

Лемма. *Если* $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $0 < q \leqslant \infty$, $f \sim \sum\limits_{k\in N} a_k e^{2\pi ikx}$ *и* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонно убывают, то для того, чтобы* $f \in L_{p',q}[0;1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежала в пространству Лоренца $l_{p,q}$, причем

$$\|f\|_{L_{p',q}} \asymp \|a\|_{l_{p,q}}. \tag{7}$$

Основное содержание работы. Перейдем к основным результатам диссертационной работы. В работе неравенства понимаются так, если правая сторона имеет смысл, то и левая сторона имеет смысл.

Работа состоит из трех разделов, восьми подразделов. Раздел 1 посвящен неравенствам типа Харди-Литтлвуда-Пэли для усреднений типа Харди и Беллмана в одномерном случае.

В 1.1 вводятся пространства $n_{p,q,\alpha}$ и $n_{p,q}(\lambda)$ и рассматриваются их интерполяционные свойства. Результаты этого подраздела будут служить аппаратом исследования диссертационной работы.

В подразделе 1.2 изучается суммируемость усреднений типа Харди коэффициентов Фурье. Основным результатом этого подраздела является следующая теорема

Теорема 1.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leqslant \infty$ *и*

$$f \in L_{p,q}, \quad f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}.$$

Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию: при* $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\sup_{1 \leqslant m \leqslant k} m^{2-\alpha} |\lambda_m - \lambda_{m+1}| \leqslant D \frac{1}{k^{\alpha}} \left| \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \right|,$$

где $D > 0$- *некоторая константа, не зависящая от индекса* k. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p'}} \overline{a}_k(\lambda) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \|f\|_{L_{p,q}[0,1]},$$

где $\overline{a}_k(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m \right|} \left| \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m a_m \right|$, $k \in N$.

При $q = \infty$ справедливо

$$\sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p'}} \overline{a}_k(\lambda) \leqslant c \|f\|_{L_{p\infty}}.$$

В 1.3 изучается суммируемость усреднений типа Беллмана коэффициентов Фурье. Основным результатом этого подраздела является следующая теорема

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leqslant \infty$. *Если*

$$f \in L_{p,q}[0,1] \ \text{и} \ f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x},$$

$\alpha > \frac{1}{p}$, *тогда верно*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}} \right| \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}$$

при $0 < q < \infty$.

А при $q = \infty$ справедливо

$$\sup_{k \in N} k^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}} \right| \leqslant c \|f\|_{L_{p\infty}}.$$

Раздел 2 посвящен изучению неравенств типа Харди-Литтлвуда-Пэли для усреднений типа Харди и Беллмана в многомерном случае.

В 2.1 и 2.2 вводятся анизотропные пространства $n_{\vec{p},\vec{q},\alpha}$ и $n_{\vec{p},\vec{q}}(\lambda)$ и рассматриваются их интерполяционные свойства.

В 2.3 изучается суммируемость усреднений типа Беллмана коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца. Основным результатом этого подраздела является следующая теорема

Теорема 2.3.1. *Пусть параметры* $1 < \vec{p} < \infty,\ 0 < \vec{q} \leqslant \infty$, *число* $\vec{\alpha} > \frac{1}{\vec{p}}$, *где* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. *Пусть* 1*-периодическая по каждой переменной функция* $f(x_1, ..., x_n)$ *имеет ряд Фурье по тригонометрической системе вида*

$$\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1...k_n} e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_nx_n)},$$

где коэффициенты

$$a_{k_1...k_n} = \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 f(x_1, ..., x_n) e^{-2\pi i(k_1x_1+...+k_nx_n)} dx_1...dx_n.$$

Тогда, если $f(x_1, ..., x_n) \in L_{\vec{p}\vec{q}}[0; 1]^n$, *то при* $0 < \vec{q} < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\alpha_1-\frac{1}{p_1}} \left|\sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1...m_n}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}}\right|\right)^{q_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant c\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n}.$$

При $\vec{q} = (\infty, ..., \infty)$, *верно*

$$\sup_{k_1,...,k_n \in N} k_1^{\alpha_1-\frac{1}{p_1}} \dots k_n^{\alpha_1-\frac{1}{p_n}} \left|\sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1...m_n}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}}\right| \leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{\infty}}}.$$

В 2.4 изучается суммируемость усреднений типа Харди коэффициентов Фурье из пространства Лоренца.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $1 < \vec{p} < \infty, 0 < \vec{q} \leqslant \infty, \vec{p}' = \frac{\vec{p}}{\vec{p}-1}$. *Последовательность* $\lambda = \{\lambda_{k_1,k_2...k_n}\}_{k_1,k_2,...,k_n=1}^{\infty} = \{\lambda_{k_1}^1 \lambda_{k_2}^2 \dots \lambda_{k_n}^n\}_{k_1,k_2,...,k_n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\prod_{j=1}^{n} \sup_{1 \leqslant m_j \leqslant k_j} m_j{}^{2-\alpha_j} |\lambda_{m_j}^j - \lambda_{m_j+1}^j| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{D_j}{k_j{}^{\alpha_j}} \left|\sum_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^j\right|,$$

число $\vec{\alpha} > \frac{1}{\vec{p'}}$, где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. D_j*-некоторая константа не зависящая от индекса* k_j. *Если* $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_{\vec{p}\vec{q}}[0;1]^n$. *Тогда при* $0 < \vec{q} < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{\frac{q_n}{p_n}'} \ldots \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{q_2}{p_2}'} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{1/p_1'} \bar{a}_{k_1 \ldots k_n}(\lambda)\right)^{q_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{k_2}\right)^{\frac{q_3}{q_2}} \ldots \frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0;1]^n},$$

где

$$\bar{a}_{k_1 \ldots k_n}(\lambda) = \frac{1}{\left|\sum\limits_{m_n=1}^{k_n} \ldots \sum\limits_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \ldots m_n}\right|} \left|\sum_{m_n=1}^{k_n} \ldots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \ldots m_n} a_{m_1 \ldots m_n}\right|, \; k_1, \ldots, k_n \in N.$$

При $\vec{q} = (\infty, \ldots, \infty)$

$$\sup_{k_1, \ldots, k_n \in N} k_1^{\frac{1}{p_1'}} \ldots k_n^{\frac{1}{p_n'}} \bar{a}_{k_1, \ldots, k_n}(\lambda) \leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{\infty}}[0;1]^n}.$$

В третьем разделе исследуются теоремы типа Харди-Литтлвуда. Основными результатами этого раздела являются следующие

Теорема 3.1.1. *Пусть* $1 < \frac{1}{\alpha} < p < \infty$ *и* $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) e^{2\pi i k x}$. *Если выполнено условие*

$$|a_k| \leqslant C k^{\alpha - 1} \left|\sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}}\right|, \quad k \in \mathbb{N},$$

и $f \in L_p[0,1]$, *то*

$$\left(\sum_{k \in N} k^{p-2} |a_k(f)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(p, \alpha)\|f\|_p.$$

Приведен пример показывающий существенность условия на α.

Теорема 3.1.2. *а) Если* $2 < p < 1/\alpha$, *тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется функция* f, *такая, что*

$$|a_k| \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \left|\sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}}\right|, \quad k \in \mathbb{N}$$

и $\|f\|_{L_p} < \delta$, *но* $J_p(a(f)) \geqslant 1$.

b) Если $1 < p < \min(1/\alpha, 2)$, *то существует тригонометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi int}$ *такой, что*

$$|a_k| \leqslant \frac{C}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{a_m}{m^\alpha}$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и $J_p(a(f)) < \infty$, *но данный ряд не является рядом Фурье никакой интегрируемой функции.*

Получено необходимое и достаточное условие принадлежности функции в пространству L_p.

Теорема 3.1.4. *Пусть* $1 \leqslant 1/\alpha < p < 2$. *Если при всех* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} |\Delta a_k| \leqslant C \sum_{k=m+1}^{\infty} \left| \sum_{r=2^{k-1}}^{2^k} \frac{a_r(f)}{r^\alpha} \right|,$$

тогда

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{\frac{m}{p'}} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\Delta a_k| \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha - \frac{1}{p})m} \left| \sum_{r=2^{m-1}}^{2^m} \frac{a_r(f)}{r^\alpha} \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1 НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА-ПЭЛИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ УСРЕДНЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

1.1 Интерполяция пространств $n_{p,q,\alpha}$ и $n_{p,q}(\lambda)$

В работе [24] было введено и исследовано интерполяционные методы и свойства сетевых пространств. Также аналогичное пространство встречается в работе [43]. Используясь теми идеями и методами введем и исследуем интерполяционные свойства пространств, которые будут следовать ниже.

Пусть $0 < p < \infty,\ 0 < q \leqslant \infty,\ \ \alpha > 0$. Определим пространство

$$n_{p,q,\alpha} = \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}: \ \ \|a\|_{n_{p,q,\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} \widetilde{a}_k(\alpha) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

при $q = \infty$,

$$\|a\|_{n_{p,\infty,\alpha}} = \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} \widetilde{a}_k(\alpha) < \infty,$$

где $\widetilde{a}_k(\alpha) = \sup\limits_{m \geqslant k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left| \sum\limits_{s=m}^{\infty} \frac{a_s}{s^{\alpha}} \right|$, для любого $k \in N$.

Лемма 1.1.1. *Если* $0 < p < \infty$ *и* $0 < q \leqslant q_1 \leqslant \infty$, *то*

$$n_{p,q,\alpha} \hookrightarrow n_{p,q_1,\alpha}.$$

Доказательство. Пусть $q_1 = \infty$, тогда из монотонности $\widetilde{a}_k(\alpha)$, получим

$$\|a\|_{n_{p,\infty,\alpha}} = \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} \widetilde{a}_k(\alpha) = \sup_{k \in N} \left(k^{\frac{q}{p}} \widetilde{a}_k^q(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \sim \sup_{k \in N} \left(\sum_{m=1}^{k} m^{\frac{q}{p}-1} \widetilde{a}_k^q(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{k \in N} \left(\sum_{m=1}^{k} m^{\frac{q}{p}-1} \widetilde{a}_m^q(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \|a\|_{n_{p,q,\alpha}}.$$

Пусть теперь $0 < q \leqslant q_1 < \infty$, тогда

$$\|a\|_{n_{p,q_1,\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}+\varepsilon-\varepsilon} \widetilde{a}_k(\alpha) \right)^{q_1} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Учитывая

$$k^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \asymp c \left(\sum_{m=1}^{k} m^{(\frac{1}{p}+\varepsilon)q} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{q}},$$

и монотонность последовательности $\{\widetilde{a}_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ имеем

$$\|a\|_{n_{p,q_1,\alpha}} \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\varepsilon q_1}\left(\sum_{m=1}^{k}\widetilde{a}_m^q m^{(\frac{1}{p}+\varepsilon)q}\frac{1}{m}\right)^{\frac{q_1}{q}}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|a\|_{n_{p,q_1,\alpha}} \leqslant C\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{q}{p}}\widetilde{a}_m^q\frac{1}{m}m^{\varepsilon q}\left(\sum_{k=m}^{\infty}k^{-\varepsilon q_1}\frac{1}{k}\right)^{\frac{q}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q}} = C\|a\|_{n_{p,q,\alpha}}.$$

Лемма доказана. □

В следующей лемме доказана эквивалентная норма пространства $\|a\|_{n_{p,q,\alpha}}$.

Лемма 1.1.2. *Пусть* $0 < p < \infty$ *и* $0 < q \leqslant \infty$, *тогда*

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\frac{k}{p}}\widetilde{a}_{2^k}(\alpha)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Из монотонности $\widetilde{a}_k(\alpha)$ имеем

$$(\ln 2)^{\frac{1}{q}}2^{-\frac{1}{p}}2^{\frac{k+1}{p}}\widetilde{a}_{2^{k+1}}(\alpha) \leqslant \left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\left(m^{\frac{1}{p}}\widetilde{a}_m(\alpha)\right)^q\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant (\ln 2)^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{k}{p}}\widetilde{a}_{2^k}(\alpha).$$

Возведя неравенства в степень q и суммируя по k получим требуемые неравенства, показывающие эквивалентность норм в пространстве $\|a\|_{n_{p,q,\alpha}}$. □

Рассмотрим теперь интерполяционные свойства пространства $\|a\|_{n_{p,q,\alpha}}$, которые имеют применения доказательствам основных результатов.

Лемма 1.1.3. *Если* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *и параметры* $0 < q, q_0, q_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, *то*

$$(n_{p_0,q_0,\alpha},\ \ n_{p_1,q_1,\alpha})_{\theta,q} \hookrightarrow n_{p,q,\alpha},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Доказательство. В силу леммы 1.1.1 имеем вложения

$$n_{p_i,q_i,\alpha} \hookrightarrow n_{p_i,\infty,\alpha},\ \ i = 0, 1,$$

тогда имеем

$$\|a_i\|_{n_{p_i,\infty,\alpha}} \leqslant C_i\|a_i\|_{n_{p_i,q_i,\alpha}},\ \ i = 0, 1$$

тогда для $0 < t < \infty$ и $a \in n_{p_0,q_0,\alpha} + n_{p_1,q_1,\alpha}$ получим

$$K(t, a; n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha}) = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{n_{p_0,\infty,\alpha}} + t\|a_1\|_{n_{p_1,\infty,\alpha}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{n_{p_0,q_0,\alpha}} + t\|a_1\|_{n_{p_1,q_1,\alpha}}\right) = K\left(t, a; n_{p_0,q_0,\alpha}, n_{p_1,q_1,\alpha}\right),$$

И тогда

$$\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}} = \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a; n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a; n_{p_0,q_0,\alpha}, n_{p_1,q_1,\alpha}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = C\|a\|_{\left(n_{p_0,q_0,\alpha},\ n_{p_1,q_1,\alpha}\right)_{\theta,q}}.$$

Следовательно

$$\left(n_{p_0,q_0,\alpha},\ \ n_{p_1,q_1,\alpha}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow \left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ \ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ \ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow n_{p,q,\alpha}.$$

Пусть $k \in N$, $a_k = a_k^0 + a_k^1$ некоторое произвольное представление элементов a_k последовательности из $\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ \ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}$, где $a_0 = \{a_k^0\}_{k\in N} \in n_{p_0,\infty,\alpha}$ и $\{a_1\} = \{a_k^1\}_{k\in N} \in n_{p_1,\infty,\alpha}$. Так как

$$\widetilde{a}_k(\alpha) = \sup_{m\geqslant k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left|\sum_{s=m}^\infty \frac{a_s}{s^\alpha}\right| \leqslant \sup_{m\geqslant k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left|\sum_{s=m}^\infty \frac{a_s^0}{s^\alpha}\right| + \sup_{m\geqslant k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left|\sum_{s=m}^\infty \frac{a_s^1}{s^\alpha}\right| =$$

$$= \widetilde{a}_k^0(\alpha) + \widetilde{a}_k^1(\alpha),$$

то обозначив через $v(t) = t^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$, получим

$$\sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s \leqslant \sup_{s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s^0 + \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1}} \widetilde{a}_s^1 \leqslant \sup_{s\in N} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s^0 + t \sup_{s\in N} s^{\frac{1}{p_1}} \widetilde{a}_s^1 =$$

$$= \|a_0\|_{n_{p_0,\infty,\alpha}} + t\|a_1\|_{n_{p_1,\infty,\alpha}}.$$

Учитывая произвольность представления $a = a_0 + a_1$ имеем

$$K\left(t, a; n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha}\right) \geqslant \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s(\alpha).$$

Поэтому при $0 < q \leqslant \infty$ будем иметь

$$\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K\left(t, a; n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s(\alpha)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сделаем замену $t = u^{\frac{p_1-p_0}{p_0p_1}}$ и так как $p_0 < p_1$, то

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s(\alpha)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(u^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \sup_{u\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s(\alpha)\right)^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^\infty \int_{2^{r-1}-1}^{2^r-1} \left(u^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \sup_{u\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s(\alpha)\right)^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant C\left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \sup_{2^r\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_s(\alpha)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant C\left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} 2^{\frac{r}{p_0}} \widetilde{a}_{2^r}(\alpha)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|a\|_{n_{p,q,\alpha}}.$$

Итак, получили

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \leqslant C\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}}.$$

Лемма доказана. $\square$

Определим пространство $n_{p,q}(\lambda)$. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. Для последовательности $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \neq 0$ для любого $m \in N$, определим пространство

$$n_{p,q}(\lambda) = \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \ \|a\|_{n_{p,q}(\lambda)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} \overline{a}_k(\lambda) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

при $q = \infty$,

$$\|a\|_{n_{p,\infty}(\lambda)} = \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} \overline{a}_k(\lambda) < \infty,$$

где

$$\overline{a}_k(\lambda) = \sup_{m \geqslant k} \frac{1}{\left| \sum\limits_{s=1}^{m} \lambda_s \right|} \left| \sum_{s=1}^{m} \lambda_s a_s \right|.$$

Теперь докажем аналогичные леммы для пространства $n_{p,q}(\lambda)$.

Лемма 1.1.4. *Если $q_1 > q$, то $n_{p,q}(\lambda) \hookrightarrow n_{p,q_1}(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $q_1 = \infty$, тогда из монотонности $\overline{a}_k(\lambda)$, получим

$$\|a\|_{n_{p,\infty}(\lambda)} = \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} \overline{a}_k(\lambda) = \sup_{k \in N} \left(k^{\frac{q}{p}} \overline{a}_k^q(\lambda) \right)^{\frac{1}{q}} \sim \sup_{k \in N} \left(\sum_{m=1}^{k} m^{\frac{q}{p}-1} \overline{a}_k^q(\lambda) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{k \in N} \left(\sum_{m=1}^{k} m^{\frac{q}{p}-1} \overline{a}_m^q(\lambda) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \|a\|_{n_{p,q}(\lambda)}.$$

Пусть теперь $0 < q \leqslant q_1 < \infty$, тогда

$$\|a\|_{n_{p,q_1}(\lambda)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}+\varepsilon-\varepsilon} \overline{a}_k(\lambda) \right)^{q_1} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Учитывая

$$k^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \asymp c \left(\sum_{m=1}^{k} m^{(\frac{1}{p}+\varepsilon)q} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{q}},$$

и монотонность последовательности $\{\overline{a}_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ имеем

$$\|a\|_{n_{p,q_1}(\lambda)} \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\varepsilon q_1} \left(\sum_{m=1}^{k} \overline{a}_m^q(\lambda) m^{(\frac{1}{p}+\varepsilon)q} \frac{1}{m} \right)^{\frac{q_1}{q}} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|a\|_{n_{p,q_1}(\lambda)} \leqslant C\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{q}{p}}\bar{a}_m^q(\lambda)\frac{1}{m}m^{\varepsilon q}\left(\sum_{k=m}^{\infty}k^{-\varepsilon q_1}\frac{1}{k}\right)^{\frac{q}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q}} = C\|a\|_{n_{p,q}(\lambda)}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.1.5. *Пусть* $0 < p < \infty$ *и* $0 < q \leqslant \infty$, *тогда*

$$\|a\|_{n_{p,q}(\lambda)} \sim \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{\frac{k}{p}}\bar{a}_{2^k}(\lambda)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Из монотонности $\bar{a}_k(\lambda)$ имеем

$$(\ln 2)^{\frac{1}{q}}2^{-\frac{1}{p}}2^{\frac{k+1}{p}}\bar{a}_{2^{k+1}}(\lambda) \leqslant \left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\left(m^{\frac{1}{p}}\bar{a}_m(\lambda)\right)^q\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant (\ln 2)^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{k}{p}}\bar{a}_{2^k}(\lambda).$$

Возведя неравенства в степень q и суммируя по k получим требуемое утверждение. $\square$

Лемма 1.1.6. *Если* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *и параметры* $0 < q, q_0, q_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, *то*

$$(n_{p_0,q_0}(\lambda),\ \ n_{p_1,q_1}(\lambda))_{\theta q} \hookrightarrow n_{p,q}(\lambda),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Доказательство. В силу вложения

$$n_{p_i,q_i}(\lambda) \hookrightarrow n_{p_i,\infty}(\lambda),\ \ i = 0, 1$$

имеем

$$\|a_i\|_{n_{p_i,\infty}(\lambda)} \leqslant C_i\|a_i\|_{n_{p_i,q_i}(\lambda)},\ \ i = 0, 1$$

тогда для $0 < t < \infty$ и $a \in n_{p_0,q_0}(\lambda) + n_{p_1,q_1}(\lambda)$ получаем

$$K(t, a; n_{p_0,\infty}(\lambda), n_{p_1,\infty}(\lambda)) = \inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{n_{p_0,\infty}(\lambda)} + t\|a_1\|_{n_{p_1,\infty}(\lambda)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{n_{p_0,q_0}(\lambda)} + t\|a_1\|_{n_{p_1,q_1}(\lambda)}\right) = K\left(t, a; n_{p_0,q_0}(\lambda), n_{p_1,q_1}(\lambda)\right).$$

И тогда

$$\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty}(\lambda),\ n_{p_1,\infty}(\lambda)\right)_{\theta,q}} = \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,a;n_{p_0,\infty}(\lambda),n_{p_1,\infty}(\lambda)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,a;n_{p_0,q_0}(\lambda),n_{p_1,q_1}(\lambda)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = C\|a\|_{\left(n_{p_0,q_0}(\lambda),\ n_{p_1,q_1}(\lambda)\right)_{\theta,q}}.$$

Следовательно

$$(n_{p_0,q_0}(\lambda),\ \ n_{p_1,q_1}(\lambda))_{\theta,q} \hookrightarrow (n_{p_0,\infty}(\lambda),\ \ n_{p_1,\infty}(\lambda))_{\theta,q}\,.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$(n_{p_0,\infty,\alpha},\ \ n_{p_1,\infty}(\lambda))_{\theta,q} \hookrightarrow n_{p,q}(\lambda).$$

Пусть $k \in N$, $a_k = a_k^0 + a_k^1$ некоторое произвольное представление элементов a_k последовательности из $(n_{p_0,\infty}(\lambda),\ \ n_{p_1,\infty}(\lambda))_{\theta,q}$, где $a_0 = \{a_k^0\}_{k\in N} \in n_{p_0,\infty}(\lambda)$ и $\{a_1\} = \{a_k^1\}_{k\in N} \in n_{p_1,\infty}(\lambda)$.

Так как

$$\overline{a}_k(\lambda) = \sup_{m\geqslant k}\frac{1}{\left|\sum\limits_{s=1}^m \lambda_s\right|}\left|\sum_{s=1}^m \lambda_s a_s\right| \leqslant \sup_{m\geqslant k}\frac{1}{\left|\sum\limits_{s=1}^m \lambda_s\right|}\left|\sum_{s=1}^m \lambda_s a_s^0\right| + \sup_{m\geqslant k}\frac{1}{\left|\sum\limits_{s=1}^m \lambda_s\right|}\left|\sum_{s=1}^m \lambda_s a_s^1\right| =$$

$$= \overline{a}_k^0(\lambda) + \overline{a}_k^1(\lambda),$$

то обозначив через $v(t) = t^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}$, получим

$$\sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}}\overline{a}_s(\lambda) \leqslant \sup_{s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}}\overline{a}_s^0(\lambda) + \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1}}\overline{a}_s^1(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{s\in N} s^{\frac{1}{p_0}}\overline{a}_s^0(\lambda) + t\sup_{s\in N} s^{\frac{1}{p_1}}\overline{a}_s^1(\lambda) = \|a_0\|_{n_{p_0,\infty}(\lambda)} + t\|a_1\|_{n_{p_1,\infty}(\lambda)}.$$

Учитывая произвольность представления $a = a_0 + a_1$ имеем

$$K\left(t,a;n_{p_0,\infty}(\lambda),n_{p_1,\infty}(\lambda)\right) \geqslant \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}}\overline{a}_s(\lambda).$$

Поэтому при $0 < q \leqslant \infty$ будем иметь

$$\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty}(\lambda),\ n_{p_1,\infty}(\lambda)\right)_{\theta,q}} = \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta} K\left(t, a; n_{p_0,\infty}(\lambda), n_{p_1,\infty}(\lambda)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{a}_s(\lambda)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сделаем замену $t = u^{\frac{p_1-p_0}{p_0p_1}}$ и так как $p_0 < p_1$, то

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t)\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{a}_s(\lambda)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left(u^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \sup_{u\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{a}_s(\lambda)\right)^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^\infty \int\limits_{2^{r-1}-1}^{2^r-1} \left(u^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \sup_{u\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{a}_s(\lambda)\right)^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant C \left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \sup_{2^r\geqslant s\geqslant 1} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{a}_s(\lambda)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant C \left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} 2^{\frac{r}{p_0}} \overline{a}_{2^r}(\lambda)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|a\|_{n_{p,q}(\lambda)}.$$

Итак, получили

$$\|a\|_{n_{p,q}(\lambda)} \leqslant C \|a\|_{\left(n_{p_0,\infty}(\lambda),\ n_{p_1,\infty}(\lambda)\right)_{\theta,q}}.$$

Лемма доказана. $\square$

1.2 Суммируемость усреднений типа Харди коэффициентов Фурье

В этом разделе исследуется неравенство типа Нурсултанова для усреднений типа Харди коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца L_{pq}. Сначала докажем вспомогательную лемму. В работе [45] была доказана более общая теорема, аналогичная к следующей лемме.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. *Если* $f \in L_1[0;1]$ *и* $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$, $x \in [0,1]$, *тогда*

$$\|f\|_{L_{p',\infty}} \leqslant c \sup_{m\in\mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m\Delta a_m|.$$

Доказательство. По соотношению двойственности нормы

$$\|f\|_{L_{p',\infty}} = \sup_{\|g\|_{p,1}=1} \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x} g(x) dx = \sup_{\|g\|_{p,1}=1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{g(k)}.$$

Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{g(k)}$. Учитывая, что коэффициенты Фурье $a_k \to 0$, имеем $a_k = \sum\limits_{m=k}^{\infty} \Delta a_m$, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{g(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \Delta a_m \right) \widehat{g(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta a_m \sum_{k=1}^{m} \widehat{g(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |m\Delta a_m| \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \widehat{g(k)} \right| \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m\Delta a_m| \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{p'}-1} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \widehat{g(k)} \right|$$

Используя (3) , получим

$$\|f\|_{L_{p',\infty}} \leqslant C \sup_{\|g\|_{p,1}=1} \left\{ \sup_{m\in\mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m\Delta a_m| \|g\|_{L_{p,1}} \right\} = C \sup_{m\in\mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m\Delta a_m|.$$

Лемма доказана. □

Теорема 1.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leqslant \infty$ *и* $f \in L_{p,q}$, $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$. *Пусть последовательность* $\lambda = \{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию: при* $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\sup_{1\leqslant m\leqslant k} m^{2-\alpha} |\lambda_m - \lambda_{m+1}| \leqslant D \frac{1}{k^\alpha} \left| \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \right|,$$

где $D>0$- некоторая константа, не зависящая от индекса k. Тогда имеет место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\frac{1}{p'}}\overline{a}_k(\lambda)\right)^q\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\|f\|_{L_{p,q}[0,1]},$$

где

$$\overline{a}_k(\lambda)=\frac{1}{\left|\sum\limits_{m=1}^{k}\lambda_m\right|}\left|\sum_{m=1}^{k}\lambda_m a_m\right|,\ \ k\in N.$$

При $q=\infty$, имеет место

$$\sup_{k\in N}k^{\frac{1}{p'}}\overline{a}_k(\lambda)\leqslant c\|f\|_{L_{p\infty}}.$$

Доказательство. Оценим величину

$$\frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\right|}\left|\sum_{m=1}^{n}\lambda_m a_m\right|=\frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m\right|}\left|\sum_{m=1}^{n}\lambda_m\int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1|f(x)|\left|\frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m\right|}\sum_{m=1}^{n}\lambda_m e^{-2\pi imx}\right|dx.$$

Положим

$$\frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{r=1}^{n}\lambda_r\right|}\sum_{m=1}^{n}\lambda_m e^{-2\pi imx}=\Phi_n(x),$$

по неравенству Гельдера, при $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ имеем

$$\|a(\lambda)\|_{l_{p',\infty}}\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_0^1|f(x)|\,|\Phi_n(x)|\,dx\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f\|_{L_{p,1}}\|\Phi_n\|_{L_{p',\infty}}.$$

Оценим норму $\|\Phi_n\|_{L_{p',\infty}}$. Коэффициенты Фурье этой функции равны

$$b_m(\Phi_n)=\begin{cases}\frac{n^{\frac{1}{p'}}\lambda_m}{\left|\sum\limits_{r=1}^{n}\lambda_r\right|}, & \text{если}\ \ m\leqslant n;\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

Из леммы 1.2.1 получим

$$\|\Phi_n\|_{L_{p',\infty}} \leqslant c \sup_{m\in\mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m\Delta b_m|.$$

Рассмотрим $I = m^{\frac{1}{p}} |m\Delta b_m|$.

Пусть $m \leqslant n$, тогда используя условие теоремы, имеем

$$I = m^{\frac{1}{p}} (m\Delta b_m) = \frac{m^{\frac{1}{p}} m n^{\frac{1}{p'}} |\lambda_m - \lambda_{m+1}|}{\left|\sum\limits_{r=1}^{n} \lambda_r\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^{\frac{1}{p'}} m^{\alpha - \frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{r=1}^{n} \lambda_r\right|} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} k^{2-\alpha} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leqslant \frac{n^{\frac{1}{p'}} m^{\alpha - \frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{r=1}^{n} \lambda_r\right|} \frac{D}{n^{\alpha}} \left|\sum_{m=1}^{n} \lambda_m\right| = D \frac{m^{\alpha - \frac{1}{p'}}}{n^{\alpha - \frac{1}{p'}}} \leqslant D.$$

При $m > n$

$$I = m^{\frac{1}{p}} |m\Delta b_m| = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m\Delta b_m| \leqslant D.$$

Следовательно,

$$\|\Phi_n\|_{p',\infty} \leqslant cD = C.$$

Итак, мы получили

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right|} \left|\sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_m\right| \leqslant C \|f\|_{L_{p,1}}.$$

Тогда верно

$$\|a\|_{n_{p'\infty}(\lambda)} \leqslant C \|f\|_{L_{p,1}}.$$

И наконец воспользуемся леммой 1.1.6 и интерполяционной теоремой Марцинкевича-Кальдерона [15]. Так как $\alpha > \frac{1}{p'}$, то найдутся p_0, p_1, что $1 - \alpha < \frac{1}{p_1} < \frac{1}{p} < \frac{1}{p_0}$, т.е. также удовлетворяют условию теоремы. Следовательно найдется $\theta \in (0,1)$ такая, что

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \ \text{и}\ \frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p'_0} + \frac{\theta}{p'_1}.$$

Из доказанного имеем

$$\|a\|_{n_{p_0'\infty}(\lambda)} \leqslant C_0\|f\|_{L_{p_0,1}}$$

и

$$\|a\|_{n_{p_1'\infty}(\lambda)} \leqslant C_1\|f\|_{L_{p_1,1}}.$$

Тогда

$$\|a\|_{n_{p'q}(\lambda)} \leqslant C_0^{1-\theta}C_1^{\theta}\|f\|_{L_{p,q}},$$

для любого $0 < q \leqslant \infty$. Теорема доказана. □

Следствие 1.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 \leqslant \beta < \frac{1}{p}$, $0 < q \leqslant \infty$ *и* $f \in L_{p,q}[0,1]$. *Тогда верно*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\beta-\frac{1}{p}}\left|\sum_{m=1}^{k}\frac{a_m}{m^{\beta}}\right|\right)^{q}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

При $q = \infty$

$$\sup_{n\in N} n^{\beta-\frac{1}{p}}\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{s^{\beta}}\right| \leqslant c\|f\|_{L_{p,\infty[0,1]}}.$$

Доказательство. Пусть $\beta < 1/p$, тогда $1/p' < 1-\beta$ и следовательно найдется α, что $1/p' < \alpha < 1-\beta$. Покажем, что $\lambda = \{\frac{1}{m^{\beta}}\}_{m=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы 1.2.1 с параметром α. Действительно

$$\sup_{1\leqslant m\leqslant n} m^{2-\alpha}\left(\frac{1}{m^{\beta}} - \frac{1}{(m+1)^{\beta}}\right) \sim \sup_{1\leqslant m\leqslant n} m^{1-\alpha-\beta} = n^{1-\alpha-\beta}.$$

Здесь учитывалось, что $1-\alpha-\beta > 0$. С другой стороны

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{\beta}}\right| \sim n^{1-\alpha-\beta}.$$

Учитывая

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\beta-\frac{1}{p}}\sum_{m=1}^{k}\frac{a_m}{m^{\beta}}\right)^{q}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\frac{1}{p'}}\overline{a}_k(\lambda)\right)^{q}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}},$$

получим требуемое неравенство. □

1.3 Суммируемость усреднении типа Беллмана коэффициентов Фурье

В этом пункте рассматриваются усреднения типа Беллмана.

Замечание 1.3.1. *В частности с помощью неравенства Нурсултанова можно получить утверждение, если* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ *и* $f \in L_{p,p'}[0,1]$, $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}$, *тогда верно*

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,p'}[0,1]}.$$

Доказательство. Оценим следующую величину

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left\|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k}\right\|_{l_{p'}}.$$

Используем теорему о двойственности [10] (эквивалентную нормировку для пространства l_p) и поменяем порядок суммирования, получаем

$$\left\|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k}\right\|_{l_{p'}} = \sup_{\|b\|_{l_p}=1}\left|\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k}\right| = \sup_{\|b_m\|_{l_p}=1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\sum_{m=1}^{k}b_m\right| \qquad (1.1)$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\sum\limits_{m=1}^{k}b_m$. Применяем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\sum_{m=1}^{k}b_m = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}b_m - \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{k+1}b_m\right)\sum_{r=1}^{k}a_r + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}b_m\sum_{r=1}^{n}a_r$$

Преобразуя приведем к следующему виду

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\sum_{m=1}^{k}b_m\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_m\right|\frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{k+1}|b_m| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{|b_{k+1}|}{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_m\right| +$$

$$+\frac{1}{n}\left|\sum_{m=1}^{n}b_m\right|\left|\sum_{r=1}^{n}a_r\right| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Для оценки используем неравенства Гельдера, для $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, Харди [9] и (4).

$$I_1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}a_m\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{k+1}|b_m|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|f\|_{L_{p,p'}}\|b\|_{l_p}.$$

Также оценивается I_2.

$$I_2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_m\right|\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,p'}}$$

Оценим I_3. Используем неравенство Гельдера и взяв супремум, получим

$$I_3 \leqslant \|b\|_{l_p}\sup_{n\geqslant 1} n^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{n}\left|\sum_{r=1}^{n}a_r\right|.$$

По (2) и учитывая, что пространство $L_{p,q}$ по второму параметру сужается

$$I_3 \leqslant C\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,\infty}} \leqslant C\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,p'}}.$$

Собирая все полученные оценки $I_1 - I_3$, переходя к пределу и возвращаясь к (1.1), получим требуемое неравенство.

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C\|f\|_{L_{p,p'}}.$$

Неравенство доказано. □

Целью нашей работы является получение более общего неравенства.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 < p < \infty,\ p' = \frac{p}{p-1},\ 0 < q \leqslant \infty$. *Если* $f \in L_{p,q}[0,1]$ *и* $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}$, $\alpha > \frac{1}{p}$, *тогда верно*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha-\frac{1}{p}}\left|\sum_{m=k}^{\infty}\frac{a_m}{m^{\alpha}}\right|\right)^{q}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]} \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(m^{\alpha-\frac{1}{p}}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k^{\alpha}}\right|\right)^{p'}\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left\|m^{\alpha-1}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k^{\alpha}}\right\|_{l_{p'}}$$

Используем теорему о двойственности для пространства l_p и поменяв порядок суммирования, получим

$$\left\| m^{\alpha-1} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right\|_{l_{p'}} = \sup_{\|b\|_{l_p}=1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-1} b_m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} = \sup_{\|b\|_{l_p}=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \sum_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m.$$

Рассмотрим конечную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^{\alpha-\gamma}} \frac{1}{k^\gamma} \sum_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m,$$

где $\gamma : 0 < \alpha - \gamma < \frac{1}{p}$. Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^{\alpha-\gamma}} \frac{1}{k^\gamma} \sum_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\gamma} \sum_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m - \frac{1}{(k+1)^\gamma} \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} b_m \right) \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{k} \frac{a_r}{r^{\alpha-\gamma}} + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{m=1}^{n} m^{\alpha-1} b_m \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{r^{\alpha-\gamma}}.$$

Сумму $\sum\limits_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m$ запишем следующим образом

$$\sum_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m = \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} b_m - (k+1)^{\alpha-1} b_{k+1},$$

подставим

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^{\alpha-\gamma}} \frac{1}{k^\gamma} \sum_{m=1}^{k} m^{\alpha-1} b_m \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{k^\gamma} - \frac{1}{(k+1)^\gamma} \right| \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} |b_m| \left| \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}| \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{k^\gamma} \left| \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{m=1}^{n} m^{\alpha-1} |b_m| \left| \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| = I_1 + I_2 + I_3$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Для оценки I_1 используем неравенство Гельдера, следствие 1.2.1 в случае $q = p'$ и обобщенное неравенство Харди:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{1-\beta}} \sum_{m=1}^{k} \frac{b_m}{m^\beta} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\|b\|_p, \quad \beta < \frac{1}{p'}.$$

$$I_1=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{k^\gamma}-\frac{1}{(k+1)^\gamma}\right|\sum_{m=1}^{k+1}m^{\alpha-1}|b_m|\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\leqslant\gamma\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{k+1}m^{\alpha-1}|b_m|\right)\times$$

$$\times\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\frac{1}{k^{\gamma+1}}=\gamma\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^\alpha}\sum_{m=1}^{k+1}\frac{|b_m|}{m^{1-\alpha}}\right)\left(k^{\alpha-\gamma-1}\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\gamma\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^\alpha}\sum_{m=1}^{k+1}\frac{|b_m|}{m^{1-\alpha}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^{\alpha-\gamma-1}\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant$$

$$\leqslant c\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,p'}}\tag{1.3}$$

Также оценивается I_2

$$I_2=\sum_{k=1}^{n-1}|b_{k+1}|\frac{(k+1)^{\alpha-1}}{k^\gamma}\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}|b_{k+1}|k^{\alpha-1-\gamma}\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\|b\|_{l_p}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^{\alpha-\gamma-1}\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant c\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,p'}}\tag{1.4}$$

Оценим I_3. Используем неравенство Гельдера, получим

$$I_3=\frac{1}{n^\gamma}\sum_{m=1}^{n}m^{\alpha-1}|b_m|\frac{1}{n^\gamma}\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\leqslant\|b\|_{l_p}\left(\sum_{m=1}^{n}m^{(\alpha-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{n^\gamma}\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\|b\|_{l_p}n^{\alpha-1+\frac{1}{p'}}n^{-\gamma}\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|.$$

Из следствия 1.2.1 в случае $q=\infty$ и учитывая, что пространство $L_{p,q}$ по второму параметру сужается, имеем

$$I_3\leqslant c\|b\|_{l_p}\sup_{n\in N}n^{\alpha-\gamma-\frac{1}{p}}\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}}\right|\leqslant c\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,\infty}}\leqslant c\|b\|_{l_p}\|f\|_{L_{p,p'}}\tag{1.5}$$

Объединяя оценки (1.3), (1.4), (1.5), и переходя к пределу получим следующее неравенство

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(m^{\alpha-\frac{1}{p}}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k^{\alpha}}\right|\right)^{p'}\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,p'}}.$$

То есть неравенство

$$\|a\|_{n_{p',p',\alpha}} \leqslant c\|f\|_{L_{p,p'}}.$$

Далее воспользуемся леммой 1.1.3 и интерполяционной теоремой Марцинкевича-Кальдерона [15], аналогично доказательству предыдущей теоремы, получим требуемое неравенство. □

В частном случае, при $q = p$, из доказанной теоремы следует

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(m^{\alpha p-2}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k^{\alpha}}\right|\right)^{p}\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\|f\|_{L_p}. \tag{1.6}$$

2 НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА-ПЭЛИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ УСРЕДНЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

2.1 Интерполяция анизотропных пространств $n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}$

Определим анизотропное пространство $n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}$.

Пусть $1 < \vec{p} < \infty$, $0 < \vec{q} \leqslant \infty$, где $\vec{p} = (p_1, ..., p_n)$, $\vec{q} = (q_1, ..., q_n)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\alpha_j > 0$, $j = 1, ..., n$.

Анизотропным дискретным пространством $n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}$ называется множество всех последовательностей $a = \{a_{k_1 \dots k_n}\}_{k_i \in N}$, $\quad i = 1, ..., n$, для которых конечна величина

$$\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\frac{1}{p_1}} ... k_n^{\frac{1}{p_n}} \widetilde{a}_{k_1 \dots k_n}(\vec{\alpha}) \right)^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}, \quad \text{если } \vec{q} < \infty,$$

и

$$\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{\infty},\vec{\alpha}}} = \sup_{k_i \in N, \ i=1,..,n} k_1^{\frac{1}{p_1}} ... k_n^{\frac{1}{p_n}} \widetilde{a}_{k_1 \dots k_n}(\vec{\alpha}) < \infty \ \text{ при } \vec{q} = (\infty, ..., \infty),$$

где

$$\widetilde{a}_{k_1 \dots k_n}(\vec{\alpha}) = \sup_{m_i \geqslant k_i, \ i=1,..,n} \frac{1}{m_1^{1-\alpha_1} ... m_n^{1-\alpha_n}} \left| \sum_{s_n=m_n}^{\infty} ... \sum_{s_1=m_1}^{\infty} \frac{a_{s_1 \dots s_n}}{s_1^{\alpha_1} ... s_n^{\alpha_n}} \right|.$$

Лемма 2.1.1. *Если* $1 < \vec{p} < \infty$ и $0 < \vec{q} \leqslant \infty$, *то имеет место вложение*

$$n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}} \hookrightarrow n_{\vec{p},\infty,\vec{\alpha}}$$

Доказательство. Используя для любого $i = 1, .., n$ асимптотическое равенство

$$k_i^{\frac{1}{p_i}} \sim \left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1} \right)^{\frac{1}{q_i}},$$

заметим

$$\prod_{i=1}^{n} k_i^{\frac{1}{p_i}} \leqslant c \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1} \right)^{\frac{1}{q_i}} =$$

$$= c\left(\sum_{m_n=1}^{k_n}\ldots\left(\sum_{m_1=1}^{k_1}\left(m_1^{\frac{1}{p_1}}\ldots m_n^{\frac{1}{p_n}}\right)^{q_1}\frac{1}{m_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\ldots\frac{1}{m_n}\right)^{\frac{1}{q_n}},$$

где константа c зависит только от $\vec{p}, \vec{q}, n$.

Поскольку при $m_i \leqslant k_i$ имеем $\widetilde{a}_{k_1\ldots k_n}(\vec{\alpha}) \leqslant \widetilde{a}_{m_1\ldots m_n}(\vec{\alpha})$, мы получаем, что

$$\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{\infty},\vec{\alpha}}} = \sup_{k_i\in N, i=1,..,n} k_1^{\frac{1}{p_1}}\ldots k_n^{\frac{1}{p_n}}\widetilde{a}_{k_1\ldots k_n}(\vec{\alpha}) \leqslant$$

$$\leqslant C\sup_{k_i\in N}\left(\sum_{m_n=1}^{k_n}\ldots\left(\sum_{m_1=1}^{k_1}\left(m_1^{\frac{1}{p_1}}\ldots m_n^{\frac{1}{p_n}}\widetilde{a}_{m_1\ldots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{q_1}\frac{1}{m_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\ldots\frac{1}{m_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.1.2. *Пусть* $1 < \vec{p} < \infty$ *и* $0 < \vec{q} \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}} \asymp \left(\sum_{k_n=0}^{\infty}\ldots\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\frac{k_1}{p_1}}\ldots 2^{\frac{k_n}{p_n}}\widetilde{a}_{2^{k_1}\ldots 2^{k_n}}(\vec{\alpha})\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\ldots\right)^{\frac{1}{q_n}},$$

т.е. имеют место двухсторонние оценки с константами зависящими только от параметров $\vec{p}, \vec{q}$.

Доказательство. Так как для $\forall i = 1, \ldots, n$ имеем

$$C2^{q_i\frac{k_i+1}{p_i}} \leqslant \sum_{m_i=2^{k_i}}^{2^{k_i+1}-1} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1} \leqslant C2^{\frac{q_i k_i}{p_i}}, \tag{2.1}$$

и поскольку при $k_i \leqslant m_i$ выполняется неравенство

$$\widetilde{a}_{m_1\ldots m_n}(\vec{\alpha}) \leqslant \widetilde{a}_{k_1\ldots k_n}(\vec{\alpha}), \tag{2.2}$$

мы получим, что

$$C2^{q_1\frac{k_1+1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1+1}m_2\ldots m_n}(\vec{\alpha}) \leqslant \sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\widetilde{a}^{q_1}_{m_1\ldots m_n}(\vec{\alpha}) \leqslant C2^{q_1\frac{k_1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1}m_2\ldots m_n}(\vec{\alpha}).$$

Просуммировав неравенства по k_1 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q_1}$, получим

$$C\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1+1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1+1}\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{1}{q_1}}\leqslant\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\widetilde{a}^{q_1}_{m_1\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1}\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Отсюда вновь использовав (2.1) и (2.2), получим

$$C2^{q_2\frac{k_2+1}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1+1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1+1}2^{k_2+1}\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m_2=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1}m_2^{\frac{q_2}{p_2}-1}\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\widetilde{a}^{q_1}_{m_1\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\leqslant$$

$$\leqslant C2^{q_2\frac{k_2}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1}2^{k_2}\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{q_2}{q_1}}.$$

Просуммировав неравенства по k_2 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q_2}$, получим

$$C\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{q_2\frac{k_2+1}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1+1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1+1}2^{k_2+1}\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{m_2=1}^{\infty}m_2^{\frac{q_2}{p_2}-1}\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\widetilde{a}^{q_1}_{m_1\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{q_2\frac{k_2}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1}{p_1}}\widetilde{a}^{q_1}_{2^{k_1}2^{k_2}\dots m_n}(\vec{\alpha})\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Таким образом продолжая процесс n-раз, получим требуемое неравенство. $\square$

Лемма 2.1.3. *Если* $1<\vec{p}(0)<\vec{p}(1)<\infty$ *и параметры* $0<\vec{q}\leqslant\infty$, $0<\vec{q}(i)\leqslant\infty$, *где* $i=0,1,$ $0<\vec{\theta}<1$, *то*

$$\left(n_{\vec{p}(0),\vec{q}(0),\vec{\alpha}},\;\; n_{\vec{p}(1),\vec{q}(1),\vec{\alpha}}\right)_{\vec{\theta},\vec{q}}\hookrightarrow n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}},$$

где $\frac{1}{\vec{p}}=\frac{1-\vec{\theta}}{\vec{p}(0)}+\frac{\vec{\theta}}{\vec{p}(1)}$.

Доказательство. В силу вложения

$$n_{\vec{p}(i),\vec{q}(i),\vec{\alpha}} \hookrightarrow n_{\vec{p}(i),\infty,\vec{\alpha}}, \ \ i=0,1$$

достаточно доказать, что

$$\left(n_{\vec{p}(0),\infty,\vec{\alpha}}, \quad n_{\vec{p}(1),\infty,\vec{\alpha}}\right)_{\vec{\theta},\vec{q}} \hookrightarrow n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}.$$

Пусть $\vec{v}=(v_1,...,v_n)$, где

$$v_i=t_i^{\gamma_i}, \ \gamma_i=\frac{p_i(0)p_i(1)}{p_i(1)-p_i(0)}, \ 0<t_i<\infty.$$

Пусть также $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n):\varepsilon_i=0$ или $\varepsilon_i=1,\ i=1,..,n\}$. Для последовательности $a=\{a_{k_1...k_n}\}_{k_i\in N,i=1,..,n}$ рассмотрим представление

$$a_{k_1...k_n}=\sum_{\varepsilon\in E}a^{\varepsilon}_{k_1...k_n},$$

где $a^{\varepsilon}_{k_1...k_n}$ является обозначением и последовательность

$$\{a^{\varepsilon}_{k_1...k_n}\}_{k_i\in N,i=1,..,n}$$

соответственно принадлежит пространству

$$n_{\vec{p}(\varepsilon),\infty,\vec{\alpha}}.$$

Учитывая, что при $i=1,..,n$ имеем

$$\widetilde{a}_{k_1...k_n}(\vec{\alpha})=\sup_{m_i\geqslant k_i}\frac{1}{m_1^{1-\alpha_1}...m_n^{1-\alpha_n}}\left|\sum_{s_n=m_n}^{\infty}...\sum_{s_1=m_1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{\varepsilon\in E}a^{\varepsilon}_{s_1...s_n}}{s_1^{\alpha_1}...s_n^{\alpha_n}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\varepsilon\in E}\sup_{m_i\geqslant k_i}\frac{1}{m_1^{1-\alpha_1}...m_n^{1-\alpha_n}}\left|\sum_{s_n=m_n}^{\infty}...\sum_{s_1=m_1}^{\infty}\frac{a^{\varepsilon}_{s_1...s_n}}{s_1^{\alpha_1}...s_n^{\alpha_n}}\right|=\sum_{\varepsilon\in E}\widetilde{a}^{\varepsilon}_{k_1...k_n}(\vec{\alpha}),$$

получим

$$\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}}\widetilde{a}_{\vec{s}}\leqslant\sum_{\varepsilon\in E}\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}}\widetilde{a}^{\varepsilon}_{\vec{s}}=\sum_{\varepsilon\in E}\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}-\frac{1}{\vec{p}(\varepsilon)}+\frac{1}{\vec{p}(\varepsilon)}}\widetilde{a}^{\varepsilon}_{\vec{s}}.$$

Так как для любых $i=1,..,n$, имеем

$$\frac{1}{p_i(0)}-\frac{1}{p_i(\varepsilon_i)}=\begin{cases}0, & \text{если } \varepsilon_i=0;\\ \frac{1}{\gamma_i}, & \text{если } \varepsilon_i=1.\end{cases}$$

и

$$\sup_{v_i \geqslant s_i \geqslant 1} s_i^{\frac{1}{p_i(0)} - \frac{1}{p_i(\varepsilon_i)}} = v_i^{\frac{1}{p_i(0)} - \frac{1}{p_i(\varepsilon_i)}} = t_i^{\varepsilon_i},$$

то

$$\sup_{\vec{v} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}} \leqslant \sum_{\varepsilon \in E} \vec{t}^{\vec{\varepsilon}} \sup_{\vec{s} \in N} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(\varepsilon)}} \widetilde{a}_{\vec{s}}^{\varepsilon}.$$

Учитывая произвольность представления $a_{k_1 \ldots k_n} = \sum\limits_{\varepsilon \in E} a_{k_1 \ldots k_n}^{\varepsilon}$, имеем

$$\sup_{\vec{v} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}} \leqslant K\left(\vec{t}, a; n_{\vec{p}(0),\infty,\vec{\alpha}}, n_{\vec{p}(1),\infty,\vec{\alpha}}\right).$$

Поэтому при $0 < \vec{q} \leqslant \infty$ будем иметь

$$\|a\|_{\left(n_{\vec{p}(0),\infty,\vec{\alpha}},\ n_{\vec{p}(1),\infty,\vec{\alpha}}\right)_{\vec{\theta},\vec{q}}} = \left(\int\limits_0^\infty \left(\vec{t}^{-\vec{\theta}} K\left(\vec{t}, \mathbf{a}; n_{\vec{p}(0),\infty,\vec{\alpha}}, n_{\vec{p}(1),\infty,\vec{\alpha}}\right)\right)^{\vec{q}} \frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_0^\infty \left(\vec{t}^{-\vec{\theta}} \sup_{\vec{v} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\vec{\alpha})\right)^{\vec{q}} \frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}.$$

Сделаем замену $\vec{t} = \vec{u}^{\frac{\vec{p}(1) - \vec{p}(0)}{\vec{p}(0)\vec{p}(1)}}$. Тогда так как $1 < \vec{p}(0) < \vec{p}(1)$, мы получаем, что

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\vec{t}^{-\vec{\theta}} \sup_{\vec{v} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\vec{\alpha})\right)^{\vec{q}} \frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}} =$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\vec{u}^{-\vec{\theta}\left(\frac{1}{\vec{p}(0)} - \frac{1}{\vec{p}(1)}\right)} \sup_{\vec{u} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\vec{\alpha})\right)^{\vec{q}} \frac{d\vec{u}}{\vec{u}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}} =$$

$$= \left(\sum_{\vec{r}=1}^\infty \int\limits_{2^{\vec{r}-1}-1}^{2^{\vec{r}}-1} \left(\vec{u}^{-\vec{\theta}\left(\frac{1}{\vec{p}(0)} - \frac{1}{\vec{p}(1)}\right)} \sup_{\vec{u} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\vec{\alpha})\right)^{\vec{q}} \frac{d\vec{u}}{\vec{u}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}} \geqslant$$

$$\geqslant C \left(\sum_{\vec{r}=1}^\infty \left(2^{-\vec{\theta}\vec{r}\left(\frac{1}{\vec{p}(0)} - \frac{1}{\vec{p}(1)}\right)} \sup_{2^{\vec{r}} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\vec{\alpha})\right)^{\vec{q}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}} \geqslant$$

$$\geqslant C \left(\sum_{\vec{r}=1}^\infty \left(2^{-\vec{\theta}\vec{r}\left(\frac{1}{\vec{p}(0)} - \frac{1}{\vec{p}(1)}\right)} 2^{\frac{\vec{r}}{\vec{p}(0)}} \widetilde{a}_{2^{\vec{r}}}(\vec{\alpha})\right)^{\vec{q}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}} = C\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}}.$$

Итак

$$\|a\|_{n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}} \leqslant C\|a\|_{\left(n_{\vec{p}(0),\infty,\vec{\alpha}},\ n_{\vec{p}(1),\infty,\vec{\alpha}}\right)_{\vec{\theta},\vec{q}}}.$$

Лемма доказана. □

2.2 Интерполяция анизотропного пространства $n_{\vec{p},\vec{q}}(\lambda)$

Пусть $1 \leqslant \vec{p} < \infty$, $0 < \vec{q} \leqslant \infty$, где $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$. Для последовательности $\lambda = \{\lambda_{k_1 \ldots k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n=1}^{\infty}$ такая, что для любого

$$k_1, \ldots, k_n \in \mathtt{N} : \sum_{m_n=1}^{k_n} \ldots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \ldots m_n} \neq 0,$$

определим анизотропное дискретное пространство $n_{\vec{p}\vec{q}}(\lambda)$ множество всех последовательностей $\alpha = \{\alpha_{k_1 \ldots k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n=1}^{\infty}$ для которых конечна величина

$$\|\alpha\|_{n_{\vec{p}\vec{q}}(\lambda)} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \ldots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\frac{1}{p_1}} \ldots k_n^{\frac{1}{p_n}} \bar{a}_{k_1 \ldots k_n}(\lambda)\right)^{q_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \ldots \frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

При $\vec{q} = (\infty, \ldots, \infty)$

$$\|\alpha\|_{n_{\vec{p}\vec{\infty}}(\lambda)} = \sup_{k_i \in \mathtt{N}, i=1,\ldots,n} k_1^{\frac{1}{p_1}} \ldots k_n^{\frac{1}{p_n}} \bar{a}_{k_1 \ldots k_n}(\lambda) < \infty,$$

где

$$\bar{a}_{k_1 \ldots k_n}(\lambda) = \sup_{m_i \geqslant k_i, i=1,\ldots,n} \frac{1}{\left|\sum\limits_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum\limits_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n}\right|} \left|\sum_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n} \alpha_{s_1 \ldots s_n}\right|,$$

$k_1, \ldots, k_n \in \mathtt{N}$.

Лемма 2.2.1. *Если* $1 \leqslant \vec{p} < \infty$, $0 < \vec{q} \leqslant \infty$, *то*

$$n_{\vec{p}\vec{q}}(\lambda) \hookrightarrow n_{\vec{p}\vec{\infty}}(\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим $k_1^{\frac{1}{p_1}} \ldots k_n^{\frac{1}{p_n}}$. Используя для любого $i = 1, \ldots, n$ асимптотическое равенство

$$k_i^{\frac{1}{p_i}} \sim \left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1}\right)^{q_i},$$

получим

$$\prod_{i=1}^{n} k_i^{\frac{1}{p_i}} \sim \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_1^{\frac{q_i}{p_i}-1} \right)^{q_i} =$$

$$= \left(\sum_{m_n=1}^{k_n} \cdots \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \left(m_1^{\frac{1}{p_1}} \dots m_n^{\frac{1}{p_n}} \right)^{q_i} \frac{1}{m_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \cdots \frac{1}{m_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Поскольку при $m_i \leqslant k_i$ имеем $\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) \leqslant \bar{a}_{m_1 \dots m_n}(\lambda)$,,мы получаем что

$$\|\alpha\|_{n_{\vec{p}\vec{\infty}}(\lambda)} = \sup_{k_i \in \mathtt{N}, i=1,\dots,n} k_1^{\frac{1}{p_1}} \dots k_n^{\frac{1}{p_n}} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{k_i \in \mathbf{N}} \left(\sum_{m_n=1}^{k_n} \cdots \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \left(m_1^{\frac{1}{p_1}} \dots m_n^{\frac{1}{p_n}} \bar{a}_{m_1 \dots m_n}(\lambda) \right)^{q_1} \frac{1}{m_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \cdots \frac{1}{m_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant C \|\alpha\|_{n_{pq}(\lambda)}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2.2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, *тогда*

$$\|a\|_{n_{pq}\lambda} \sim \left(\sum_{m_n=0}^{\infty} \cdots \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \left(2^{\frac{k_1}{p_1}} \cdots 2^{\frac{k_n}{p_n}} \bar{a}_{2^{k_1} \dots 2^{k_n}}(\lambda) \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \cdots \right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Доказательство. Так как для любого $i = 1, \dots, n$ имеем

$$C 2^{\frac{q_i(k_i+1)}{p_i}} \leqslant \sum_{m_i=2^{k_i}}^{2^{k_i+1}-1} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1} \leqslant C 2^{q_i \frac{k_i}{p_i}}, \tag{2.3}$$

и поскольку при $k_i \leqslant m_i$ выполняется неравенство

$$\bar{a}_{m_1 \dots m_n}(\lambda) \leqslant \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) \tag{2.4}$$

мы получим, что

$$C 2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}} \bar{a}^{q_1}_{2^{k_1+1} m_2 \dots m_n}(\lambda) \leqslant \sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} \bar{a}^{q_1}_{m_1 \dots m_n}(\lambda) \leqslant C 2^{q_1 \frac{k_1}{p_1}} \bar{a}^{q_1}_{2^{k_1} m_2 \dots m_n}(\lambda).$$

Просуммировав неравенства по k_1 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q_1}$, получим

$$C\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}}\bar{a}^{q_1}_{2^{k_1+1}m_2\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{1}{q_1}}\leqslant\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\bar{a}^{q_1}_{m_1\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{1}{q_1}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q_1\frac{k_1}{p_1}}\bar{a}^{q_1}_{2^{k_1}m_2\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Отсюда вновь использовав (2.3) и (2.4), получим

$$C2^{\frac{q_2(k_2+1)}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}}\bar{a}^{q_1}_{2^{k_1+1}2^{k_1+1}m_3\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m_2=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1}m_2^{\frac{q_2}{p_2}-1}\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\bar{a}^{-q_1}_{m_1\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\leqslant$$

$$\leqslant C2^{\frac{q_2k_2}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{\frac{q_1k_1}{p_1}}\bar{a}^{-q_1}_{2^{k_1}2^{k_2}m_3\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}.$$

Суммируя неравенства по k_2 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q_2}$, получим

$$C\cdot\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{\frac{q_2(k_2+1)}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}}\bar{a}^{-q_1}_{2^{k_1}2^{k_2}m_3\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{m_2=1}^{\infty}m_2^{\frac{q_2}{p_2}-1}\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}\bar{a}^{-q_1}_{m_1\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{\frac{q_2k_2}{p_2}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{\frac{q_1k_1}{p_1}}\bar{a}^{-q_1}_{2^{k_1+1}2^{k_1+1}m_3\ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

Таким образом, продолжая процесс $n-$раз, получим требуемое неравенство. Лемма доказана. □

Теорема 2.2.1. *Если* $1<\vec{p^0}<\vec{p^1}<\infty$ *и параметры* $0<\vec{q}\leqslant\infty, 0<\vec{q^i}\leqslant\infty$, *где* $i=0,1,$ $0<\vec{\theta}<1$, *то*

$$(\eta_{\vec{\rho^0},\vec{q^0}}(\lambda),\eta_{\vec{\rho^1},\vec{q^1}}(\lambda))_{\vec{\theta},\vec{q}}\hookrightarrow\eta_{\vec{\rho},\vec{q}}(\lambda),$$

где $\frac{1}{\vec{\rho}}=\frac{1-\vec{\theta}}{\vec{\rho^0}}+\frac{\vec{\theta}}{\vec{\rho^1}}$.

Доказательство. В силу вложения из леммы 2.2.1

$$\eta_{\vec{\rho^i},\vec{q^i}}(\lambda) \hookrightarrow \eta_{\vec{\rho^i},\vec{\infty}}(\lambda), i = 0, 1$$

достаточно доказать, что

$$(\eta_{\vec{\rho^0},\vec{\infty}}(\lambda), \eta_{\vec{\rho^1},\vec{\infty}}(\lambda))_{\vec{\theta},\vec{q}} \hookrightarrow \eta_{\vec{\rho},\vec{q}}(\lambda).$$

Пусть $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, ..., \vartheta_n)$, где $\upsilon_i = t_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i = \frac{{\rho_i}^0 {\rho_i}^1}{{\rho_i}^1 - {\rho_i}^0}$, $0 < t_i < \infty$.
$E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1, i = 1, ..., n\}$. Для последовательности $a = \{a_{k_1 \cdots k_n}\}_{k_i \in N, i=1,...,n}$ рассмотрим представление

$$a_{k_1 \cdots k_n} = \sum_{\varepsilon \in E} a^{\varepsilon}{}_{k_1 \cdots k_n}, a^{\varepsilon}{}_{k_1 \cdots k_n} \in \eta_{\vec{\rho^\varepsilon},\vec{\infty}}.$$

Учитывая свойство при $i = 1, ..., n$

$$\bar{a}_{k_1 \ldots k_n} = \left(\overline{\sum_{\varepsilon \in E} a^{\varepsilon}{}_{k_1 \cdots k_n}}\right)(\lambda)$$

$$\sup_{m_i \geqslant k_i} \frac{1}{|\sum\limits_{s_n=1}^{m_n} \cdots \sum\limits_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \cdots s_n}|} \left| \sum_{s_n=1}^{m_n} \cdots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \cdots s_n} \sum_{\varepsilon \in E} a^{\varepsilon}{}_{s_1 \cdots s_n} \right|$$

$$\leqslant \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{m_i \geqslant k_i} \frac{1}{|\sum\limits_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum\limits_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_s} \ldots s_n|} \left| \sum_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n} a^{\varepsilon}_{s_1 \ldots s_n} \right|$$

получим

$$\sup_{\vec{\upsilon} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho^0}}} \bar{a}_{\vec{s}}(\lambda) \leqslant \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{\vec{\upsilon} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho^0}}} \bar{a}^{\varepsilon}_{\vec{s}}(\lambda) = \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{\vec{\upsilon} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho^0}} - \frac{1}{\vec{\rho^\varepsilon}} + \frac{1}{\vec{\rho^\varepsilon}}} \bar{a}^{\varepsilon}_{\vec{s}}(\lambda).$$

Так как для любых $i = 1, .., n$, имеем

$$\frac{1}{\rho_i^0} - \frac{1}{\rho_i^{\varepsilon_i}} = \begin{cases} 0, \text{ если } \varepsilon_i = 0; \\ \dfrac{1}{\gamma_i}, \text{ если } \varepsilon_i = 1;. \end{cases}$$

и

$$\sup_{\upsilon_i \geqslant s_i \geqslant 1} s_i^{\frac{1}{\rho_i^0} - \frac{1}{\rho_i^{\varepsilon_i}}} = \upsilon_i^{\frac{1}{\rho_i^0} - \frac{1}{\rho_i^{\varepsilon_i}}} = t_i^{\varepsilon_i}$$

тогда получим

$$\sup_{\vec{\upsilon} \geqslant \vec{s} \geqslant 1} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho^0}}} \bar{a}_{\vec{s}}(\lambda) \leqslant \sum_{\varepsilon \in E} \vec{t}^{\vec{\varepsilon}} \sup_{\vec{s} \in N} \vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho^\varepsilon}}} \bar{a}^{\varepsilon}_{\vec{s}}(\lambda)$$

Учитывая произвольность представления $a_{k_1\ldots k_n}=\sum_{\varepsilon\in E} a^{\varepsilon}_{k_1\ldots k_n}$ имеем

$$\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}\bar{a}_{\vec{s}}(\lambda)\leqslant K\Big(\vec{t},a;n_{\vec{\rho}^0\infty}(\lambda),n_{\vec{\rho}^1\infty}(\lambda)\Big)$$

Поэтому при $0<\vec{q}\leqslant\infty$ будем иметь

$$\|a\|_{\left(n_{\vec{\rho}^0,\infty}(\lambda),n_{\vec{\rho}^1,\infty}(\lambda)\right)_{\vec{\theta},\vec{q}}}=\left(\int_0^\infty\left(\vec{t}^{-\vec{\theta}}K\Big(\vec{t},a;n_{\vec{\rho}^0\infty}(\lambda),n_{\vec{\rho}^1\infty}(\lambda)\Big)\right)^{\vec{q}}\frac{dt}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\int_0^\infty\left(\vec{t}^{-\vec{\theta}}\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}\bar{a}_{\vec{s}}(\lambda)\right)^{\vec{q}}\frac{dt}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}.$$

Сделаем замену $\vec{t}=\vec{u}^{\frac{\vec{\rho}^1-\vec{\rho}^0}{\vec{\rho}^0\vec{\rho}^1}}$ и используем лемму 2.2.2. Так как $1<\vec{\rho}^0<\vec{\rho}^1$, то

$$\left(\int\limits_0^\infty\left(\vec{t}^{-\vec{\theta}}\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}\bar{a}_{\vec{s}}(\lambda)\right)^{\vec{q}}\frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}=$$

$$=\left(\int_0^\infty\left(\vec{u}^{-\vec{\theta}\left(\frac{1}{\vec{\rho}^0}-\frac{1}{\vec{\rho}^1}\right)}\sup_{\vec{v}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}\bar{a}_{\vec{s}}(\lambda)\right)^{\vec{q}}\frac{d\vec{u}}{\vec{u}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}=$$

$$\left(\sum_{\vec{r}=1}^{\infty}\int\limits_{2^{\vec{r}-1}-1}^{2^{\vec{r}-1}}\left(\vec{u}^{-\theta(\frac{1}{\vec{\rho}^0}-\frac{1}{\vec{\rho}^1})}\sup_{\vec{u}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}\bar{a}_{\vec{s}}(\lambda)\right)^{\vec{q}}\frac{d\vec{u}}{\vec{u}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}$$

$$\geqslant C\left(\sum_{\vec{r}=1}^{\infty}\left(2^{-\theta\vec{r}(\frac{1}{\vec{\rho}^0}-\frac{1}{\vec{\rho}^1})}\sup_{2^{\vec{r}}\geqslant\vec{s}\geqslant 1}\vec{s}^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}\bar{a}_{\vec{s}}(\lambda)\right)^{\vec{q}}\right)^{\frac{1}{\vec{q}}}$$

$$\geqslant C\left(\sum_{\vec{r}=1}^{\infty}\left(2^{-\theta\vec{r}(\frac{1}{\vec{\rho}^0}-\frac{1}{\vec{\rho}^1})}2^{\frac{1}{\vec{\rho}^0}}a_{2^r}(\lambda)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|a\|_{n_{p,q}(\lambda)}$$

итак, получили

$$\|a\|_{n_{p,q}(\lambda)}\leqslant C\|a\|_{\left(n_{p^0,\infty}(\lambda),\ n_{p^1,\infty}(\lambda)\right)_{\vec{\theta},\vec{q}}}.$$

Теорема доказана. □

2.3 Суммируемость усреднений типа Беллмана коэффициентов кратных рядов Фурье

Данный пункт посвящен получению аналога неравенства (1.2) для средних Беллмана коэффициентов Фурье функций многих переменных.

Теорема 2.3.1. *Пусть параметры* $1 < \vec{p} < \infty,\ 0 < \vec{q} \leqslant \infty$, *число* $\vec{\alpha} > \frac{1}{\vec{p}}$, где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. *Пусть* 1*-периодическая по каждой переменной функция* $f(x_1, ..., x_n)$ *имеет ряд Фурье по тригонометрической системе вида*

$$\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1...k_n} e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_nx_n)},$$

где коэффициенты

$$a_{k_1...k_n} = \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 f(x_1, ..., x_n)e^{-2\pi i(k_1x_1+...+k_nx_n)}dx_1...dx_n.$$

Тогда, если $f(x_1, ..., x_n) \in L_{\vec{p}\vec{q}}[0; 1]^n$, *то справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} ... \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\alpha_1-\frac{1}{p_1}} \left|\sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1...m_n}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}}\right|\right)^{q_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant c\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0,1]^n}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Оценим величину

$$A = \sup_{k_1,...,k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} k_j^{\alpha_j-\frac{1}{p_j}} \left|\sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1...m_n}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}}\right|.$$

Подставляя значение коэффициента Фурье и поменяв местами интегралы и суммы, получим

$$A = \sup_{k_1,...,k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} k_j^{\alpha_j-\frac{1}{p_j}} \left|\int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 f(x_1, ..., x_n)\Phi_{k_1...k_n}(\vec{x})dx_1...dx_n\right|,$$

где

$$\Phi_{k_1...k_n}(\vec{x}) = \sum_{m_n=k_n}^{\infty} ... \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(m_1x_1+...+m_nx_n)}}{m_1^{\alpha_1}...m_n^{\alpha_n}} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{m_j=k_j}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m_j x_j}}{m_j^{\alpha_j}} = \prod_{j=1}^{n} \Phi_{k_j}(x_j).$$

Используя неравенство Гельдера с $\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p'_j}=1$, где $j=1,...,n$, для пространства Лоренца, будем иметь

$$A\leqslant \sup_{k_1,\dots,k_n\in N}\prod_{j=1}^{n}k_j^{\alpha_j-\frac{1}{p_j}}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\|f(\cdot,x_2,...,x_n)\|_{L_{p_1,1}}\|\Phi_{k_1}\|_{L_{p'_1,\infty}}\times$$

$$\times\prod_{j=2}^{n}\Phi_{k_j}(x_j)dx_2...dx_n\leqslant$$

$$\leqslant\ldots\leqslant\left(\sup_{k_1,\dots,k_n\in N}\prod_{j=1}^{n}k_j^{\alpha_j-\frac{1}{p_j}}\|\Phi_{k_j}\|_{L_{p'_j,\infty}}\right)\|\ldots\|f\|_{L_{p_1,1}}\ldots\|_{L_{p_n,1}} \tag{2.6}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_{k_j}(x_j)=\sum_{m_j=k_j}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i m_j x_j}}{m_j^{\alpha_j}}.$$

Коэффициенты Фурье этой функции при $m_j\geqslant k_j$ монотонно убывают. Мы воспользуемся формулой (7). Тогда получим

$$\|\Phi_{k_j}\|_{L_{p'_j,\infty}}\asymp\left\|\frac{1}{m_j^{\alpha_j}}\right\|_{l_{p_j\infty}}=\sup_{1\leqslant r_j\leqslant\infty}r_j^{\frac{1}{p_j}}\frac{1}{(k_j+r_j)^{\alpha_j}}$$

Докажем, что

$$B=\prod_{j=1}^{n}k_j^{\alpha_j-\frac{1}{p_j}}\sup_{1\leqslant r_j\leqslant\infty}r_j^{\frac{1}{p_j}}\frac{1}{(k_j+r_j)^{\alpha_j}}<\infty.$$

Исследуем на максимум функцию $g(x)=\frac{x^{\frac{1}{p}}}{(k+x)^{\alpha}}$. Ее максимум достигается в точке $x=\frac{k}{\alpha p-1}$, так как $\alpha>\frac{1}{p}$, то $x>0$. Тогда

$$B=\prod_{j=1}^{n}k_j^{\alpha_j-\frac{1}{p_j}}\left(\frac{k_j}{\alpha_j p_j-1}\right)^{\frac{1}{p_j}}\frac{1}{\left(k_j+\frac{k_j}{\alpha_j p_j-1}\right)^{\alpha_j}}=$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_j p_j-1}\right)^{\frac{1}{p_j}}\frac{(\alpha_j p_j-1)^{\alpha_j}}{(\alpha_j p_j)^{\alpha_j}}=c(\vec{\alpha},\vec{p})=C.$$

Итак, при $\alpha>\frac{1}{p}$ максимум функции $g(x)=\frac{x^{\frac{1}{p}}}{(k+x)^{\alpha}}$ конечен и достигается в точке $x=\frac{k}{\alpha p-1}$. Тогда подставляя в (2.6), получим $A\leqslant C\|f\|_{(L_{p_1,1},...,L_{p_n,1})}$, следовательно

$$\|a\|_{n_{\vec{p}',\infty,\vec{\alpha}}} \leqslant C\|f\|_{\left(L_{p_1,1},\dots,L_{p_n,1}\right)}.$$

Используя лемму 2.1.3 и интерполяционную теорему из [20] (теорема 2) получим требуемое неравенство. Теорема доказана. □

Замечание. В одномерном случае $\alpha = 1$ и $1 < p < 2$ неравенство (2.5) может быть получено из неравенства Харди-Литтлвуда-Стейна и неравенства Харди ([9], стр. 288).

2.4 Суммируемость усреднений типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье

В этом разделе рассматривается неравенство типа Харди-Литтлвуда-Пэли для в некотором смысле обобщенного усреднения Харди коэффициентов кратных рядов Фурье.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $1 < \vec{p} < \infty$, $0 < \vec{q} \leqslant \infty$, $\vec{p}' = \frac{\vec{p}}{\vec{p}-1}$. *Пусть последовательность*

$$\lambda = \{\lambda_{k_1,k_2\dots k_n}\}_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{\infty} = \{\lambda_{k_1}^1 \lambda_{k_2}^2 \dots \lambda_{k_n}^n\}_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{\infty}$$

удовлетворяет условию

$$\prod_{j=1}^{n} \sup_{1\leqslant m_j\leqslant k_j} {m_j}^{2-\alpha_j} |\lambda_{m_j}^j - \lambda_{m_j+1}^j| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{D_j}{{k_j}^{\alpha_j}} \left| \sum_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^j \right|,$$

число $\vec{\alpha} > \frac{1}{\vec{p}'}$, *где* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D_j*-некоторая константа не зависящая от индекса* k_j*.Если* $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{\vec{p}\vec{q}}[0;1]^n$. *Тогда при* $0 < \vec{q} < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{\frac{q_n}{p_n}'} \dots \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} {k_2}^{\frac{q_2}{p_2}'} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left({k_1}^{1/{p_1}'} \bar{a}_{k_1\dots k_n}(\lambda) \right)^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{k_2} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}[0;1]^n},$$

где

$$\bar{a}_{k_1\dots k_n}(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum\limits_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum\limits_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1\dots m_n} \right|} \left| \sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1\dots m_n} a_{m_1\dots m_n} \right|, \; k_1, \dots, k_n \in N.$$

При $\vec{q}=(\infty,...,\infty)$

$$\sup_{k_1,...,k_n\in N} k_1^{\frac{1}{p_1'}}...k_n^{\frac{1}{p_n'}}\bar{a}_{k_1,...,k_n}(\lambda)\leqslant C\|f\|_{L_{p',\infty}[0;1]^n}.$$

Доказательство. Оценим величину

$$A=\sup_{k_1,...,k_n\in N}\frac{k_1^{\frac{1}{p_1'}}...k_n^{\frac{1}{p_n'}}}{\left|\sum\limits_{m_n=1}^{k_n}...\sum\limits_{m_1=1}^{k_1}\lambda_{m_1...m_n}\right|}\left|\sum_{m_n=1}^{k_n}...\sum_{m_1=1}^{k_1}\lambda_{m_1...m_n}a_{m_1...m_n}\right|=$$

$$=\sup_{k_1,...,k_n\in N}\prod_{j=1}^{n}\frac{k_j^{1/p_j'}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j}\lambda_{m_j}^j\right|}\left|\sum_{m_n=1}^{k_n}...\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m_1=1}^{k_1}\lambda_{m_1}^1...\lambda_{m_n}^n\int\limits_0^1...\int\limits_0^1 f(x_1,...,x_n)e^{-2\pi i(m_1x_1+...+m_nx_n)}dx_1...dx_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{k_1,...,k_n\in N}\int\limits_0^1...\int\limits_0^1|f(x_1,...,x_n)|\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{k_j^{1/p_j'}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j}\lambda_{m_j}^j\right|}\sum_{m_j=1}^{k_j}\lambda_{m_j}^je^{-2\pi i m_jx_j}\right|dx_1...dx_n.$$

Положим

$$\Phi_{k_1...k_n}(x_1,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{k_j^{1/p_j'}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j}\lambda_{m_j}^j\right|}\sum_{m_j=1}^{k_j}\lambda_{m_j}^je^{-2\pi i m_jx_j}.$$

Используя неравенство Гельдера с $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i'}=1$, где $i=1,...,n$, для пространства Лоренца, будем иметь

$$A\leqslant\sup_{k_1,...,k_n\in N}\|f\|_{L_{p',1}[0;1]^n}\|\Phi_{k_1,...,k_n}\|_{L_{p',\infty}[0;1]^n}.\tag{2.1}$$

Рассмотрим норму $\|\Phi_{k_1,...,k_n}\|_{L_{p',\infty}[0;1]^n}$, она равняется произведению норм, каждая из них является одномерной по каждой координате, т.е.

$$\|\Phi_{k_1,...,k_n}\|_{L_{p',\infty}[0;1]^n} = \prod_{j=1}^{n} \|\Phi_{k_j}\|_{L_{p'_j,\infty}[0;1]},$$

где

$$\Phi_{k_j} = \sum_{m_j=1}^{k_j} \frac{k_j^{1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda^j_{m_j}\right|} \lambda^j_{m_j} e^{-2\pi i m_j x_j}.$$

Коэффициенты Фурье функции Φ_{k_j} равны

$$b_{m_j}(\Phi_{k_j}) = \frac{k_j^{1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda^j_{m_j}\right|} \lambda^j_{m_j},$$

если $m_j \leqslant k_j$, для всех $j = 1, ..., n$.

$$b_{m_j}(\Phi_{k_j}) = 0,$$

если $m_j > k_j$, для всех $j = 1, ..., n$.

По лемме 1.2.1 получим

$$\prod_{j=1}^{n} \|\Phi_{k_j}\|_{L_{p'j,\infty}[0,1]} \leqslant \prod_{j=1}^{n} c_j \sup_{m_j \in N} {m_j}^{1/p} |m_j \Delta b_{m_j}|.$$

Оценим ${m_j}^{1/p}|m_j\Delta b_{m_j}|$. Пусть $m_j \leqslant k_j$, $\forall j = 1, ..., n$. Тогда имеем

$${m_j}^{1/p}|m_j \Delta b_{m_j}| = \frac{{k_j}^{1/p'_j} {m_j}^{1/p_j+1} |\lambda^j_{m_j} - \lambda^j_{m_j+1}|}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda^j_{m_j}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{{k_j}^{1/p'_j} {m_j}^{\alpha_j - 1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda^j_{m_j}\right|} \sup_{1 \leqslant m_j \leqslant k_j} {m_j}^{2-\alpha_j} |\lambda^j_{m_j} - \lambda^j_{m_j+1}|.$$

При $m_j > k_j$, $\forall j = 1, ..., n$. ${m_j}^{1/p}|m_j\Delta b_{m_j}| = 0$. Таким образом используя условию теоремы, имеем

$$\prod_{j=1}^{n} \|\Phi_{k_j}\|_{L_{p'j,\infty}[0,1]} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} c_j D_j \left(\frac{m_j}{k_j}\right)^{\alpha_j - 1/p'_j} \leqslant \prod_{j=1}^{n} C_j.$$

Вернемся к (2.1), получим

$$A \leqslant \prod_{j=1}^{n} C_j \|f\|_{L_{\vec{p},1}[0,1]^n} = C\|f\|_{L_{\vec{p},1}[0,1]^n}.$$

Тогда верно

$$\|a\|_{n_{p',\infty}(\lambda)} \leqslant C\|f\|_{L_{\vec{p},1}[0,1]^n}.$$

Используя лемму 1.1.6 и интерполяционную теорему 2 [45] получим требуемое неравенство. Теорема доказана. □

3 ТЕОРЕМЫ ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА

3.1 Теоремы типа Харди-Литтлвуда

В этом разделе мы рассматриваем утверждения типа (A-B). Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3.1.1. *Если* $b_k \geqslant 0$ *для любого* $k \in N$, *то для любых* α *и* $d > 1$ *верно*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} b_{[\frac{k}{d}]+1} \leqslant d^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} b_k.$$

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} b_{[\frac{k}{d}]+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{[\frac{k}{d}]=m} k^{\alpha} b_{[\frac{k}{d}]+1} = d^{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{[\frac{k}{d}]=m} \left(\frac{k}{d}\right)^{\alpha} b_{[\frac{k}{d}]+1} =$$

$$= d^{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m+1} \sum_{[\frac{k}{d}]=m} \left(\frac{k}{d}\right)^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant d^{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^{\alpha} b_{m+1} \sum_{[\frac{k}{d}]=m} 1 = d^{\alpha+1} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^{\alpha} b_{m+1} \leqslant d^{\alpha+1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} b_m.$$

□

Теорема 3.1.1. *Пусть* $1 < \frac{1}{\alpha} < p < \infty$ и $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) e^{2\pi i k x}$. *Если выполнено условие*

$$|a_k| \leqslant C k^{\alpha-1} \left| \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}} \right|, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

и $f \in L_p[0,1]$, *то*

$$J_p(a(f)) \leqslant C(p,\alpha) \|f\|_p.$$

Доказательство. Если $f \in L_p[0;1]$, то из неравенства (1.6) получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha p-2} b_{[\frac{k}{d}]}^{p} \right)^{1/p} \leqslant C \|f\|_p, \tag{3.2}$$

где $b_{[\frac{k}{d}]} = \left| \sum\limits_{m=[\frac{k}{d}]}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}} \right|$.

Оценим сумму сверху $\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p\right)^{1/p}$ используя условие теоремы, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p\right)^{1/p} \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha p-2} b^p_{[\frac{k}{d}]+1}\right)^{1/p}.$$

Теперь воспользуемся леммой 3.1.1 тогда

$$C\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha p-2} b^p_{[\frac{k}{d}]+1}\right)^{1/p} \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha p-2} b^p_k\right)^{1/p} \leqslant C(p)\|f\|_p.$$

Итак, получили требуемое неравенство. Теорема доказана. □

Замечание 3.1.1. *Если* $\max(\frac{1}{\alpha}, 2) < p$, *то верно утверждение второго пункта теоремы A, поэтому при условиях теоремы имеем теорему B, то есть необходимое и достаточное условие принадлежности функции в пространству* L_p.

Замечание 3.1.2. *Условие (3.1) при* $0 < \alpha < 1$ *более слабое чем (5), (6). Действительно, пусть выполнены (5) и (6), тогда*

$$|a_k| \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} |\Delta a_m| = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=2^s k}^{2^{s+1}k-1} |\Delta a_m| \leqslant C\sum_{s=0}^{\infty} (2^s k)^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{2^s k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} =$$

$$= Ck^{\alpha-1}\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s(\alpha-1)} \sum_{m=[\frac{2^s k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \leqslant Ck^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} 2^{s(\alpha-1)} =$$

$$= C_1 k^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha}.$$

То есть следует условие теоремы 3.1.1, это значит условие теоремы ослаблено.

Возникает вопрос верно ли утверждение теоремы при $p < \frac{1}{\alpha}$. Ответом является следующая теорема.

Теорема 3.1.2. a) *Если* $2 < p < 1/\alpha$, *тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется функция* f, *такая, что*

$$|a_k| \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \left|\sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha}\right|, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

и $\|f\|_{L_p} < \delta$, *но* $J_p(a(f)) \geqslant 1$.

b) *Если* $1 < p < \min(1/\alpha, 2)$, *то существует тригонометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$ *такой, что*

$$|a_k| \leqslant \frac{C}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{a_m}{m^\alpha}$$

при $k = 1, 2, ...$ *и* $J_p(a(f)) < \infty$, *но данный ряд не является рядом Фурье никакой интегрируемой функции.*

Доказательство. Докажем пункт a. Пусть f_0 функция, построенная в ([22], теорема 32.1, стр. 156), т.е.

$$f_0 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_0(k) e^{2\pi i k x},$$

где $\hat{f}_0(k) = \nu_k 2^{-m/2} m^{-2}$ при $2^{m-1} \leqslant k < 2^m$, $m \in \mathtt{N}$, а $\{\nu_k\}$ – последовательность Рудина-Шапиро ([22], стр. 155). Т.е. $\nu_k = \pm 1$ при всех k и

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \nu_k e^{2\pi i k t} \right| < 5\sqrt{N}$$

при $t \in [0; 1]$ и $N = 1, 2, ...$ Данная функция непрерывная, и, следовательно, $\|f_0\|_{L_p} < \infty$, но

$$J_p(\hat{f}_0) = +\infty.$$

Пусть $\delta > 0$. Тогда найдется n такое, что для частичной суммы $S_n(f_0, x)$ имеем

$$J_p(S_n(f_0)) > \frac{2C(p)\|f_0\|_{L_p}}{\delta},$$

где $C(p)$ постоянная в неравенстве М.Рисса $\|S_n(f)\|_p \leqslant C(p)\|f\|_p$.

Пусть

$$g_n(x) = \frac{S_n(f_0)(x)}{J_p(S_n(f_0))}.$$

Тогда

$$\|g_n\|_{L_p} = \frac{\|S_n(f_0)\|_{L_p}}{J_p(S_n(f_0))} \leqslant \frac{C(p)\|f_0\|_{L_p}}{J_p(S_n(f_0))} < \frac{\delta}{2}.$$

Фиксируем это n.

Пусть $l \in \mathbb{N}$,

$$f_{l,\mu}(x) = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\mu_k}{k^{1-\alpha}} e^{2\pi i k x}, \qquad \mu_k \in [0, 1].$$

При этом из неравенства Хаусдорфа-Юнга следует

$$\|f_{l,\mu}\|_{L_p} \leqslant C(p) \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{k^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} < \infty.$$

Следовательно, $\|f_{l,\mu}\|_{L_p} \longrightarrow 0, \quad l \to \infty$, причем равномерно относительно $\mu = \{\mu_k\}$.

Тогда найдется $l > dn$, такое что

$$\|f_{l,\mu}\|_{L_p} < \frac{\delta}{2}.$$

Выберем $N > l$ так, чтобы

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=l}^{N} \frac{1}{k} \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(|\hat{g}_n(j)| + j^{\alpha-1} \left| \sum_{m=[\frac{j}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| \right). \tag{3.4}$$

Положим $\mu_k = 1$ при $l \leqslant k \leqslant N$. Затем, если $2^{r-1} \cdot N < k \leqslant 2^r \cdot N$, $r \geqslant 1$, то положим $\mu_k = 2^{-r}$. Полученную функцию $f_{l\mu}$ обозначим f_1.

Пусть

$$f = g_n + f_1.$$

Прежде всего проверим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(m)|}{m^\alpha} = C + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(m)|}{m^\alpha} = C + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2^{k-1}N+1}^{2^k N} \frac{2^{-k}}{m} \leqslant C + C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Заметим, что из (3.4) вытекает, что условие (3.3) выполнено при $1 \leqslant k \leqslant n$. Действительно,

$$|\hat{f}(k)| = |\hat{g}_n(k)| = |\hat{g}_n(k)| + \left| k^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| - \left| k^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{m=l}^{N} \frac{1}{m} - k^{\alpha-1} \left| \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{k^{1-\alpha}} \left| \sum_{m=l}^{N} \frac{\hat{f}_1(m)}{m^\alpha} \right| - k^{\alpha-1} \left| \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^{1-\alpha}} \left| \sum_{m=l}^{\infty} \frac{\hat{f}_1(m)}{m^\alpha} \right| - k^{\alpha-1} \left| \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^{1-\alpha}} \left| \sum_{m=l}^{\infty} \frac{\hat{f}_1(m)}{m^\alpha} + \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{n} \frac{\hat{g}_n(m)}{m^\alpha} \right| = \frac{1}{k^{1-\alpha}} \left| \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{\hat{f}(m)}{m^\alpha} \right|.$$

При $n < k < l$ коэффициенты Фурье функции f равны 0 и, следовательно, для них также имеет место условие (3.3). Если $l \leqslant k \leqslant N$, то имеем

$$|\hat{f}(k)| = k^{\alpha-1} \leqslant \frac{2}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{1}{m} \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{\mu_m}{m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{\hat{f}(m)}{m^\alpha} \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\hat{f}(m)}{m^\alpha} \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{\hat{f}(m)}{m^\alpha}.$$

Аналогично, если $2^{r-1} \cdot N < k \leqslant 2^r \cdot N$, $r \geqslant 1$, то

$$|\hat{f}(k)| = 2^{-r} \cdot k^{\alpha-1} \leqslant \frac{2 \cdot 2^{-r}}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{1}{m} \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{\mu_m}{m} \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\hat{f}(m)}{m^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \sum_{m=[\frac{k}{d}]+1}^{\infty} \frac{\hat{f}(m)}{m^\alpha}.$$

Таким образом, условие (3.3) выполнено для всех k.

С другой стороны,

$$\|f\|_{L_p} \leqslant \|f_1\|_{L_p} + \|g_n\|_{L_p} < \delta,$$

а

$$J_p(f) \geqslant J_p(g_n) = 1.$$

Таким образом, f – искомая функция. Пункт a доказан.

Докажем теперь пункт b. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k} k^2 \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \nu_n e^{2\pi i n t} \tag{3.5}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k} k^2 \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{2\pi i n t}, \tag{3.6}$$

где $\{\nu_k\}$ – последовательность Рудина-Шапиро. Отметим, что у ряда (3.5) при $1 < p < 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |a_n|^p = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-\frac{1}{2}k} k^2)^p \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{p-2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\frac{p}{2}-1)} k^{2p} < \infty$$

и аналогично для ряда (3.6). Отсюда по теореме Харди-Литтлвуда (3.6) является рядом Фурье функции $g(x) \in L_p[0;1]$ при всех $p < 2$. В то же время, по теореме 32.2 ([22], стр. 157) (3.5) не является рядом Фурье никакой интегрируемой функции. Поэтому у суммы рядов (3.5) и (3.6)

$$2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k}k^2 \sum_{n\in[2^{k-1};2^k-1]:\nu_n=1} e^{2\pi inx} \tag{3.7}$$

$J_p(a(f)) < \infty$, но (3.7) не является рядом Фурье никакой интегрируемой функции. Проверим условие теоремы. Коэффициенты ряда (3.7) имеют вид

$$a_n = \begin{cases} 2\cdot 2^{-\frac{1}{2}k}k^2, & \text{если } 2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k - 1 \text{ и } \nu_n = 1; \\ 0, & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

Отметим, что $a_m \leqslant \frac{C\ln^2(m+1)}{\sqrt{m}}$, при всех m, откуда, так как $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \leqslant C\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln^2(m+1)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} < \infty.$$

В статье ([32], стр. 61) доказано, что из пяти взятых подряд коэффициентов Рудина-Шапиро, по крайней мере один имеет знак -1. То же самое верно и для коэффициентов, равных 1. Тогда, если $a_n = 0$, то выполнение условия очевидно. Если $a_n > 0$, где $n \geqslant 32$, то выберем m: $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$, при этом $m \geqslant 6$. Тогда

$$A = \frac{1}{n^{1-\alpha}}\sum_{r=n}^{2n} \frac{a_r}{r^\alpha} \geqslant \frac{1}{n^{1-\alpha}}\frac{1}{(2n)^\alpha}2^{-\frac{m+1}{2}}(m+1)^2\frac{n}{6} \geqslant \frac{1}{20}2^{-\frac{m}{2}}m^2$$

В то же время $a_n = 2\cdot 2^{-\frac{m}{2}}m^2$. Поэтому $a_n < 40A$. За счет увеличения постоянной можно добиться выполнения условия для всех n. Теорема доказана. □

Теорема 3.1.3. Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in L_1[0;1]$, $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}$. Если

$$B = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{\frac{k}{p'}}\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1}|\Delta a_m|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

то $f \in L_p[0;1]$ и

$$\|f\|_{L_p[0;1]} \leqslant CB.$$

Доказательство. По соотношению двойственности и равенству Парсеваля имеем

$$\|f\|_{L_p[0;1]} = \sup_{\|g\|_{p'}=1}\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sup_{\|g\|_{p'}=1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\hat{g}(k). \tag{3.8}$$

Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \hat{g}(k)$.

Использовав преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{g}(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \hat{g}(k) =$$
$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \Delta a_k \sum_{r=1}^{k} \hat{g}(r) + a_N \sum_{r=1}^{N} \hat{g}(r) \right). \tag{3.9}$$

Докажем, что $\lim\limits_{N\to\infty} a_N \sum\limits_{r=1}^{N} \hat{g}(r) = 0$. Действительно по условию $g \in L_{p'}[0;1]$ и

$$\left| \sum_{r=1}^{N} \hat{g}(r) \right| = \left| \sum_{r=1}^{N} \int_0^1 g(t) e^{irt} dt \right| \leqslant \int_0^1 |g(t)||D_N(t)| dt \leqslant \|g\|_{p'} \|D_N\|_p \leqslant C N^{\frac{1}{p'}}.$$

Из условия теоремы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует k_0: при всех $k > k_0$ выполняется

$$2^{\frac{k}{p'}} \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} |\Delta a_m| < \varepsilon.$$

Тогда при $N > 2^{k_0} - 1$ имеем

$$|a_N| \leqslant \sum_{k=\log_2 N+1}^{\infty} \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} |\Delta a_m| \leqslant \varepsilon \sum_{k=\log_2 N+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{p'}} \leqslant \varepsilon C N^{-\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда

$$\left| a_N \sum_{r=1}^{N} \hat{g}(r) \right| \leqslant \varepsilon C N^{\frac{1}{p'}} N^{-\frac{1}{p'}} = \varepsilon',$$

то есть действительно

$$\lim_{N\to\infty} a_N \sum_{r=1}^{N} \hat{g}(r) = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{g}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \sum_{r=1}^{k} \hat{g}(r).$$

Оценим правую сторону этого равенства.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Delta a_k \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \hat{g}(r) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}|k\Delta a_k|\left|\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k}\hat{g}(r)\right| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sup_{t\geqslant 2^{m-1}}\frac{1}{t}\left|\sum_{r=1}^{t}\hat{g}(r)\right|\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}|k\Delta a_k|.$$

В работе [20] получено, в частности, следующее неравенство

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{m/p}\bar{\bar{g}}_m\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C\|g\|_{L_{p'}[0,1]}, \tag{3.10}$$

где $\bar{\bar{g}}(m) = \sup\limits_{t\geqslant 2^{m-1}}\frac{1}{t}\left|\sum\limits_{k=1}^{t}\hat{g}(k)\right|$. Используем неравенство Гельдера и учитывая (3.10), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\hat{g}(k) \leqslant \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{m/p}\bar{\bar{g}}_m\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{-m/p}\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}|k\Delta a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|g\|_{L_{p'}}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{m/p'}\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}|\Delta a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вернемся к формулу 3.9 и учитывая (3.8), получим требуемое неравенство. □

Теорема 3.1.4. *Пусть* $1 \leqslant 1/\alpha < p < 2$. *Если при всех* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}|\Delta a_k| \leqslant C\sum_{k=m+1}^{\infty}\left|\sum_{r=2^{k-1}}^{2^k}\frac{a_r(f)}{r^\alpha}\right|, \tag{3.11}$$

тогда

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{\frac{m}{p'}}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\Delta a_k|\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{(\alpha-\frac{1}{p})m}\left|\sum_{r=2^{m-1}}^{2^m}\frac{a_r(f)}{r^\alpha}\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть функции $f(t) \in L_p[0;1]$ соответствует ряд Фурье $\sum\limits_{k\in N}a_k(f)e^{2\pi ikx}$ и $f_\lambda \sim \sum\limits_{r\in N}\hat{a}_r\lambda_r(f)e^{2\pi irx}$, где

$$\lambda_r = \frac{\overline{\sum\limits_{r=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{a_r}{r^\alpha}}}{\left|\sum\limits_{r=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{a_r}{r^\alpha}\right|},\ \text{если } 2^{k-1} \leqslant r < 2^k.$$

При этом будем считать, что в случае $\left|\sum\limits_{r=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{a_r}{r^\alpha}\right| = 0$, $\lambda_r := 1$.
Используем теорему 1.3.1 для функции f_λ

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{(\alpha-\frac{1}{p'})m}\left|\sum_{r=2^m}^{\infty}\frac{a_r(f_\lambda)}{r^\alpha}\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|f_\lambda\|_{L_p[0,1]},$$

$$F = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{(\alpha-\frac{1}{p'})m}\sum_{k=m+1}^{\infty}\left|\sum_{r=2^{k-1}}^{2^k}\frac{a_r(f)}{r^\alpha}\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|f_\lambda\|_{L_p[0,1]},$$

По теореме Марцинкевича о мультипликаторах [17], получим что

$$\|f\|_p \sim \|f_\lambda\|_p.$$

Тогда учитывая условие (3.11) и теорему 3.1.3 получим

$$A \leqslant C_1 \cdot F \leqslant C_2\|f\|_p \leqslant C_3 \cdot A,$$

где $A = \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(2^{\frac{m}{p'}}\left(\sum\limits_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\Delta a_k|\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Теорема доказана. □

Отметим, что в статье [41] было доказано утверждение, аналогичное теореме 3.1.4, но с дополнительным условием неотрицательности коэффициентов a_k.

Замечание 3.1.3. *Заметим, что условие (3.1) можно заменить на*

$$|a_k| \leqslant C \sup_{m\geqslant[\frac{k}{d}]}\frac{1}{m^{1-\alpha}}\left|\sum_{s=m}^{\infty}\frac{a_s}{s^\alpha}\right|. \qquad (3.13)$$

При этом утверждение остается верным. Также отметим, что условие (3.13) более слабое чем (3.11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория рядов Фурье - одна из важных направлений гармонического анализа. Интерес к этому направлению объясняется его приложениями в различных разделах математики и в прикладных науках, а также наличием многих не решенных трудных проблем. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению связи коэффициентов Фурье функций и ее интегрируемости, т.е. принадлежности ее в пространству Лоренца L_{pq}, в частности в пространству Лебега L_p.

В данной работе получены следующие результаты:

– Введены пространства $n_{p,q,\alpha}$ и $n_{p,q}(\lambda)$. Изучены их интерполяционные свойства.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Харди коэффициентов тригонометрических рядов Фурье функций из пространства Лоренца.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Беллмана коэффициентов тригонометрических рядов Фурье функций из пространства Лоренца.

– Получены теоремы типа Харди-Литтлвуда с ослаблением условия монотонности коэффициентов Фурье и теорему типа Харди-Литтлвуда для коэффициентов Фурье, которые имеют ограниченную вариацию.

– Введены анизотропные пространства $n_{\vec{p},\vec{q},\vec{\alpha}}$ и $n_{\vec{p},\vec{q}}(\lambda)$. Изучены их интерполяционные свойства.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Харди коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропных пространств Лоренца.

– Получены неравенства типа Нурсултанова (Харди-Литтлвуда-Пэли) для усреднений Беллмана коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропных пространств Лоренца.

Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории дифференциальных уравнении, теории приближении, теории функциональных пространств.

Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в шести научных журналах и сборниках десяти международных, зарубежных и республиканских научных конференций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Мир, 1985. – Т. 1. – 260 с.

2 Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 399 с.

3 Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

4 Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

5 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. - М.: Мир, 1965. - Т. 1. – 616 с.

6 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. - М.: Мир, 1965. - Т. 2. – 538 с.

7 Бари Н.К. Тригонометрические ряды. - М.: Физматгиз, 1961. – 538 с.

8 Харди Г.Г., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. - М.: Ленанд, 2009. - 158 с.

9 Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.И., Полиа Г. Неравенства. - М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 456 с.

10 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Физматлит, 2004. - 572 с.

11 Коляда В.И. О некоторых обобщениях теоремы Харди-Литтлвуда-Пэли // Матем заметки. - 1983. - Т. 51, № 3. - С. 24-34.

12 Titchmarsh E.C. A constribution to the theory of Foueier transforms // Proc. london Math. Soc. - 1924. - Vol. 23, № 2. - P. 279-289.

13 Бабенко К.И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних // Препринт ИПМ АН СССР. - М, 1971. - № 52.

14 Beckner W. *Inequalities in Foueier analysis*// Ann. of Math. - 1975. - Vol. 102. - P. 159-182.

15 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. -М.: Мир, 1980. - С. 264.

16 Marcinkiewicz J., Zigmund A. Some theorems on orthogonal systems // Fund. Math. - 1937. - № 28. - P. 309-335.

17 Maligranda L. Marcinkiewicz centenary volume. - Warszawa: Banach Center Publ. Polish academy of sciences. - 2011. - Vol. 95. - 234 p.

18 Stein Elias M. Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. - 1956. - № 83. - P. 482-492.

19 Бочкарев С. В. Теорема Хаусдорфа-Юнга-Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова. - 1997. - Т. 219. - С. 103-114.

20 Нурсултанов Е. Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из пространств Лебега // Изв. РАН, сер. математика.- 2000. -Т. 64, № 1. - С. 95-122.

21 Копежанова А.Н., Нурсултанов Е.Д., Перссон Л.Е. О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространства Лоренца // Математические заметки. - 2011. - Т. 90, № 5. - С. 785-788.

22 Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998. - С. 160.

23 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. - С. 560.

24 Нурсултанов Е. Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литтлвуда // Математический сборник. - 1998. - Т. 189, № 3. - С. 83-102.

25 Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье // Докл. СССР. - 1967. - Т. 176, № 6. - С. 1251-54.

26 Гулисашвили А.Б. Тригонометрические ряды с монотонно убывающими коэффициентами и функциями распределения // Матем. заметки. - 1971. - Т.10, № 1. - С. 3-10.

27 Sugber Y. An application of interpolation theory to Fourier series // Studia maths. - 1972. - Vol. 41, № 2. - P. 169-181.

28 Родин В.А. Теорема Харди-Литтлвуда для синус-ряда в симметричном пространстве // Матем. заметки. - 1976. - Т. 20, № 2. - С. 241-246.

29 Родин В.А. О принадлежности суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами симметричному пространству // Изв. вузов. - 1979. - № 8. - С. 60-64.

30 Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. - 1990. - V. 109, № 2. - P. 417–425.

31 Тиман М.Ф., Тухлиев К. Свойства некоторых ортонормированных систем // Изв вузов мат. - 1983. - № 9. - С. 65-73.

32 Дьяченко М.И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Математический сборник. - 1986. - Т. 129(171), № 1. - С. 55-72.

33 Дьяченко М.И. Кусочно-монотонные функции многих переменных и теорема Харди-Литллвуда // Изв. АН СССР, сер. матем. - 1991. - Т. 55, № 6. - С. 1156-1170.

34 Кокилашвили В.М. О приближении периодических функций // Труды Тбилис. Матем. Инс. - 1968. - Т.34. - С. 51-81.

35 Акишев Г.А. Об условиях сходимости рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам // Деп КазНИИНТИ. - 1991. - № 3343. - С.19.

36 Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - № 326. - P. 721-735.

37 Tikhonov S. Trigonometric series of Nikol'skii classes // Acta Math. Hungar. - 2007. - № 114. - P. 61-78.

38 Tikhonov S. Best approximation and moduli of smoothness: computation and equivalence theorems // J. Approx. Theory. - 2008. - № 153. - P. 19-39.

39 Leindler L. On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. - 2001. - № 27. - P. 279-285.

40 Yu D.S., Zhou P., Zhou S.P. On Lp integrability and convergence of trigonometric series // Studia mathematica. - 2007. - № 182. - P. 215-226.

41 Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Studia mathematica. - 2009. - Vol. 193, № 3. - P. 285-306.

42 Lorentz G. G. Some new functional spaces // Ann. of Math. - 1950. - Vol. 2, № 51. - P. 37-55.

43 Дьяченко М.И., Нурсултанов Е. Д. Теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с α-монотонными коэффициентами // Мат. сбор. - 2009. - Т. 200, № 11. - С. 45-60.

44 Ю. А. Брудный, Н. Я. Кругляк Функторы вещественной интерполяции // Докл. АН СССР. - 1981. - Т. 256, № 1. - С. 14-17.

45 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. - 2004. Т. - 394, № 1. - С. 22-25.