Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева

УДК 517.956.6 На правах рукописи

ИГИСИНОВ САБИТ ЖАНДАРБЕКОВИЧ

О разрешимости и свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений смешанного типа в неограниченной области

6D060100-Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
доктор физико-математических наук,
профессор М.Б.Муратбеков
доктор физико-математических наук,
профессор К.Н.Оспанов
профессор математики
Г.Бегер (Берлин, Германия)

Республика Казахстан
Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство; в частности при $n = 2$ получаем двумерное евклидово пространство точек $z = (x, y)$, где $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Ω – открытая область в R^n, через $\overline{\Omega}$ обозначим замыкание множества Ω;

$C^l(\overline{\Omega})$, $l = 0, 1, 2, ...$ – множество непрерывных функций, имеющих непрерывные частные производные в $\overline{\Omega}$ до порядка l включительно; в частности, если $\overline{\Omega}$ – область из R^2, то частные производные для некоторой функции $u(x, y)$ можно будет записать в виде

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \le l$, α_1 и α_2 – целые неотрицательные числа.

$C^\infty(\overline{\Omega})$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$.

$L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из измеримых по Лебегу на Ω функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,\Omega} = \left[\int_\Omega |u|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}};$$

$D(A)$ – область определения некоторого оператора A.

$R(A)$ – область значений некоторого оператора A.

Y^* – сопряженное пространство к пространству Y.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно уравнениями смешанного типа называются уравнения, которые в одной части рассматриваемой области принадлежат эллиптическому типу, а в другой – гиперболическому. Эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение либо вырождается в параболическое, либо не определено.

Теория уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и наличием их практических приложений в газовой динамике трансзвуковых течений, магнитной гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и в других областях естественных наук.

Впервые на практическую значимость таких уравнений обратил внимание С.А.Чаплыгин 1902г. в своей работе «О газовых струях» [1]. А с конца сороковых годов прошлого столетия уравнения смешанного типа стали объектами систематических исследований. Основоположниками теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются Ф.Трикоми [2-3] и С.Геллерстедт [4]. Интерес к этой теории еще больше возрос после работы Ф.Франкля [5] опубликованного в 1945 году, где он впервые показал приложения краевых задач для уравнений смешанного типа в трансзвуковой газовой динамике. В дальнейшем существенный вклад в развитие этой теории внесли математики М.А.Лаврентьев [6], А.В.Бицадзе [7-8], К.И.Бабенко [9], А.М.Нахушев [10-11], М.М.Смирнов [12-13], Т.Ш.Кальменов [14], Е.И.Моисеев [15-16], Т.Д.Джураев [17], М.С.Салахатдинов [18-19], S.Moravetz [20], M.Protter и др. В частности, Ф.Трикоми поставил и решил первую граничную задачу для уравнения $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, а С.Геллерстедт развил результаты Ф.Трикоми для уравнения $y^{2n+1}u_{xx} + u_{yy} = 0$. М.Лаврентьевым была предложена более простая модель уравнения смешанного типа $u_{xx} + sgny u_{yy} = 0$. А.В.Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для уравнения Лаврентьева. Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались начиная с 80-х годов прошлого столетия. Здесь следует отметить работу Т.Ш.Кальменова [21], где впервые доказано существование хотя бы одного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, работу Е.И.Моисеева, в которой указаны секторы, где нет собственного значения задачи Трикоми для ряда уравнений смешанного типа, и работу С.М.Пономарева, где найдены собственные значения и собственные функции задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + sgny u_{yy} - \lambda u = 0$.

Все эти работы были посвящены краевым задачам в ограниченной области.

Исследованию дифференциальных уравнений смешанного типа в неограниченной области с ограниченными коэффициентами, где гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник, посвящены работы М.С.Салахитдинова, Р.С.Хайруллина [22], М.Х.Рузиева [23-

24], М. Е. Лернер, О. А. Репин [25] и др. Однако, в приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения, заданные в неограниченной области и имеющие растущие и колеблющиеся коэффициенты. Исследования таких задач на примере сингулярного уравнения Штурма-Лиувилля были начаты в работах В.Н.Эверитта и М.Гирца [26-27], которые, в основном, выясняли условия на потенциальную функцию $q(x)$, обеспечивающие существование, единственность и гладкость (разделимость) решений уравнения $Ly \equiv -y'' + q(x)y = f \in L_2(R)$ $\left(R = (-\infty, \infty)\right)$. В терминах В.Н.Эвиритта и М.Гирца уравнение $Ly \equiv -y'' + q(x)y = f \in L_2(R)$ называется разделимым в пространстве $L_2(R)$, если из $y \in D(L)$, $f \in L_2$ следует $q(x)y \in L_2$, Затем эти результаты были усилены и распространены на многомерный случай в работах М.О.Отелбаева [28-31], К.Х.Бойматова [32-33], Р.О.Ойнарова, М.Б.Муратбекова, К.Н.Оспанова, Л.Шустера и др. Разрешимость дифференциальных уравнений в неограниченной области также рассматривались в работах Т.Като [34], Ю.М.Березанского, И.М.Глазмана [35], А.Г.Костюченко [36], Б.М.Левитана, М.С.Саргсяна и др. Все эти работы посвящены дифференциальным операторам эллиптического типа.

Случай неэллиптических уравнений, заданных в двумерной некомпактной области и имеющих неограниченные коэффициенты (сингулярный случай), изучался в меньшей степени. Задача о разрешимости и свойствах решений уравнений гиперболического типа в случае неограниченной области с ограниченными коэффициентами изучены в работах С.Л.Соболева, А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [37], П.Д.Лакса, К.Фридрихса, М.Нагумо [38], Г.И.Кигурадзе, Д.С.Джумабаева, А.Г.Асановой и др. В работах М.Б.Муратбекова, М.А.Ахметжанова и Р.М.Жусипназарова [39-40] изучались вопросы разрешимости, гладкости и аппроксимативные свойства решений для дифференциального уравнения гиперболического типа. К исследованию таких задач для уравнений смешанного типа посвящены работы М.Б.Муратбеков, К.Н.Оспанова и А.Иманбаевой [41-46]. При этом оставались нерассмотренными сингулярные уравнения смешанного типа, заданные на всей плоскости. Основные трудности, встречающиеся при их изучении связаны с тем, что спектры соответствующих им дифференциальных операторов могут быть непрерывными.

В целом, теория дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов в случае неограниченной области с быстро растущими коэффициентами имеет сравнительно недолгую историю.

Выше приведенные факты свидетельствуют об актуальности темы диссертации.

Цель работы

1. Исследовать на предмет существования и единственности решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа, заданных на всей плоскости.

2. Исследование вопросов о замыкаемости и непрерывной обратимости сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе.

Методика исследования

В работе использованы: метод локализации, разработанный в работах М.Отелбаева, метод априорных оценок, преобразование Фурье, методы теорий линейных операторов, а также модификации метода исследования однопараметрического семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, предложенного в работах [37-44].

Научная новизна темы

В работе получены следующие новые результаты:

– на плоскости, в терминах коэффициентов уравнения получено достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа;

– доказана замыкаемость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе;

– найдены условия, обеспечивающие непрерывную обратимость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе, коэффициенты которых зависят только от одной переменной;

– для указанных уравнений смешанного типа получены коэрцитивные оценки решений.

Объект исследования – дифференциальные уравнения и операторы смешанного типа с сингулярными коэффициентами, заданные в двумерных некомпактных областях.

Предмет исследования – вопросы существования, единственности и о дифференциальных свойствах решений уравнений смешанного типа в неограниченной области.

Выбор направлений исследования

Диссертация состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников.

Остановимся на результатах работы.

На плоскости R^2 рассмотрим следующее уравнение

$$L_\lambda u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u = f(x,y), \qquad (1)$$

где $f(x,y) \in L_2 \equiv L_2(R^2)$, $\lambda \geq 0$, $k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на $R = (-\infty;\infty)$, коэффициенты $a(y), c(y)$ непрерывные функций в R и удовлетворяют условию

i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0,\ c(y) \geq \delta > 0$.

В зависимости от знака коэффициента $k(y)$ оператор (1) может соответственно принадлежат эллиптическому, параболическому, гиперболическому и смешанному типу.

В случае $k(y) = -1$ оператор (1) принадлежит эллиптическому типу. Как известно вопрос о существавании резольвенты сингулярных элиптических операторов, заданных в неограниченных областях достаточно хорошо изучен, например в работах В.Н.Эверитта, М.Гирца, М.Отелбаева, К.Х.Бойматова, Т.Като и др.

В случае $k(y)=1$ уравнение (1) принадлежит гиперболическому типу. В случае ограниченной области вопросам существования, единственности и гладкости решения краевых задач для уравнения смешанного типа (1) посвящена обширная литература. В случае бесконечной области указанные вопросы изучены недостаточно и, вообще говоря, зависят от поведения коэффициентов *a* и *c*. Например, решение задачи без начальных условий

$$u_{tt}=u_{yy}-\alpha u_t \ (0<y<l, t\in R),\ u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t),$$

где слагаемое $\alpha u_t, \alpha>0$ в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости, может быть неединственным, а при $\alpha=0$ не всегда существует [37]. Задачи без начальных условий представляют собой важный класс задач о распространении граничного режима. Младшие члены и правая часть в уравнении (1) характеризуют силы трения, которые присущи всякой физической системе. Дифференциальный оператор гиперболического типа во всем пространстве E^n (евклидовое пространство размерности n) исследован в работе М.Нагумо [38], где коэффициенты оператора и их производные непрерывные и ограниченные функции в E^n.

Определение 1. *Функцию $u\in L_2(R^2)$ назовем решением уравнения (1), если найдется последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_0^{\infty}(R^2)$ такая, что $\|u_n-u\|_2\to 0$, $\|L_\lambda u_n-f\|_2\to 0$.*

Теорема 1. *Пусть выполнено условие i). Тогда для уравнения (1) при любой $f(x,y)\in L_2(R^2)$ существует единственное решение $u(x,y)\in L_2(R^2)$.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие i). Тогда для любого решения $u(x,y)$ уравнения (1) справедлива оценка*

$$\|u_x\|_2+\|u_y\|_2+\left\|\sqrt{c(y)+\lambda}\,u\right\|_2\le c\|f\|_2,$$

где $c>0$ – постоянное число.

Пример 1. Условиям теорем 1 и 2 удовлетворяет уравнение вида (1) с коэффициентами $k(y)=sign(\sin y), a(y)=e^{|y|}\sin^2 e^{|y|}+1, c(y)=e^y+1$. Как видно, здесь функция $a(y)=e^{|y|}\sin^2 e^{|y|}+1$ может, не только расти на бесконечности, но и быстро колебаться.

Основной метод применяемый при доказательстве полученного результата является метод локальных оценок, развитого М.Отелбаевым [28-29], и модифицированного для применения к уравнению (1) на полосе $\Omega=\{(x,y):-\infty<y<+\infty, -\pi<x<\pi\}$ в работах М.Б.Муратбекова [41-43].

Приводим результаты второго раздела работы.

Пусть $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор смешанного типа

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u \tag{2}$$

первоначально определенный на $\widetilde{C}_0^{\infty}(\overline{\Omega})$-множестве, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию $u(x;-1) = u(x;1) = 0$ и финитных по переменной x, коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ непрерывные функции в $R = (-\infty;\infty)$, а $k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на отрезке $[-1;1]$.

В отличие от (1) коэффициенты рассматриваемого оператора (2) при $u_x(x, y)$ и $u(x, y)$ зависят от аргумента x. При исследовании этого оператора возникает совершенно иная ситуация. В частности, применить подход работ вышеуказанных авторов, базирующийся на разделение переменных становится невозможным.

Определим класс $K(\tau, b)$ коэффициентов удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0,\ c(x) \geq \delta > 0$ – непрерывные функций в $R(-\infty, +\infty)$;

ii) $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$ для любого $x \in R$; где $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ – постоянные числа;

iii) $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau\, c(t)$ для всех $x, t \in R$ таких, что $|x - t| \leq b d(t)$, $d(t) = \dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}, b > 0$, $\tau > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$ *замыкание оператора* L *в* $L_2(\Omega)$ *существует.*

Теорема 4. Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$ *оператор* L *имеет непрерывный обратный оператор в* $L_2(\Omega)$.

Данный результат охватывают случай, когда коэффициенты при слагаемых $u_x(x, y)$ и $u(x, y)$ неограниченны. Вопрос о существовании резольвенты, в случае неограниченной области, для эллиптических и псевдодифференциальных операторов хорошо изучен и выяснены типичные трудности встречающиеся в связи с «плохим» поведением коэффициентов.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau\in(0,\tau_0)$ *и* $b>b_0$, *что для любого* $u\in D(L)$ *справедлива следующая оценка*

$$\|u_x\|_2+\|u_y\|_2+\|u\|\leq c\|Lu\|_2,$$

где $c>0$ *– постоянное число.*

Пример 2. Рассмотрим оператор

$$l_0u=k(y)u_{xx}-u_{yy}+(|x|+32)u_x+(4x^2+4^6)u.$$

Нетрудно проверить, что условия вышеуказанных теорем выполняются. Следовательно, оператор l_0 допускает замыкание и для него существует непрерывный обратный оператор.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих международных научных конференциях:

- Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики, Караганда, КарГУ, 2010 г.;
- Ломоносов-2011: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых – Астана: Казахстанский филиал МГУ им.М.В. Ломоносова, 2011 г.;
- 8-ой международной конгресс ISAAC, Москва, Российский университет дружбы народов, 2011 г.;
- Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II, Алматы, 2011 г.;
- Теоретические и прикладные проблемы математики и информационных технологий, Караганда, КарГУ, 2012 г.;
- Функциональный анализ и его приложения, Астана, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2012 г.;

а также на научном семинаре под руководством академика НАН РК д.ф.-м.н., проф. М.О.Отелбаева, член-корреспондента НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Р.О.Ойнарова, д.ф.-м.н., проф. Е.Нурсултанова, д.ф.-м.н., проф. К.Н.Оспанова (Астана, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева); результаты диссертационной работы также неоднократно докладывались и обсуждались на общегородском научном семинаре «Спектральные вопросы дифференциальных операторов» под руководством д.ф.-м.н., проф. М.Б.Муратбекова (Тараз, ТарГПИ).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [47-58].

В заключение выражаю искреннюю благодарность научным руководителям – доктору физико-математических наук, профессору М.Б.Муратбекову, доктору физико-математических наук, профессору К.Н.Оспанову, зарубежному научному консультанту профессору Берлинского свободного университета Г.Бегеру за постановку задачи, постоянное внимание к работе, полезные замечания и за ценные советы при обсуждении полученных результатов.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Прежде чем начать изложение результатов, полученных в данном и последующих разделах, приведем ряд определений и известных утверждений, которые используются в работах [58-67].

Определение 2. Носителем функции u определенной на множестве $\overline{\Omega}$ называется множество $\{(x,y)\in\Omega : u(x,y)\neq 0\}$ и обозначается через $supp u$.

Определение 3. Функция u непрерывная в $\overline{\Omega}$ и $supp u \subseteq \Omega$ называется финитной функцией в $\overline{\Omega}$.

Линейным оператором, действующим из нормированного пространства X с нормой $\|\cdot\|_X$ в другое нормированное пространство Y с нормой $\|\cdot\|_Y$, называется отображение $y = Ax$ $(x\in X, y\in Y)$, удовлетворяющие условию

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay,$$

где $x,y\in D(A)$, а $\alpha,\beta\in R$.

Определение 4. Оператор называется взаимнооднозначным, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих $D(A)$ из того, что $x_1\neq x_2$ следует $y_1=Ax_1\neq y_2=Ax_2$.

Если A отображает $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение или обратный оператор A^{-1}, переводящее $R(A)$ на $D(A)$.

Определение 5. Оператор A называется замкнутым, если для всякой последовательности $\{x_n\}\subset D(A)$ из того, что $x_n\to x_0$ и $Ax_n\to y_0$ следует, что $x_0\in D(A)$ и $y_0=Ax_0$.

Непосредственно из этого определения следует, что если оператор A не замкнут, то его можно расширить до замкнутого. Эта операция называется замыканием оператора A, а сам оператор называется замыкаемым.

Определение 6. Оператор A называется вполне непрерывным, если он любое ограниченное множество переводит в компактное множество или что тоже, каждая ограниченная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из $D(A)$ последовательности $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Пусть X и Y – нормированные пространства и A ограниченный оператор действующий из X в Y. Определим функционал φ формулой

$$\varphi(x)=(x,\varphi)=(Ax,f),\qquad x\in X,\quad f\in Y^*$$

Нетрудно проверить, что φ линеен и $D(\varphi)=X$. И так, каждому $f\in Y^*$ поставлен в соответствие элемент $\varphi\in X^*$, X^* пространство сопряженное к пространству X. Таким образом задан линейный непрерывный оператор $\varphi=A^*f$. Оператор A^* называется сопряженным к оператору A.

Теорема 6 [65]: Пусть X и Y две банаховые пространства (B-пространства), а A является замкнутым оператором, действующий из X в Y, такой что $D(A)$ плотно в X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) множество $R(A)$ замкнуто в Y;

(b) множество $R(A')$ замкнуто в X';

(c) $R(A) = N(A')^{\perp} \equiv \{y \in Y; \langle y, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y^* \in N(A')\}$;

(d) $R(A') = N(A)^{\perp} \equiv \{x^* \in X'; \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ для всех } x \in N(A)\}$,

здесь $N(A)$ и $N(A')$ – нуль многообразия операторов A и A', т.е. $N(A) = \{x \in X; Ax = 0\}$, $N(A') = \{y^* \in Y'; A'y^* = 0\}$.

Следствие. Пусть X и Y – два B-пространства и A – замкнутый линейный оператор, отображающий область $D(A) \subseteq X$ в Y такой, что $D(A)$ плотно в X. Тогда

(a) $R(A) = Y$ тогда и только тогда, когда оператор A' имеет непрерывный обратный;

(b) $R(A') = X'$ тогда и только тогда, когда оператор A имеет непрерывный обратный.

Для функции $u \in L^1(R^n)$ ее преобразование Фурье определим формулой

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int u(x) e^{-ixt} dx,$$

где $x \cdot t = x_1 t_1 + \ldots + x_n t_n$. Очевидно, отсюда следует, что $\tilde{u}(t) \in L^\infty$ и $\|\tilde{u}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1}$. Будем также обозначать $\tilde{u}(t)$ через $Fu(t)$. Меняя в данной формуле знак в показателе экспоненты, положим также

$$F^* u(t) = (2\pi)^{-n/2} \int u(x) e^{ix \cdot t} dx.$$

Определение 7. Пространство $\Psi(R^n)$ состоит из гладких функций $u(x)$ на R^n, для которых все $q_{j,k}$ конечны, с топологией пространства Фреше, определяемой этими полунормами. Двойственное к $\Psi(R^n)$ обозначается $\Psi'(R^n)$ где $q_{j,k} = \sup_{x \in R^n} \{(1 + |x|^2)^{j/2} |D^\alpha u| : |\alpha| \leq k\}$.

Теорема 7. [67]: Преобразование Фурье $F : \Psi(R^n) \to \Psi(R^n)$ является изоморфизмом. Более того $FF^* = F^*F = I$, так что, в частности, для $u \in \Psi$

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \tilde{u}(t) e^{ix \cdot t} dt.$$

Определим теперь оператор

$$F : \Psi'(R^n) \to \Psi'(R^n)$$

полагая

$$(u, F\varpi) = (F^* u, \varpi). \tag{3}$$

Заметим, что (3) выполняется для $\varpi \in \Psi(R^n)$. Тем самым, задается единственное непрерывное продолжение оператора F из пространства Ψ на Ψ'. Аналогично определяется отображение $F^*:\Psi' \to \Psi'$. Из теоремы 7 вытекает, что $FF^* = F^*F = I$ на $\Psi'(R^n)$, следовательно, F и F^* – изоморфизмы $\Psi'(R^n)$. Дифференцируя под знаком интеграла или интегрируя по частям, убеждаемся, что для $u \in \Psi(R^n)$ из (3) получаются соотношения

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int t^\alpha \tilde{u}(t) e^{ix\cdot t}\,dt,$$

$$(-x)^\beta u(x) = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int D_t^\beta \tilde{u}(t) e^{ix\cdot t}\,dt$$

так что $D^\alpha = F^{-1}t^\alpha F$, $x^\beta = F^{-1}(-D)^\beta F$ на $\Psi'(R^n)$. Эти формулы, следовательно, верны и в $\Psi'(R^n)$. Для $u \in \Psi$ из равенства $F^{-1} = F^*$ и из (3) следует, что

$$\|\tilde{u}\|_2^2 = (Fu, Fu) = (F^*Fu, u) = (u,u) = \|u\|_2^2. \tag{4}$$

Формула (4) означает, что F однозначно продолжается до изометрии $F: L^2(R^n) \to L^2(R^n)$. Аналогично F^* единственным образом продолжается до изометрии $L_2(R^n)$, и $FF^* = F^*F = I$ на L^2. Поэтому F и F^* унитарные операторы в $L_2(R^n)$.