Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева

УДК 517.956.6 На правах рукописи

ИГИСИНОВ САБИТ ЖАНДАРБЕКОВИЧ

О разрешимости и свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений смешанного типа в неограниченной области

6D060100-Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
доктор физико-математических наук,
профессор М.Б.Муратбеков
доктор физико-математических наук,
профессор К.Н.Оспанов
профессор математики
Г.Бегер (Берлин, Германия)

Республика Казахстан
Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство; в частности при $n = 2$ получаем двумерное евклидово пространство точек $z = (x, y)$, где $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Ω – открытая область в R^n, через $\overline{\Omega}$ обозначим замыкание множества Ω;

$C^l(\overline{\Omega})$, $l = 0,1,2,...$ – множество непрерывных функций, имеющих непрерывные частные производные в $\overline{\Omega}$ до порядка l включительно; в частности, если $\overline{\Omega}$ – область из R^2, то частные производные для некоторой функции $u(x, y)$ можно будет записать в виде

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \le l$, α_1 и α_2 – целые неотрицательные числа.

$C^\infty(\overline{\Omega})$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$.

$L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из измеримых по Лебегу на Ω функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,\Omega} = \left[\int_\Omega |u|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}};$$

$D(A)$ – область определения некоторого оператора A.

$R(A)$ – область значений некоторого оператора A.

Y^* – сопряженное пространство к пространству Y.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно уравнениями смешанного типа называются уравнения, которые в одной части рассматриваемой области принадлежат эллиптическому типу, а в другой – гиперболическому. Эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение либо вырождается в параболическое, либо не определено.

Теория уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и наличием их практических приложений в газовой динамике трансзвуковых течений, магнитной гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и в других областях естественных наук.

Впервые на практическую значимость таких уравнений обратил внимание С.А.Чаплыгин 1902г. в своей работе «О газовых струях» [1]. А с конца сороковых годов прошлого столетия уравнения смешанного типа стали объектами систематических исследований. Основоположниками теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются Ф.Трикоми [2-3] и С.Геллерстедт [4]. Интерес к этой теории еще больше возрос после работы Ф.Франкля [5] опубликованного в 1945 году, где он впервые показал приложения краевых задач для уравнений смешанного типа в трансзвуковой газовой динамике. В дальнейшем существенный вклад в развитие этой теории внесли математики М.А.Лаврентьев [6], А.В.Бицадзе [7-8], К.И.Бабенко [9], А.М.Нахушев [10-11], М.М.Смирнов [12-13], Т.Ш.Кальменов [14], Е.И.Моисеев [15-16], Т.Д.Джураев [17], М.С.Салахатдинов [18-19], S.Moravetz [20], M.Protter и др. В частности, Ф.Трикоми поставил и решил первую граничную задачу для уравнения $yu_{xx}+u_{yy}=0$, а С.Геллерстедт развил результаты Ф.Трикоми для уравнения $y^{2n+1}u_{xx}+u_{yy}=0$. М.Лаврентьевым была предложена более простая модель уравнения смешанного типа $u_{xx}+sgny u_{yy}=0$. А.В.Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для уравнения Лаврентьева. Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались начиная с 80-х годов прошлого столетия. Здесь следует отметить работу Т.Ш.Кальменова [21], где впервые доказано существование хотя бы одного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, работу Е.И.Моисеева, в которой указаны секторы, где нет собственного значения задачи Трикоми для ряда уравнений смешанного типа, и работу С.М.Пономарева, где найдены собственные значения и собственные функции задачи Трикоми для уравнения $u_{xx}+sgny u_{yy}-\lambda u=0$.

Все эти работы были посвящены краевым задачам в ограниченной области.

Исследованию дифференциальных уравнений смешанного типа в неограниченной области с ограниченными коэффициентами, где гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник, посвящены работы М.С.Салахитдинова, Р.С.Хайруллина [22], М.Х.Рузиева [23-

24], М. Е. Лернер, О. А. Репин [25] и др. Однако, в приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения, заданные в неограниченной области и имеющие растущие и колеблющиеся коэффициенты. Исследования таких задач на примере сингулярного уравнения Штурма-Лиувилля были начаты в работах В.Н.Эверитта и М.Гирца [26-27], которые, в основном, выясняли условия на потенциальную функцию $q(x)$, обеспечивающие существование, единственность и гладкость (разделимость) решений уравнения $Ly \equiv -y'' + q(x)y = f \in L_2(R)$ $\left(R = (-\infty, \infty)\right)$. В терминах В.Н.Эвиритта и М.Гирца уравнение $Ly \equiv -y'' + q(x)y = f \in L_2(R)$ называется разделимым в пространстве $L_2(R)$, если из $y \in D(L)$, $f \in L_2$ следует $q(x)y \in L_2$, Затем эти результаты были усилены и распространены на многомерный случай в работах М.О.Отелбаева [28-31], К.Х.Бойматова [32-33], Р.О.Ойнарова, М.Б.Муратбекова, К.Н.Оспанова, Л.Шустера и др. Разрешимость дифференциальных уравнений в неограниченной области также рассматривались в работах Т.Като [34], Ю.М.Березанского, И.М.Глазмана [35], А.Г.Костюченко [36], Б.М.Левитана, М.С.Саргсяна и др. Все эти работы посвящены дифференциальным операторам эллиптического типа.

Случай неэллиптических уравнений, заданных в двумерной некомпактной области и имеющих неограниченные коэффициенты (сингулярный случай), изучался в меньшей степени. Задача о разрешимости и свойствах решений уравнений гиперболического типа в случае неограниченной области с ограниченными коэффициентами изучены в работах С.Л.Соболева, А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [37], П.Д.Лакса, К.Фридрихса, М.Нагумо [38], Г.И.Кигурадзе, Д.С.Джумабаева, А.Г.Асановой и др. В работах М.Б.Муратбекова, М.А.Ахметжанова и Р.М.Жусипназарова [39-40] изучались вопросы разрешимости, гладкости и аппроксимативные свойства решений для дифференциального уравнения гиперболического типа. К исследованию таких задач для уравнений смешанного типа посвящены работы М.Б.Муратбеков, К.Н.Оспанова и А.Иманбаевой [41-46]. При этом оставались нерассмотренными сингулярные уравнения смешанного типа, заданные на всей плоскости. Основные трудности, встречающиеся при их изучении связаны с тем, что спектры соответствующих им дифференциальных операторов могут быть непрерывными.

В целом, теория дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов в случае неограниченной области с быстро растущими коэффициентами имеет сравнительно недолгую историю.

Выше приведенные факты свидетельствуют об актуальности темы диссертации.

Цель работы

1. Исследовать на предмет существования и единственности решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа, заданных на всей плоскости.

2. Исследование вопросов о замыкаемости и непрерывной обратимости сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе.

Методика исследования

В работе использованы: метод локализации, разработанный в работах М.Отелбаева, метод априорных оценок, преобразование Фурье, методы теорий линейных операторов, а также модификации метода исследования однопараметрического семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, предложенного в работах [37-44].

Научная новизна темы

В работе получены следующие новые результаты:

– на плоскости, в терминах коэффициентов уравнения получено достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа;

– доказана замыкаемость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе;

– найдены условия, обеспечивающие непрерывную обратимость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе, коэффициенты которых зависят только от одной переменной;

– для указанных уравнений смешанного типа получены коэрцитивные оценки решений.

Объект исследования – дифференциальные уравнения и операторы смешанного типа с сингулярными коэффициентами, заданные в двумерных некомпактных областях.

Предмет исследования – вопросы существования, единственности и о дифференциальных свойствах решений уравнений смешанного типа в неограниченной области.

Выбор направлений исследования

Диссертация состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников.

Остановимся на результатах работы.

На плоскости R^2 рассмотрим следующее уравнение

$$L_\lambda u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u = f(x,y), \qquad (1)$$

где $f(x,y)\in L_2 \equiv L_2(R^2)$, $\lambda \geq 0$, $k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на $R = (-\infty;\infty)$, коэффициенты $a(y), c(y)$ непрерывные функций в R и удовлетворяют условию

i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0,\ c(y) \geq \delta > 0$.

В зависимости от знака коэффициента $k(y)$ оператор (1) может соответственно принадлежат эллиптическому, параболическому, гиперболическому и смешанному типу.

В случае $k(y) = -1$ оператор (1) принадлежит эллиптическому типу. Как известно вопрос о существавании резольвенты сингулярных элиптических операторов, заданных в неограниченных областях достаточно хорошо изучен, например в работах В.Н.Эверитта, М.Гирца, М.Отелбаева, К.Х.Бойматова, Т.Като и др.

В случае $k(y) = 1$ уравнение (1) принадлежит гиперболическому типу. В случае ограниченной области вопросам существования, единственности и гладкости решения краевых задач для уравнения смешанного типа (1) посвящена обширная литература. В случае бесконечной области указанные вопросы изучены недостаточно и, вообще говоря, зависят от поведения коэффициентов *a* и *c*. Например, решение задачи без начальных условий

$$u_{tt} = u_{yy} - \alpha u_t \ (0 < y < l, t \in R), \ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t),$$

где слагаемое $\alpha u_t, \alpha > 0$ в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости, может быть неединственным, а при $\alpha = 0$ не всегда существует [37]. Задачи без начальных условий представляют собой важный класс задач о распространении граничного режима. Младшие члены и правая часть в уравнении (1) характеризуют силы трения, которые присущи всякой физической системе. Дифференциальный оператор гиперболического типа во всем пространстве E^n (евклидовое пространство размерности n) исследован в работе М.Нагумо [38], где коэффициенты оператора и их производные непрерывные и ограниченные функции в E^n.

Определение 1. *Функцию $u \in L_2(R^2)$ назовем решением уравнения (1), если найдется последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(R^2)$ такая, что $\|u_n - u\|_2 \to 0$, $\|L_\lambda u_n - f\|_2 \to 0$.*

Теорема 1. *Пусть выполнено условие i). Тогда для уравнения (1) при любой $f(x,y) \in L_2(R^2)$ существует единственное решение $u(x,y) \in L_2(R^2)$.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие i). Тогда для любого решения $u(x,y)$ уравнения (1) справедлива оценка*

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \left\|\sqrt{c(y) + \lambda}\, u\right\|_2 \le c\|f\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянное число.

Пример 1. Условиям теорем 1 и 2 удовлетворяет уравнение вида (1) с коэффициентами $k(y) = sign(\sin y),\ a(y) = e^{|y|}\sin^2 e^{|y|} + 1,\ c(y) = e^y + 1$. Как видно, здесь функция $a(y) = e^{|y|}\sin^2 e^{|y|} + 1$ может, не только расти на бесконечности, но и быстро колебаться.

Основной метод применяемый при доказательстве полученного результата является метод локальных оценок, развитого М.Отелбаевым [28-29], и модифицированного для применения к уравнению (1) на полосе $\Omega = \{(x,y): -\infty < y < +\infty, -\pi < x < \pi\}$ в работах М.Б.Муратбекова [41-43].

Приводим результаты второго раздела работы.

Пусть $\Omega = \{(x,y): -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор смешанного типа

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u \tag{2}$$

первоначально определенный на $\widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$-множестве, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию $u(x;-1) = u(x;1) = 0$ и финитных по переменной x, коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ непрерывные функции в $R = (-\infty;\infty)$, а $k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на отрезке $[-1;1]$.

В отличие от (1) коэффициенты рассматриваемого оператора (2) при $u_x(x,y)$ и $u(x,y)$ зависят от аргумента x. При исследовании этого оператора возникает совершенно иная ситуация. В частности, применить подход работ вышеуказанных авторов, базирующийся на разделение переменных становится невозможным.

Определим класс $K(\tau,b)$ коэффициентов удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0,\ c(x) \geq \delta > 0$ – непрерывные функций в $R(-\infty,+\infty)$;

ii) $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$ для любого $x \in R$; где $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ – постоянные числа;

iii) $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau\, c(t)$ для всех $x,t \in R$ таких, что $|x - t| \leq bd(t)$, $d(t) = \dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}, b > 0$, $\tau > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $a(x), c(x) \in K(\tau,b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0,\tau_0)$ *и* $b > b_0$ *замыкание оператора* L *в* $L_2(\Omega)$ *существует.*

Теорема 4. Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau,b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0,\tau_0)$ *и* $b > b_0$ *оператор* L *имеет непрерывный обратный оператор в* $L_2(\Omega)$.

Данный результат охватывают случай, когда коэффициенты при слагаемых $u_x(x,y)$ и $u(x,y)$ неограниченны. Вопрос о существовании резольвенты, в случае неограниченной области, для эллиптических и псевдодифференциальных операторов хорошо изучен и выяснены типичные трудности встречающиеся в связи с «плохим» поведением коэффициентов.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0,\tau_0)$ *и* $b > b_0$, *что для любого* $u \in D(L)$ *справедлива следующая оценка*

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \|u\| \leq c\|Lu\|_2,$$

где $c > 0$ *– постоянное число.*

Пример 2. Рассмотрим оператор

$$l_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + (|x| + 32)u_x + (4x^2 + 4^6)u .$$

Нетрудно проверить, что условия вышеуказанных теорем выполняются. Следовательно, оператор l_0 допускает замыкание и для него существует непрерывный обратный оператор.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих международных научных конференциях:

- Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики, Караганда, КарГУ, 2010 г.;
- Ломоносов-2011: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых – Астана: Казахстанский филиал МГУ им.М.В. Ломоносова, 2011 г.;
- 8-ой международной конгресс ISAAC, Москва, Российский университет дружбы народов, 2011 г.;
- Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II, Алматы, 2011 г.;
- Теоретические и прикладные проблемы математики и информационных технологий, Караганда, КарГУ, 2012 г.;
- Функциональный анализ и его приложения, Астана, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2012 г.;

а также на научном семинаре под руководством академика НАН РК д.ф.-м.н., проф. М.О.Отелбаева, член-корреспондента НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Р.О.Ойнарова, д.ф.-м.н., проф. Е.Нурсултанова, д.ф.-м.н., проф. К.Н.Оспанова (Астана, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева); результаты диссертационной работы также неоднократно докладывались и обсуждались на общегородском научном семинаре «Спектральные вопросы дифференциальных операторов» под руководством д.ф.-м.н., проф. М.Б.Муратбекова (Тараз, ТарГПИ).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [47-58].

В заключение выражаю искреннюю благодарность научным руководителям – доктору физико-математических наук, профессору М.Б.Муратбекову, доктору физико-математических наук, профессору К.Н.Оспанову, зарубежному научному консультанту профессору Берлинского свободного университета Г.Бегеру за постановку задачи, постоянное внимание к работе, полезные замечания и за ценные советы при обсуждении полученных результатов.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Прежде чем начать изложение результатов, полученных в данном и последующих разделах, приведем ряд определений и известных утверждений, которые используются в работах [58-67].

Определение 2. Носителем функции u определенной на множестве $\overline{\Omega}$ называется множество $\{(x, y) \in \Omega : u(x, y) \neq 0\}$ и обозначается через $supp u$.

Определение 3. Функция u непрерывная в $\overline{\Omega}$ и $supp u \subseteq \Omega$ называется финитной функцией в $\overline{\Omega}$.

Линейным оператором, действующим из нормированного пространства X с нормой $\| \cdot \|_X$ в другое нормированное пространство Y с нормой $\| \cdot \|_Y$, называется отображение $y = Ax$ $(x \in X, y \in Y)$, удовлетворяющие условию

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

где $x, y \in D(A)$, а $\alpha, \beta \in R$.

Определение 4. Оператор называется взаимнооднозначным, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих $D(A)$ из того, что $x_1 \neq x_2$ следует $y_1 = Ax_1 \neq y_2 = Ax_2$.

Если A отображает $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение или обратный оператор A^{-1}, переводящее $R(A)$ на $D(A)$.

Определение 5. Оператор A называется замкнутым, если для всякой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ из того, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ следует, что $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$.

Непосредственно из этого определения следует, что если оператор A не замкнут, то его можно расширить до замкнутого. Эта операция называется замыканием оператора A, а сам оператор называется замыкаемым.

Определение 6. Оператор А называется вполне непрерывным, если он любое ограниченное множество переводит в компактное множество или что тоже, каждая ограниченная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из $D(A)$ последовательности $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Пусть X и Y – нормированные пространства и A ограниченный оператор действующий из X в Y. Определим функционал φ формулой

$$\varphi(x) = (x, \varphi) = (Ax, f), \qquad x \in X, \quad f \in Y^*$$

Нетрудно проверить, что φ линеен и $D(\varphi) = X$. И так, каждому $f \in Y^*$ поставлен в соответствие элемент $\varphi \in X^*$, X^* пространство сопряженное к пространству X. Таким образом задан линейный непрерывный оператор $\varphi = A^* f$. Оператор A^* называется сопряженным к оператору A.

Теорема 6 [65]: Пусть X и Y две банаховые пространства (B-пространства), а A является замкнутым оператором, действующий из X в Y, такой что $D(A)$ плотно в X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(a) множество $R(A)$ замкнуто в Y;
(b) множество $R(A')$ замкнуто в X';
(c) $R(A) = N(A')^{\perp} \equiv \{y \in Y; < y, y^* > = 0 \text{ для всех } y^* \in N(A')\}$;
(d) $R(A') = N(A)^{\perp} \equiv \{x^* \in X'; < x, x^* > = 0 \text{ для всех } x \in N(A)\}$,
здесь $N(A)$ и $N(A')$ – нуль многообразия операторов A и A', т.е. $N(A) = \{x \in X; Ax = 0\}$, $N(A') = \{y^* \in Y'; A'y^* = 0\}$.

Следствие. Пусть X и Y – два B-пространства и A – замкнутый линейный оператор, отображающий область $D(A) \subseteq X$ в Y такой, что $D(A)$ плотно в X. Тогда

(a) $R(A) = Y$ тогда и только тогда, когда оператор A' имеет непрерывный обратный;

(b) $R(A') = X'$ тогда и только тогда, когда оператор A имеет непрерывный обратный.

Для функции $u \in L^1(R^n)$ ее преобразование Фурье определим формулой
$$\widetilde{u}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int u(x) e^{-ixt} dx,$$

где $x \cdot t = x_1 t_1 + \ldots + x_n t_n$. Очевидно, отсюда следует, что $\widetilde{u}(t) \in L^\infty$ и $\|\widetilde{u}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1}$. Будем также обозначать $\widetilde{u}(t)$ через $Fu(t)$. Меняя в данной формуле знак в показателе экспоненты, положим также
$$F^* u(t) = (2\pi)^{-n/2} \int u(x) e^{ix \cdot t} dx.$$

Определение 7. Пространство $\Psi(R^n)$ состоит из гладких функций $u(x)$ на R^n, для которых все $q_{j,k}$ конечны, с топологией пространства Фреше, определяемой этими полунормами. Двойственное к $\Psi(R^n)$ обозначается $\Psi'(R^n)$ где $q_{j,k} = \sup_{x \in R^n} \{(1 + |x|^2)^{j/2} |D^\alpha u| : |\alpha| \leq k\}$.

Теорема 7. [67]: Преобразование Фурье $F : \Psi(R^n) \to \Psi(R^n)$ является изоморфизмом. Более того $FF^* = F^* F = I$, так что, в частности, для $u \in \Psi$
$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \widetilde{u}(t) e^{ix \cdot t} dt.$$
Определим теперь оператор
$$F : \Psi'(R^n) \to \Psi'(R^n)$$
полагая
$$(u, F\varpi) = (F^* u, \varpi). \tag{3}$$

Заметим, что (3) выполняется для $\varpi \in \Psi(R^n)$. Тем самым, задается единственное непрерывное продолжение оператора F из пространства Ψ на Ψ'. Аналогично определяется отображение $F^*: \Psi' \to \Psi'$. Из теоремы 7 вытекает, что $FF^* = F^*F = I$ на $\Psi'(R^n)$, следовательно, F и F^* – изоморфизмы $\Psi'(R^n)$. Дифференцируя под знаком интеграла или интегрируя по частям, убеждаемся, что для $u \in \Psi(R^n)$ из (3) получаются соотношения

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int t^\alpha \tilde{u}(t) e^{ix\cdot t} dt,$$

$$(-x)^\beta u(x) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int D_t^\beta \tilde{u}(t) e^{ix\cdot t} dt$$

так что $D^\alpha = F^{-1} t^\alpha F$, $x^\beta = F^{-1}(-D)^\beta F$ на $\Psi'(R^n)$. Эти формулы, следовательно, верны и в $\Psi'(R^n)$. Для $u \in \Psi$ из равенства $F^{-1} = F^*$ и из (3) следует, что

$$\|\tilde{u}\|_2^2 = (Fu, Fu) = (F^* Fu, u) = (u, u) = \|u\|_2^2. \tag{4}$$

Формула (4) означает, что F однозначно продолжается до изометрии $F: L^2(R^n) \to L^2(R^n)$. Аналогично F^* единственным образом продолжается до изометрии $L_2(R^n)$, и $FF^* = F^*F = I$ на L^2. Поэтому F и F^* унитарные операторы в $L_2(R^n)$.

1 О СУЩЕСТВОВАНИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, ЗАДАННЫХ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ

1.1 Формулировка основных результатов

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L_\lambda u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u = f(x,y),\ f(x,y) \in L_2(R^2), \quad (1.1)$$

где $\lambda \geq 0$, $k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на отрезке $[-1;1]$. В зависимости от знака коэффициента $k(y)$ уравнение (1.1) может соответсвенно принадлежат эллиптическому, параболическому, гиперболическому и смешанному типу.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $a(y), c(y)$ удовлетворяют условию:

i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0,\ c(y) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в $R(-\infty,\infty)$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие i). Тогда для уравнения (1.1) при любой правой части* $f(x,y) \in L_2(R^2)$ *существует единственное сильное решение* $u(x,y) \in L_2(R^2)$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие i). Тогда для любого решения* $u(x,y)$ *уравнения (1.1) справедлива оценка*

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \left\|\sqrt{c(y)+\lambda}\, u\right\|_2 \leq c\|f\|_2,$$

где c – *здесь и далее положительное число (вообще говоря, разное в разных местах),* $\|\cdot\|_2$ – *норма пространства* $L_2(R^2)$.

Пример. Теоремы 1.1 и 1.2 справедливы для коэффициентов

(a) $k(y) = \sin y,\ a(y) = y^2 + 1,\ c(y) = 3y^2 + 5$;

(b) $k(y) = sign(\sin y),\ a(y) = e^{|y|}\sin^2 e^{|y|} + 1,\ c(y) = e^y + 1$.

Через L_λ обозначим замыкание в норме $L_2(R^2)$ дифференциального выражения

$$L_\lambda u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u,$$

определенного на множестве $C_0^\infty(R^2)$ сколь угодно гладких финитных функций.

Докажем, что L_λ является замыкаемым оператором. Если L_λ не замыкаем, то существует последовательность функций $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in D(L_\lambda)$ такая, что $u_n \to 0,\ L_\lambda u_n \to v \neq 0$ при $n \to \infty$, где сходимость понимается по норме $L_2(R^2)$. Возьмем произвольную функцию $\omega \in D(L_\lambda)$. Тогда

$$0 = \lim_{n\to\infty}(u_n, L'_\lambda \omega) = \lim_{n\to\infty}(L_\lambda u_n, \omega) = (v, \omega),$$

где $L'_\lambda \omega = k(y)\omega_{xx} - \omega_{yy} + a(y)\omega_x + (c(y) + \lambda)\omega$ с областью определения $D(L'_\lambda)$, состоящей из сколь угодно гладких финитных функций. Отсюда, так как $\overline{D(L_\lambda)} \equiv L_2(R^2)$, то $v = 0$. Из полученного противоречия следует, что оператор L_λ замыкаем.

1.2 Вспомогательные леммы и оценки в одномерном случае

Лемма 1.1. Пусть выполнено условие *i)* и $\lambda \geq 0$. Тогда для $\forall u \in D(L_\lambda)$ выполняется неравенство

$$\|L_\lambda u\|_2 \geq c\|u\|_2. \tag{1.3}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее скалярное произведение

$$< L_\lambda u, u > = \int_{R^2} (k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + (c(y) + \lambda)u)udxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}udx\right]dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy}udy\right]dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_x udx\right]dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(c(y) + \lambda)|u|^2 dxdy.$$

Применяя метод интегрирования по частям и учитывая, что $u(x, y)$ – финитная и бесконечно гладкая функция, получим

$$< L_\lambda u, u > = -\int_{R^2} k(y)|u_x|^2 dxdy + \int_{R^2} |u_y|^2 dxdy + \int_{R^2} (c(y) + \lambda)|u|^2 dxdy,$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} a(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_x udx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} a(y)\left[u^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} uu_x dx\right]dy = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(y)uu_x dxdy,$

т.е. $\quad 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(y)uu_x dxdy = 0.$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского с «$\varepsilon > 0$» для выражения

$$|< L_\lambda u, u >| = \left|-\int_{R^2} k(y)|u_x|^2 dxdy + \int_{R^2} |u_y|^2 dxdy + \int_{R^2} (c(y) + \lambda)|u|^2 dxdy\right|,$$

имеем

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|L_\lambda u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 \geq \int_{R^2} |u_y|^2 dxdy + \int_{R^2} (c(y)+\lambda)|u|^2 dxdy - \int_{R^2} |k(y)||u_x|^2 dxdy$$

или

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|L_\lambda u\|_2^2 \geq \|u_y\|_2^2 + (\delta + \lambda - \frac{\varepsilon}{2})\|u\|_2^2 - \max_{y\in R}|k(y)| \cdot \|u_x\|_2^2$$

Подбирая $\varepsilon = \delta$, получим

$$\frac{1}{2\delta}\|L_\lambda u\|_2^2 \geq \|u_y\|_2^2 + (\frac{\delta}{2} + \lambda)\|u\|_2^2 - \max_{y\in R}|k(y)| \cdot \|u_x\|_2^2 \qquad (1.4)$$

Теперь рассмотрим выражение

$$< L_\lambda u, u_x > = \int_{R^2} k(y) u_{xx} u_x dxdy - \int_{R^2} u_{yy} u_x dxdy +$$
$$+ \int_{R^2} a(y) u_x{}^2 dxdy + \int_{R^2} (c(y)+\lambda) u_x u dxdy .$$

Применяя метод интегрирования по частям для каждого слагаемого имеем

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(y) u_{xx} u_x dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} k(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} u_x dx\right) dy = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(y) u_x u_{xx} dxdy .$$

Поэтому $2I_1 = 0$.

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_{yy} u_x dxdy = -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{yy} u_x dy\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xy} u_y dxdy .$$

С другой стороны

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{xy} u_y dx\right) dy = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_y u_{xy} dxdy .$$

Отсюда $I_2 = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xy} u_y dxdy = 0$.

Для четвертого слагаемого справедливо равенство:

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(c(y)+\lambda)u_x u dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[c(y)+\lambda\right]\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_x u dx\right)dy =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(c(y)+\lambda)u_x u dxdy,$$

т.е. $I_3 = 0$. Учитывая, что $I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0$, окончательно получим

$$|< L_\lambda u, u_x >| = \left|\int\limits_{R^2} a(y)|u_x|^2 dxdy\right|.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского с «$\varepsilon > 0$»:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|L_\lambda u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u_x\|_2^2 \geq \left|\int\limits_{R^2} a(y)|u_x|^2 dxdy\right|$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|L_\lambda u\|_2^2 \geq (\min_{y\in R}|a(y)| - \frac{\varepsilon}{2})\|u_x\|_2^2$$

Подбирая $\varepsilon = \delta_0$

$$\frac{1}{\delta_0}\|L_\lambda u\|_2^2 \geq \delta_0\|u_x\|_2^2 \tag{1.5}$$

Умножим обе части неравенства (1.5) на $C_0 = \frac{\delta_0 + \max_{y\in R}|k(y)|}{\delta_0^2}$ и объединим с (1.4):

$$(1+\frac{1}{2\delta})\|L_\lambda u\|_2^2 \geq \|u_y\|_2^2 + (\frac{\delta}{2}+\lambda)\|u\|_2^2 + \delta_0^2\|u_x\|_2^2$$

или

$$(1+\frac{1}{2\delta})\|L_\lambda u\|_2^2 \geq (\frac{\delta}{2}+\lambda)\|u\|_2^2 \Rightarrow (1.3)$$

Лемма доказана.

Рассмотрим оператор

$$(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u = -u'' + (-k(y)t^2 + it(a(y)+\gamma) + c(y) + \lambda)u$$

$-\infty < t < +\infty$, определенный на множестве дважды непрерывно-дифференцируемых функции $C_0^2(\overline{\Delta}_j)$, удовлетворяющих следующим условиям

$u(\Delta^-_j) = u(\Delta^+_j) = 0$. Здесь Δ^-_j и Δ^+_j – соответственно, правый и левый концы интервала $\Delta_j = (j-1, j+1)$, $j \in Z$, знак вещественного числа γ совпадает со знаком функции $a(y)$.

Лемма 1.2. Пусть выполнено условие *i*). Тогда при $\lambda \geq 0$ к замкнутому оператору $l_{t,j,\gamma} + \lambda E$ существует непрерывный обратный $(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1}$, определенный на всем $L_2(\Delta_j)$.

Доказательство. Для любого $u(y) \in C_0^\infty(\overline{\Delta_j})$ имеем

$$< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u > = \int_{\Delta_j} [-u'' + (-k(y)t^2 + it(a(y) + \gamma) + c(y) + \lambda)u]\overline{u}dy$$

Интегрируя правую сторону по частям получаем, что

$$\left|< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u >\right| = \left|\int_{\Delta_j} (|u'|^2 + (-k(y)t^2 + c(y) + \lambda)|u|^2 dy + \int_{\Delta_j} it(a(y) + \gamma)|u|^2 dy\right| \qquad (1.6)$$

Отсюда, учитывая условие *i*) и пользуясь свойством комплексных чисел, находим, что

$$\left|< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u >\right| \geq \left|\int_{\Delta_j} it(a(y) + \gamma)|u|^2 dy\right| \geq |t|(\delta_0 + |\gamma|)\|u\|_2^2$$

Здесь мы воспользовались тем, что $a(y)$ не меняет знак и знаки $a(y)$ и γ совпадают.

Отсюда пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем, что

$$\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\|_2 \geq |t|(\delta_0 + |\gamma|)\|u\|_2, \; t \neq 0. \qquad (1.7)$$

А при $t = 0$ из (1.6) имеем

$$\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\|_2 \geq (\frac{\delta}{2} + \lambda)\|u\|_2 \qquad (1.8)$$

Из неравенств (1.7) и (1.8) следует что

$$\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\|_2 \geq c\|u\|_2,$$

где $c = \min\{\frac{\delta}{2} + \lambda, \delta_0 + |\gamma|\}$

Далее, если показать, что $R(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)$ плотно в $L_2(\Delta_j)$, то отсюда будет следовать, что оператор $l_{t,j,\gamma} + \lambda E$ имеет непрерывный обратный оператор

$(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{-1}$, где $R(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)$ – область значений оператора $l_{t,j,\gamma}+\lambda E$. Мы докажем это методом от противного. Допустим, что множество $R(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)$ не является плотным в $L_2(\Delta_j)$. Тогда существует элемент $v\in L_2(\Delta_j)$ $(v\neq 0)$ такой, что $<(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,v>=0$ для всех $u\in D(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)$. Это показывает, что

$$(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{*}v=-v''+(-k(y)t^2-it(a(y)+\gamma)+c(y)+\lambda)v=0$$

$-\infty<t<+\infty$, в смысле теории распределений. Поскольку $a(y),c(y)$ непрерывные функции на отрезке $\overline{\Delta}_j$, то $(-k(y)t^2-it(a(y)+\gamma)+c(y)+\lambda)v\in L_2(\Delta_j)$. Следовательно $v''\in L_2(\Delta_j)$. Теперь покажем, что элемент v, для которого $(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{*}v=0$, удовлетворяет условию

$$v(\Delta^-_j)=v(\Delta^+_j)=0$$

В этом мы можем убедиться, интегрируя по частям

$$0=<u,(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{*}v>=\int_{\Delta_j}u\overline{(-v''+(-k(y)t^2-it(a(y)+\gamma)+c(y)+\lambda))v}dy=$$

$$=u'\overline{v}\Big|_{\Delta^+_j}^{\Delta^-_j}+<(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,v>,\ u\in D(l_{t,j,\gamma}).$$

По предположению $<(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,v>=0$, следовательно $u'\overline{v}\Big|_{\Delta^+_j}^{\Delta^-_j}=0$. Отсюда и в силу произвольности функции $u(y)$ следует, что $v(\Delta^-_j)=v(\Delta^+_j)=0$. Окончательно имеем

$$v''\in L_2(\Delta_j),\ v(\Delta^-_j)=v(\Delta^+_j)=0.$$

Для завершения остается доказать, что справедливо неравенство

$$\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{*}v\right\|_2\geq c\|v\|_2. \qquad (1.9)$$

Для этого интегрируя по частям скалярное произведение $<(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{*}v,v>$ и учитывая, что внеинтегральные члены исчезают в силу (1.9) получаем, что

$$\left| < (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^* v, v > \right| = \left| \int_{\Delta_j} \left(|v'|^2 + (-k(y)t^2 - it(a(y)+\gamma) + c(y) + \lambda)|v|^2 dy \right) \right| \geq$$

$$\geq \left| \int_{\Delta_j} (-it(a(y)+\gamma)|v|^2 dy \right|.$$

Далее, повторяя выкладки и рассуждения использованные при доказательстве неравенства (1.8) получаем, что

$$\left\| (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^* v \right\|_2 \geq c \|v\|_2$$

Отсюда, в силу $(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^* v = 0$, следует что $v = 0$.

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

(a) $\left\| \left(l_{t,j,\gamma} + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2} \leq \dfrac{c}{(\delta+\lambda)^{1/2}}$;

(b) $\left\| \dfrac{d}{dy} \left((l_{t,j,\gamma} + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{2\to 2} \leq \dfrac{c}{(\delta+\lambda)^{1/4}}$;

(c) $\left\| (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u \right\|_2 \geq c\left(\|u'\|_2 + \left\| \sqrt{c(y)+\lambda}\, u \right\|_2 + \left\| \sqrt{|t|(|a(y)| + |\gamma|)} \cdot u \right\|_2 \right)$,

$u \in D(l_{t,\gamma,j}),\ t \neq 0$

где $c > 0$ – постоянное число не зависящее от $u(y), t, j$ и $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим скалярные произведения $< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u >$ и $< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, -itu >$. Для первого имеем

$$< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u > = -\int_{\Delta_j} u'' \bar{u} dy + \int_{\Delta_j} (-t^2 k(y) + it(a(y)+\gamma) + c(y) + \lambda)|u|^2 dy.$$

Применяя метод интегрирования по частям и учитывая, что $u(y) \in C_0^\infty(\overline{\Delta}_j)$, имеем

$$\left| < (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u > \right| \geq \left| \|u'\|_2^2 + \int_{\Delta_j} (c(y)+\lambda)|u|^2 dy \right| - \left| \int_{\Delta_j} t^2 k(y)|u|^2 dy \right| \qquad (1.10)$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left\| (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u \right\|_2 \cdot \|u\|_2 \geq \|u'\|_2^2 - \max_{y \in \Delta_j} |k(y)| \cdot |t|^2 \|u\|_2^2 \qquad (1.11)$$

и неравенство Коши-Буняковского с «$\varepsilon > 0$»

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq (\min_{y\in\Delta_j} c(y)+\lambda-\frac{\varepsilon}{2})\|u\|_2^2-\max_{y\in\Delta_j}|k(y)|\cdot|t|^2\|u\|_2^2. \qquad (1.12)$$

А для второго скалярного произведения имеем

$$< (l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,-itu>= it\int_{\Delta_j} u''\overline{u}dy +$$

$$+\int_{\Delta_j}\left[it^3k(y)+t^2(a(y)+\gamma)-it(c(y)+\lambda)\right]|u|^2dy.$$

Отсюда, используя метод интегрирования по частям и учитывая, что $u(y)\in C_0^\infty(\overline{\Delta}_j)$, окончательно имеем

$$\left|< (l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,-itu>\right| \geq \left|\int_{\Delta_j} t^2(a(y)+\gamma)|u|^2dy\right|$$

Учитывая, что знаки $a(y)$ и γ совпадают и применяя неравенство Коши-Буняковского, из последнего неравенства получим

$$\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2\cdot|t|\cdot\|u\|_2 \geq (\min_{y\in\Delta_j}|a(y)|+|\gamma|)\cdot|t|^2\|u\|_2^2 \qquad (1.13)$$

Сократив обе части неравенства (1.13) на $|t|\cdot\|u\|_2>0$ и возведя в квадрат обе части неравенства, получим

$$\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq (\min_{y\in\Delta_j}|a(y)|+|\gamma|)^2\cdot|t|^2\|u\|_2^2 \qquad (1.14)$$

Умножим обе части неравенства (1.14) на $c_0=\dfrac{\delta_0+\max_{y\in R}|k(y)|}{(\min_{y\in\Delta_j}|a(y)|+|\gamma|)^2}$ и объединим с неравенством (1.12):

$$c\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq (\delta+\lambda)\|u\|_2^2 \qquad (1.15)$$

Из неравенств (1.7) и (1.15) следует пункт *(a)*.
Из неравенств пункта *(a)* и (1.11) получаем следующее

$$\sqrt{\frac{c}{\delta+\lambda}}\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \left\|u'\right\|_2^2 - \max_{y\in\Delta_j}\left|k(y)\right|\cdot\left|t\right|^2\left\|u\right\|_2^2 \qquad (1.16)$$

Умножим (1.14) на $\sqrt{\frac{c}{\delta+\lambda}}$ и обьеденим с (1.16):

$$\frac{c_1}{\sqrt{\delta+\lambda}}\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \left\|u'\right\|_2^2 \qquad (1.17)$$

где $c_1 = 2\sqrt{c}$. Последнее неравенство будет выполнено для достаточно больших γ, для которых $\sqrt{\frac{c}{\delta+\lambda}}(\min_{y\in\Delta_j}\left|a(y)\right|+\left|\gamma\right|)^2 - \max_{y\in\Delta_j}\left|k(y)\right| \geq 0$. Из неравенства (1.17) следует пункт *(b)*.

Аналогично неравенствам (1.13), (1.15), (1.17) соответственно имеем

$$\left\|(l_{t,\gamma,j}+\lambda E)u\right\|_2 \geq \left\|\sqrt{\left|t\right|(\left|a(y)\right|+\left|\gamma\right|)}\cdot u\right\|_2,$$
$$\sqrt{c}\left\|(l_{t,\gamma,j}+\lambda E)u\right\|_2 \geq \left\|\sqrt{c(y)+\lambda}\,u\right\|_2,$$
$$\sqrt{\frac{c_1}{\sqrt{\delta+\lambda}}}\left\|(l_{t,\gamma,j}+\lambda E)u\right\|_2 \geq \left\|u'\right\|_2.$$

Из этих неравенств следует пункт *(c)*.

Лемма 1.3 доказана.

Рассмотрим оператор

$$(l_{t,\gamma}+\lambda E)u = -u''(y) + (-k(y)t^2 + it(a(y)+\gamma) + c(y) + \lambda)u(y), \ -\infty < t < +\infty$$

первоначально определенный на множестве $C_0^\infty(R)$. Оператор $l_{t,\gamma}+\lambda E$ допускает замыкание, которое обозначим также через $l_{t,\gamma}+\lambda E$.

Лемма 1.4. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда справедлива оценка:

$$\left\|l_{t,\gamma}+\lambda E\right\|_2 \geq \left|t\right|(\delta_0+\left|\gamma\right|)\left\|u\right\|_2, \ u\in D(l_{t,\gamma}), \ t\neq 0$$

а при $t=0$

$$\left\|l_{t,\gamma}+\lambda E\right\|_2 \geq \delta\left\|u\right\|_2, \ u\in D(l_{t,\gamma})$$

Составим скалярное произведение

$$<(l_{t,\gamma}+\lambda E)u, -itu> = it\int_{-\infty}^{+\infty} u''\bar{u}\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty}(it^3k(y) + t^2(a(y)+\gamma) - itc(y) - it\lambda)\left|u\right|^2 dy$$

для всех $u \in C_0^\infty(R)$. Интегрируя по частям и пользуясь свойством комплексных чисел, имеем

$$\left| < (l_{t,\gamma} + \lambda E)u, -itu > \right| \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 (a(y) + \gamma) |u|^2 dy \right|.$$

Откуда (поскольку знаки $a(y)$ и γ совпадают) используя неравенство Коши-Буняковского находим:

$$\left\|(l_{t,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2 \cdot |t| \cdot \|u\|_2 \geq (\min_{y \in R} |a(y)| + |\gamma|) \cdot |t|^2 \|u\|_2^2$$

или при $t \neq 0$:

$$\left\|(l_{t,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2 \geq (\delta_0 + \gamma) \cdot |t| \|u\|_2 .$$

В силу непрерывности нормы последняя оценка справедлива для всех $u \in D(l_{t,\gamma})$.

Из скалярного произведения

$$< (l_{t,\gamma} + \lambda E)u, u > = -\int_{-\infty}^{+\infty} u'' \tilde{u} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} - t^2 k(y) + it(a(y) + \gamma) + c(y) + \lambda) |u|^2 dy ,$$

при $t = 0$ получим следующее

$$\left| < (l_{0,\gamma} + \lambda E)u, u > \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |u'|^2 dy \int_{-\infty}^{+\infty} (c(y) + \lambda) |u|^2 dy \right|.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского

$$\left\|(l_{0,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2 \cdot \|u\|_2 \geq \|u'\|_2^2 + (\min_{y \in R} c(y) + \lambda) \|u\|_2^2$$

Отсюда

$$\left\|(l_{0,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2 \geq (\delta + \lambda) \|u\|_2 .$$

Лемма 1.4 доказана.

Возьмем набор $\{\varphi_j\}$ – неотрицательных функции из множества $C_0^\infty(R)$ таких, что

$$\sum_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1, \ \mathrm{supp}\varphi_j \subseteq \Delta_j, \bigcup_j \Delta_j = R .$$

Через K обозначим оператор, определенный равенством

$$Kf = \sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f, \ \ f \in L_2(R). \tag{1.18}$$

Лемма 1.5. Пусть, выполнено условие *i*). Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(R)$ справедливо следующее равенство

$$\left(l_{t,\gamma} + \lambda E\right) Kf = f - B_\lambda f \tag{1.19}$$

где

$$B_\lambda f = \sum_{\{j\}} \varphi_j'' (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} \varphi_j' \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f$$

Здесь символ $\sum\limits_{\{j\}}$ означает, что суммы берутся по всем целым j.

Доказательство. Так как $f \in C_0^\infty(R)$, то сумма (1.18) конечна. Поэтому следующее вычисления законны:

$$(l_{t,\gamma} + \lambda E)Kf = (l_{t,\gamma} + \lambda E)\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f =$$

$$= (-\frac{d^2}{dy^2} + (-k(y)t^2 + ita(y) + c(y) + \lambda))\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f =$$

$$= -\frac{d^2}{dy^2}\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + (-k(y)t^2 + ita(y) + c(y) + \lambda)\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f =$$

$$= -\sum_{\{j\}} \varphi_j'' (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f - 2\sum_{\{j\}} \varphi_j' \left[(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right]' -$$

$$- \sum_{\{j\}} \varphi_j \frac{d^2}{dy^2} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + (-k(y)t^2)\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f +$$

$$+ ita(y)\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + (c(y) + \lambda)\sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f =$$

$$= -\sum_{\{j\}} \varphi_j \frac{d^2}{dy^2} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_j (-k(y)t^2)(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f +$$

$$+ \sum_{\{j\}} ita(y)\varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} (c(y) + \lambda)\varphi_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f -$$

$$- \sum_{\{j\}} \varphi_j'' (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f - 2\sum_{\{j\}} \varphi_j' \left[(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right]' =$$

$$= \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(-\frac{d^2}{dy^2} + (-k(y)t^2 + ita(y) + c(y) + \lambda \right) (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f -$$

$$-\sum_{\{j\}} \varphi''_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f - 2\sum_{\{j\}} \varphi'_j \left[(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right]' =$$

$$= f - \sum_{\{j\}} \varphi''_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f - 2\sum_{\{j\}} \varphi'_j \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f .$$

$$(l_{t,j,\gamma} + \lambda E) K f = f - \sum_{\{j\}} \varphi''_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f - 2\sum_{\{j\}} \varphi'_j \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f$$

Здесь учитывалось, что $\sum_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1$ и действие оператора $l_{t,\gamma} + \lambda E$ на отрезке Δ_j совпадает с действием оператора $l_{t,\gamma,j} + \lambda E$.

Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. Пусть выполнено условие *i*). Тогда найдется $\lambda = \lambda_0 > 0$ такое, что $\|B_\lambda\|_{2\to 2} < 1$ при всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Доказательство. Проведем оценку нормы оператора B_λ:

$$\|B_\lambda f\|_2^2 = \left\| \sum_{\{j\}} \varphi''_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} \varphi'_j \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\{j\}} \varphi''_j (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} \varphi'_j \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right|^2 dy \leq$$

$$\leq \sum_{\{j\}} \int_{j-1}^{j+1} \left| \sum_{k=j-1}^{j+1} \varphi''_k (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_k f + 2\varphi'_k \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_k f \right|^2 dy .$$

Здесь мы воспользовались тем, что на $\overline{\Delta}_j = [j-1, j+1]$ только $\varphi_{j-1} \neq 0, \varphi_j \neq 0, \varphi_{j+1} \neq 0$. Отсюда и в силу неравенства $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ получаем, что

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \leq 9 \cdot \max\{|\varphi''_j|, |\varphi'_j|\} \cdot \sum_{\{j\}} \left(\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\|_2^2 + \left\| \frac{d}{dy} (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \right),$$

Из последнего неравенства, пользуясь леммой 1.3 имеем:

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le 9c_0\sum_{\{j\}}\left(\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{-1}\|_2^2\cdot\|\varphi_j f\|_2^2+\left\|\frac{d}{dy}(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\|\varphi_j f\|_2^2\right)\le$$

$$\le 9c_0\left(\sum_{\{j\}}\left(\frac{c}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\|\varphi_j f\|_2^2+\frac{c}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\|\varphi_j f\|_2^2\right)\right)\le$$

$$\le 9c_0\cdot c\left(\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\sum_{\{j\}}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_j f|^2dy+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\sum_{\{j\}}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_j f|^2dy\right)\le$$

$$\le 9c_0\cdot c\left(\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\{j\}}|\varphi_j f|^2dy+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\{j\}}|\varphi_j f|^2dy\right)\le$$

$$\le 9c_0\cdot c\left(\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\{j\}}\varphi_j^2\right)|f|^2dy+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\{j\}}\varphi_j^2\right)|f|^2dy\right)\le$$

$$\le 9c_0\cdot c\left(\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}|f|^2dy+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty}|f|^2dy\right)\le$$

$$\le 9c_0\cdot c\left(\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\|f\|_2^2+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\|f\|_2^2\right).$$

где $c_0=\max\{|\varphi''_j|,|\varphi'_j|\}$.

Отсюда

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \le c\left(\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/4}}\right)\|f\|_2^2, \tag{1.20}$$

Последнее неравенство при достаточно больших положительных λ доказывает лемму 1.6.

Лемма 1.7. Пусть $\lambda\ge 0$. Тогда оператор $l_{t,\gamma}+\lambda E$ при $\lambda\ge\lambda_0$ ограниченно обратим, причем для обратного оператора $(l_{t,\gamma}+\lambda E)^{-1}$ выполняется равенство

$$(l_{t,\gamma}+\lambda E)^{-1}=K(E-B_\lambda)^{-1} \tag{1.21}$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы оператор $(E-B_\lambda)$ ограничен со своим обратным. Поэтому множество $M=\{\varphi=(E-B_\lambda)f : f\in C_0^\infty(R)\}$ плотно в $L_2(R)$. Из равенства (1.19) при $\varphi=(E-B_\lambda)f, f\in C_0^\infty(R)$ получаем, что

$K(E-B_\lambda)^{-1}\varphi\in D(l_{t,\gamma})$ и $\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)K(E-B_\lambda)^{-1}\varphi=\varphi$. Отсюда имеем что $u=K(E-B_\lambda)^{-1}f$ является решением уравнения $\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)u=f$. Единственность следует из леммы 1.2.

Лемма 1.8. Пусть $\alpha=0$ или $\alpha=1$, $\lambda\geq\lambda_0$, а $\rho(y)$ – заданная на R непрерывная функция. Тогда имеет место оценка

$$\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^{2}\leq c(\lambda)\sup_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^{2}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Из представления (1.2) видно, что оператор $\rho(y)|t|^{\alpha}\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}$ ограничен (или неограничен) вместе с оператором $\rho(y)|t|^{\alpha}K(E-B_\lambda)^{-1}$. Поэтому будем заниматься оценкой нормы последнего оператора $\rho(y)|t|^{\alpha}K(E-B_\lambda)^{-1}$. Для любого $f\in L_2(R)$ имеем:

$$\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}f\right\|_2^2=\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}K(E-B_\lambda)^{-1}f\right\|_2^2=$$

$$=\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\sum_{\{j\}}\varphi_j(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{-1}\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right\|^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\{j\}}\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right|^2dy\leq$$

$$\leq\sum_{\{j\}}\int_{j-1}^{j+1}\left|\sum_{\{j\}}\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right|^2dy$$

Здесь мы воспользовались тем, что на $\Delta_j=(j-1,j+1)$ только $\varphi_{j-1}\neq 0,\varphi_j\neq 0,\varphi_{j+1}\neq 0$. Учитывая это, имеем:

$$\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}(l_t+\lambda E)^{-1}f\right\|_2^2\leq 3\sum_{\{j\}}\int_{j-1}^{j+1}\sum_{k=j-1}^{j+1}\left(\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_k\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_k(E-B_\lambda)^{-1}f\right)^2dy\leq$$

$$\leq 9c\sum_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right\|_2^2\leq$$

$$\leq 9c\sum_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2\cdot\left\|\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right\|_2^2\leq$$

$$\leq 9c\sup_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2\sum_{\{j\}}\left\|\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right\|_2^2=$$

$$=9c\sup_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2\sum_{\{j\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_j(E-B_\lambda)^{-1}f\right|^2dy=$$

$$= 9c\sup_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|(E-B_\lambda)^{-1}f\right|^2 dy\sum_{\{j\}}\varphi_j^{\,2}\le$$

$$= 9c\sup_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\left\|(E-B_\lambda)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\|f\|_2^2\le$$

$$\le 9c(\lambda)\sup_{\{j\}}\left\|\rho(y)|t|^{\alpha}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\|f\|_2^2$$

Лемма 1.8 доказана.

Лемма 1.9. Пусть выполнены условия леммы 1.8. Тогда справедливы следующие оценки:

(a) $\left\|\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le c<\infty$;

(b) $\left\|it\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le c<\infty$;

(c) $\left\|\frac{d}{dy}\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le c<\infty$;

(d) $\left\|\sqrt{c(y)+\lambda}\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le c<\infty$.

Доказательство. Согласно лемме 1.8

$$\left\|\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le c(\lambda)\sup_j\left\|\varphi_j\left(l_{t,\gamma,j}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le c(\lambda)\sup_j\left\|\left(l_{t,\gamma,j}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}$$

Отсюда и из леммы 1.3 получаем, что

$$\left\|\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}<c<\infty$$

Далее, в силу леммы 1.3 имеем:

$$\left\|it\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le\sup_{\|f\|\le 1}\frac{\left\|t\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}f\right\|_2^2}{\|f\|_2^2}\le\sup_u\frac{\|tu\|_2^2}{\left\|\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)u\right\|_2^2}\le$$

$$\le\sup_u\frac{|t|^2\cdot\|u\|_2^2}{|t|^2(\delta_0+\gamma)^2\|u\|_2^2}=\frac{1}{(\delta_0+\gamma)^2}\le\frac{1}{\delta_0^{\,2}}<\infty\quad.$$

Точно также, пользуясь леммой 1.8 и леммой 1.3 находим:

$$\left\|\frac{d}{dy}\left(l_{t,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\le c\sup_{\{j\}}\left\|\frac{d}{dy}\varphi_j\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\le$$

$$\le c \max_{\{j\}}\{\varphi_j'^2, \varphi_j^2\}\left(\frac{1}{\delta+\lambda}+\frac{1}{(\delta+\lambda)^{1/2}}\right)<\infty$$

Аналогично доказывается пункт *(d)*.

Рассмотрим уравнение

$$(l_t+\lambda E)u \equiv -u''(y)+(-k(y)t^2+ita(y)+c(y)+\lambda)u(y)=f\ , \qquad (1.23)$$

где $f\in L_2(R)$.

Решением уравнения (1.23) назовем функцию $u\in L_2(R)$, для которой существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_0^{\infty}(R)$, такая, что $\|u_n-u\|_{L_2(R)}\to 0$, $\|(l_t+\lambda E)u_n-f\|_{L_2(R)}\to 0$ при $n\to\infty$.

Лемма 1.10. Оператор $l_t+\lambda E$ при $\lambda\ge\lambda_0$ ограниченно обратим, причем для обратного оператора $(l_t+\lambda E)^{-1}$ выполняется равенство

$$(l_t+\lambda E)^{-1}f=(l_{t,\gamma}+\lambda E)^{-1}(E-A_{\lambda,\gamma})^{-1}f,\ \ f\in L_2(R), \qquad (1.24)$$

где $\|A_{\lambda,\gamma}\|_{L_2(R)\to L_2(R)}<1$, а при $t=0$ оператор $l_0+\lambda E$ существенно самосопряжен.

Доказательство. Уравнение $(l_t+\lambda E)u=f$ перепишем в виде $v-A_{\lambda,\gamma}v=f$, где $v=(l_{t,\gamma}+\lambda E)u$, $A_{\lambda,\gamma}=it\gamma\,(l_{t,\gamma}+\lambda E)^{-1}$. Из леммы 1.4 вытекает, что

$$\|A_{\lambda,\gamma}v\|_{L_2(R)\to L_2(R)}\le\frac{|t|\cdot|\gamma|}{|t|(\delta_0+|\gamma|)}\|v\|_{L_2(R)}$$

или

$$\|A_{\lambda,\gamma}\|_{L_2(R)\to L_2(R)}<1,$$

$$u=(l_t+\lambda E)^{-1}v=(l_{t,\gamma}+\lambda E)^{-1}(E-A)^{-1}f,$$

при $t=0$ оператор $l_0+\lambda E$ существенно самосопряжен [67].

Лемма доказана.

Из леммы 1.9 и представления (1.24) следует

Лемма 1.11. Пусть выполнены условия леммы 1.8. Тогда для $\lambda\ge\lambda_0$ справедливы оценки

(a) $\left\|\sqrt{c(y)+\lambda}\,(l_t+\lambda E)^{-1}\right\|_{L_2(R)\to L_2(R)}<\infty\quad(-\infty<t<+\infty)$;

(b) $\left\|it(l_t+\lambda E)^{-1}\right\|_{L_2(R)\to L_2(R)}<\infty\quad(t\ne 0)$;

$$(c)\ \left\| \frac{d}{dy}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1} \right\|_{L_2(R)\to L_2(R)} < \infty \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Следующая лемма известно [68].

Лемма 1.12. Пусть оператор $L + \theta_0 E$ $(\theta_0 > 0 - const)$ ограниченно обратим в $L_2(R)$ и при $\theta \in [0, \theta_0)$ выполнена оценка $\left\|\left(L + \theta E\right)u\right\|_{L_2(R)} \ge c\|u\|_{L_2(R)}$, $u \in D(L + \theta E)$. Тогда оператор $L : L_2(R) \to L_2(R)$ также ограниченно обратим.

1.3 Доказательства основных теорем

Применяя преобразования Фурье по x к уравнению (1.1) получаем

$$(l_t + \lambda E)\widetilde{u} = -\widetilde{u}_{yy} + (-k(y)t^2 + it(a(y) + c(y) + \lambda)\widetilde{u} = \widetilde{f} \qquad (1.25)$$

где

$$\widetilde{u} = F_{x\to t}u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-ixt}dx$$

$$\widetilde{f} = F_{x\to t}u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-ixt}dx$$

Отсюда нетрудно заметить, что задача о решении уравнения (1.1) перейдет в задачу о решении уравнения (1.25). Следовательно, по лемме 1.7:

$$\widetilde{u} = \left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\widetilde{f} = \left(l_{t,\gamma} + \lambda E\right)^{-1}\left(E - B\right)^{-1} f \qquad (1.26)$$

дает решение уравнения (1.25).

Теперь, используя обратный оператор F^{-1}, имеем:

$$u(x,y) = F^{-1}\widetilde{u} = F^{-1}\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\widetilde{f} \qquad (1.27)$$

Единственность следует из леммы 1.1.

Найдем u_x:

$$u_x = F^{-1}(it)\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\widetilde{f}(t,y)$$

Далее, мы имеем

$$\|u_x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2 dxdy \le \int_{-\infty}^{\infty}\left\|-it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\|\widetilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le$$

$$\le \sup_{t\in R}\left\|-it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{f}(t,y)\right|^2 dy\right)dt == \sup_{t\in R}\left\|-it\left(l_t + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \cdot \|f\|_2^2$$

Откуда, в силу леммы 1.11

$$\|u_x\|_2^2 \le c_1^2 \|f\|_2^2 \tag{1.28}$$

где $c_1 > 0$ – постоянное число не зависящее от *u* и *f*.

Аналогично найдем u_y:

$$u_y = F^{-1} \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}(t,y)$$

Далее

$$\|u_y\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u_y|^2 dxdy = < F_{t\to x}^{-1} \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}(t,y), F_{t\to x}^{-1} \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}(t,y) > =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}(t,y)\right|^2 dy \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\| \tilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le$$

$$\le \sup_{t\in R} \left\| \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \tilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt = \sup_{t\in R} \left\| \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{f}(t,y)\right|^2 dt \right) dy \le$$

$$\le \sup_{t\in R} \left\| \frac{\partial}{\partial y}(l_t + \lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2}^2 \cdot \|f\|_2^2$$

Отсюда и из леммы 1.7 имеем:

$$\|u_y\|_2^2 \le c_2^2 \|f\|_2^2 \tag{1.29}$$

где $c_2 > 0$ - постоянное число.

Находим также $\left\|\sqrt{c(y) + \lambda}\, u\right\|$:

$$\left\|\sqrt{c(y) + \lambda}\, u\right\|_2^2 = < \sqrt{c(y) + \lambda}\, F_{t\to x}^{-1}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}, \sqrt{c(y)} F_{t\to x}^{-1}(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f} >$$

Так как преобразование Фурье не зависит от *y*, то справедливо равенство:

$$\left\|\sqrt{c(y) + \lambda}\, u\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{c(y) + \lambda}\,(l_t + \lambda E)^{-1} \tilde{f}(t,y)\right|^2 dy \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \sqrt{c(y)} \left(l_t + \lambda E \right)^{-1} \widetilde{f}(t, y) \right\|_2^2 dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \sqrt{c(y)} \left(l_t + \lambda E \right)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \left\| \widetilde{f}(t, y) \right\|_2^2 dt$$

Таким образом, учитывая лемму 1.11 имеем:

$$\left\| \sqrt{c(y) + \lambda}\, u \right\|_2^2 \le \sup_{t \in R} \left\| \sqrt{c(y) + \lambda} \left(l_t + \lambda E \right)^{-1} \right\|_{2 \to 2}^2 \cdot \left\| f \right\|_2^2$$

$$\left\| \sqrt{c(y) + \lambda}\, u \right\|_2^2 \le c_3^2 \cdot \left\| f \right\|_2^2 \tag{1.30}$$

где $c_3 > 0$ – постоянное число.

Обьединяя неравенства (1.28), (1.29) и (1.30) получаем неравенство теоремы 1.2.

2 О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СМЕШАННОГО ТИПА, ЗАДАННЫХ НА ПОЛОСЕ

2.1 Формулировка основных результатов

Пусть $\Omega = \{(x,y): -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор:

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u, \quad u(x,y) \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \tag{2.1}$$

с непрерывными коэффициентами, где $k(y)$ – непрерывная и ограниченная функция меняющая знак на отрезке $[-1;1]$. В зависимости от знака коэффициента $k(y)$ оператор (2.1) может соответсвенно принадлежат эллиптическому, параболическому, гиперболическому и смешанному типу, $\widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций и удовлетворяющих условию $u(x,-1) = u(x,1) = 0$, финитных по переменной x.

Обозначим через $K(\tau, b)$ класс коэффициентов удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0,\ c(x) \geq \delta > 0$ – непрерывные функций в R;

ii) $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$, для любого $x \in R$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ – постоянные числа;

iii) $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau c(t)$, для всех $x, t \in R$ таких, что $|x - t| \leq bd(t)$, $d(t) = \dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}, b > 0$, $\tau > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть* $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$ *замыкание* L *оператора*

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u,\ D(L_0) = \widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$$

в $L_2(\Omega)$ *существует.*

Теорема 2.2. *Пусть* $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0, *что при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$ *оператор* L *имеет непрерывный обратный оператор.*

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда для любого* $u \in D(L)$ *справедлива следующая оценка*

$$\|u_x\|_{2,\Omega} + \|u_y\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,\Omega} \leq c\|Lu\|_{2,\Omega}, \tag{2.2}$$

где $c > 0$ – постоянное число, а $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ - норма в $L_2(\Omega)$.

Пример. Пусть

$$l_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + (|x| + 32)u_x + (4x^2 + 4^6)u, \quad u \in \widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Нетрудно проверить, что для коэффициентов оператора l_0 выполняются все условия теорем. Следовательно,

(a) оператор l_0 допускает замыкание,

(b) для его замыкания существует непрерывный обратный оператор,

(c) справедлива оценка (2.2).

В начале мы займемся анализом некоторых важных свойств резольвенты оператора с постоянными коэффициентами.

2.2 Вспомогательные леммы и оценки в одномерном случае

Рассмотрим оператор

$$(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u = -u'' + (-k(y)t^2 + it(a(x_j) + \gamma) + c(x_j) + \lambda)u \quad (-\infty < t < \infty)$$

определенный в $L_2(-1,1)$, $u(-1) = u(1) = 0$, где γ – такое постоянное, что $\gamma a(y) > 0$.

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда:

(a) $\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\|_2 \geq |a(x_j) + \gamma|\,|t|\,\|u\|_2, \quad u \in D(l_{t,j,\gamma}), -\infty < t < \infty$;

(b) $c\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\|_2 \geq (c(x_j) + \lambda)\|u\|_2, \quad u \in D(l_{t,j,\gamma}), -\infty < t < \infty$;

(c) $\dfrac{c}{\sqrt{c(x_j) + \lambda}}\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\|_2 \geq \|u'\|_2, \quad u \in D(l_{t,j,\gamma})$.

где $D(l_{t,j,\gamma})$ – область определения замкнутого оператора.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия *i)-ii)* и $\lambda \geq 0$. Тогда оператор $(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)$ непрерывно обратим в $L_2(-1,1)$, причем

$$\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \leq \frac{c}{c(x_j) + \lambda}. \tag{2.3}$$

Доказательство леммы 2.1. Для всех $u \in C_0^\infty[-1,1]$ имеем:

$$|< (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u >| = \left|\int_{-1}^{1}\left[(-u'' + (-k(y)t^2 + it(a(x_j) + \gamma) + c(x_j) + \lambda)u\right]\overline{u}dy\right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \left[\left|u_y\right|^2 + (-k(y)t^2 + it(a(x_j)+\gamma) + c(x_j)+\lambda)|u|^2 \right] dy \right|, \tag{2.4}$$

где $C_0^\infty[-1,1]$ – множество бесконечно дифференцируемых функций и удовлетворяющих условию $u(-1) = u(1) = 0$.

Отсюда используя свойства комплексных чисел получаем, что

$$\left| < (l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u, u > \right| \geq \left| \int_{-1}^{1} it(a(x_j)+\gamma)|u|^2 dy \right| \geq |t|\left|a(x_j)+\gamma\right| \|u\|_2^2. \tag{2.5}$$

Из (2.5), пользуясь неравенством Коши находим, что

$$\left\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2 \geq |t|\left|a(x_j)+\gamma\right| \|u\|_2. \tag{2.6}$$

Пункт *(a)* леммы 2.1 доказан.

Докажем пункт *(b)* леммы 2.1. Из (2.4) используя неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\frac{1}{2(c(x_j)+\lambda)}\left\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2^2 + \frac{c(x_j)+\lambda}{2}\|u\|_2^2 \geq$$

$$\geq \int_{-1}^{1} \left[|u'|^2 + (c(x_j)+\lambda)|u|^2 \right] dy - \int_{-1}^{1} t^2 |k(y)| |u|^2 dy, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon = c(x_j)+\lambda$.

Умножим на $\dfrac{\tilde{c}}{2(c(x_j)+\lambda)}$ обе части неравенства (2.6), где $\tilde{c} > 0$ – постоянное число. Тогда

$$\frac{\tilde{c}}{2(c(x_j)+\lambda)}\left\|(l_{t,j,\gamma} + \lambda E)u\right\|_2^2 \geq \frac{\tilde{c}|t|^2 (a(x_j)+\gamma)^2}{2(c(x_j)+\lambda)}\|u\|_2^2. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что

$$\frac{\widetilde{c}+1}{2(c(x_j)+\lambda)}\left\|(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \int_{-1}^{1}\left[|u'|^2+\left[(c(x_j)+\lambda)-\frac{c(x_j)+\lambda}{2}\right]|u|^2\right]dy+$$

$$+\int_{-1}^{1}|t|^2\left[\frac{\widetilde{c}(a(x_j)+\gamma)^2}{2(c(x_j)+\lambda)}-|k(y)|\right]|u|^2\,dy. \qquad (2.9)$$

Отсюда учитывая условие *ii)* получаем, что

$$\frac{c}{c(x_j)+\lambda}\left\|(l_{t,j}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[|u'|^2+(c(x_j)+\lambda)|u|^2\right]dy. \qquad (2.10)$$

Из (2.11) вытекает, что

$$c\left\|(l_{t,j}+\lambda E)u\right\|_2 \geq \left(c(x_j)+\lambda\right)\|u\|_2.$$

Таким образом пункт *(b)* леммы 2.1 доказан.

Из (2.10) также следует доказательство пункта *(c)* леммы 2.1.

Доказательство леммы 2.2. Из пункта *(b)* леммы 2.1 следует что оператор $(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^{-1}$ существует и одновременно ограничен на $R(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)$. Осталось показать, что $R(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)\equiv L_2(-1,1)$. Мы это докажем от противного, допустим, что множество $R(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)\neq L_2(-1,1)$, тогда существует элемент $v\in L_2(-1,1)$ $(v\neq 0)$ такой что

$$<(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,v>=0 \text{ для всех } u\in D(l_{t,j,\gamma}).$$

Это означает, что

$$<u,(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^*v>=0 \text{ для всех } u\in D(l_{t,j,\gamma}).$$

Отсюда имеем $(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^*v=-v''+(-k(y)t^2-it(a(x_j)+\gamma)+c(x_j)+\lambda)v=0$ в смысле теории распределений.

Непосредственно вычисляя можно проверить, что $v''\in L_2(-1,1)$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться в том, что элемент v, для которого $\left((l_{t,j,\gamma}+\lambda E)^*v=0\right.$ принадлежит $v\in D(l_{t,j,\gamma})$ т.е.

$$v(-1)=v(1)=0.$$

В этом можем убедиться, интегрируя по частям:

$$0=<u,\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{*}v>=\int_{-1}^{1}u\left[-\bar{v}''+\overline{(-k(y)t^{2}-it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)v}\right]dy=$$

$$=-\int_{-1}^{1}u\bar{v}''dy+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy=$$

$$=-\int_{-1}^{1}ud\bar{v}'+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy=$$

$$=-u\bar{v}'\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\bar{v}'du+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\bar{v}'du+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}u'd\bar{v}+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $u\in D(l_{t,j,\gamma})$.

Далее,

$$0=<u,\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{*}v>=\int_{-1}^{1}u'd\bar{v}+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy=$$

$$=u'\bar{v}\,\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}u''\bar{v}dy+\int_{-1}^{1}(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u\bar{v}dy=$$

$$=u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}[-u''+(-k(y)t^{2}+it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)u]\bar{v}dy=u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1}+<(l_{t,j,\gamma}+\lambda)u,v>.$$

По предположению $<(l_{t,j,\gamma}+\lambda E)u,v>=0$, следовательно $u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1}=0$. Отсюда в силу произвольности функции u следует, что

$$\bar{v}(-1)=\bar{v}(1)=0.$$

Таким образом, окончательно имеем, что $v''\in L_{2}(-1,1),\ v(-1)=v(1)=0$.

Для завершения остается доказать, что справедливо неравенство

$$\left\|\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)^{*}v\right\|_{2}\geq|t|(\delta_{0}+\gamma)\|v\|_{2},\quad t\neq 0.$$

Для этого рассмотрим скалярное произведение $\left|<\left((l_{t,j}+\lambda E\right)^{*}v,v>\right|$, интегрируя по частям и учитывая, что внеинтегральные члены исчезают в силу краевым условиям $\bar{v}(-1)=\bar{v}(1)=0$, получим:

$$\left|<\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)v,v>\right|=\left|\int_{-1}^{1}\left[-v''+(-k(y)t^2-it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)v\right]\bar{v}dy\right|=$$

$$=\left|\int_{-1}^{1}\left[-|v'|^2+(-k(y)t^2-it(a(x)+\gamma)+c(x)+\lambda)|v|^2\right]dy\right|\geq\left|\int_{-1}^{1}\left(-it(a(x)+\gamma)\right)|v|^2dy\right|.$$

Теперь, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и условием *i)* ($a(x)$ - не меняет знак), получим неравенство:

$$\left\|\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)v\right\|_2\geq|t|(\delta_0+\gamma)\|v\|_2,\quad t\neq 0$$

Из последнего неравенства, в силу $\left(l_{t,j,\gamma}+\lambda E\right)v=0$, следует, что $v=0$.

Лемма 2.2 доказана полностью.

Рассмотрим оператор

$$(l_{t,j}+\lambda E)u=-u''+(-k(y)t^2+ita(x_j)+c(x_j)+\lambda)u\quad(-\infty<t<\infty)$$

определенный в $L_2(-1,1)$, $u(-1)=u(1)=0$. Результаты полученные выше для оператора $l_{t,j,\gamma}+\lambda E$ также справедливы для оператора $l_{t,j}+\lambda E$.

2.3 О свойствах резольвенты дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

Рассмотрим оператор

$$(L_j+\lambda E)u=k(y)u_{xx}-u_{yy}+a(x_j)u_x+(c(x_j)+\lambda)u \tag{2.11}$$

на $C_0^{\infty}(\Omega)$, $\lambda>0$, где $x_j\in R$ (их специальный выбор будет сделан позже) $j=1,2,...$.

Нетрудно проверить, что оператор $L_j+\lambda E$ допускает замыкание в L_2 и замыкание также обозначим через $L_j+\lambda E$.

Утверждение 2.1. Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда оператор $L_j+\lambda E$ при $\lambda>0$ непрерывно обратим.

Утверждение 2.2. Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда справедливы оценки:

$$\text{(a)} \quad \left\|(L_j + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \frac{c}{c(x_j) + \lambda}; \tag{2.12}$$

$$\text{(b)} \quad \left\|D_x(L_j + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \frac{c}{\left|a(x_j)\right|}; \tag{2.13}$$

$$\text{(c)} \quad \left\|D_y(L_j + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \frac{c}{\sqrt{c(x_j) + \lambda}}. \tag{2.14}$$

Для доказательства этих утверждений сперва докажем предварительно несколько лемм.

Доказательство утверждения 2.1. Рассмотрим задачу

$$(L'_j + \lambda E)u = k(y)u_{xx} - u_{yy} - a(x_j)u_x + c(x_j)u + \lambda u = f \in C_0^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right),$$
$$u(x,-1) = u(x,1) = 0,$$

где оператор L'_j формально сопряженный оператор оператору L_j.

Применяя преобразование Фурье по x, получаем что

$$(l_{t,j} + \lambda E)\widetilde{u} = -\widetilde{u}'' + \left(-k(y)t^2 - ita(x_j) + c(x_j) + \lambda\right)\widetilde{u} = \widetilde{f}(t,y),$$
$$\widetilde{u}(-1) = \widetilde{u}(1) = 0$$

где $\widetilde{u}$, $\widetilde{f}$ – преобразование Фурье по переменной x.

Повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2.2 получаем, что существует непрерывный обратный оператор $\left(l'_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}$.

Далее, используя, обратный оператор $\underset{t\to x}{F^{-1}}$ имеем:

$$u(x,y) = \left(L'_j + \lambda E\right)^{-1} f = \underset{t\to x}{F^{-1}}\left(l'_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\widetilde{f} \tag{2.15}$$

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда

$$D(L_j) \subseteq D(L_j'^*),$$

где $D(L_j)$ и $D(L_j'^*)$ – области определения соответственно оператора L_j и сопряженного оператора к оператору L_j'.

Доказательство. Согласно определению сопряженного оператора справедливо равенство

$$\langle L_j' u, v \rangle = \langle u, L_j'^* v \rangle$$

для любого $u(x,y) \in D(L_j')$, $v(x,y) \in D(L_j'^*)$.

Если мы докажем, что последнее равенство справедливо также для любого $v \in D(L_j)$, то утверждение леммы будет доказано.

И так пусть $u_n(x,y) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ и $u_n \to u \in D(L_j')$, $v_n(x,y) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ и $v_n \to v \in D(L_j)$. Тогда справедливо следующее равенство для любых $u_n, v_n \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$

$$\langle L_j' u_n, v_n \rangle = \langle u_n, L_j v_n \rangle. \tag{2.16}$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться интегрируя по частям и учитывая граничные условия.

Теперь, переходя в равенстве (2.16) к пределу имеем, что

$$\langle L_j' u, v \rangle = \langle u, L_j v \rangle$$

Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда $Ker\left(L_j + \lambda E\right) = \{0\}$.

Доказательство. Из равенства (2.15) следует, что множество значений оператора $\left(L_j' + \lambda E\right)$ совпадает со всем $L_2(\Omega)$, т.е.

$$R\left(L_j' + \lambda E\right) = L_2(\Omega) \tag{2.17}$$

Из общей теории линейных операторов известно, что

$$L_2(\Omega) = R\left(L_j' + \lambda E\right) \perp N\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^*\right), \text{ где } N\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^*\right) = Ker\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^*\right).$$

Отсюда и из (2.13) находим, что $N\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^*\right) = \{0\}$.

Следовательно, пользуясь леммой 2.3, имеем

$$N\left(L_j + \lambda E\right) = Ker\left(L_j + \lambda E\right) \subseteq N\left(\left(L'_j + \lambda E\right)^*\right) = Ker\left(\left(L'_j + \lambda E\right)^*\right) = \{0\}$$

т.е. $N\left(L_j + \lambda E\right) = Ker\left(L_j + \lambda E\right) = \{0\}$.

Лемма 2.4 доказана.

Теперь покажем существование правого обратного оператора $\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}$ оператора $\left(L_j + \lambda E\right)$.

Для этого рассмотрим задачу:

$$(L_j + \lambda E)u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a\left(x_j\right)u_x + c\left(x_j\right)u + \lambda u = f \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (2.18)$$

$$u(x,-1) = u(x,1) = 0.$$

Применяя преобразование Фурье по x, получаем что

$$(l_{t,j} + \lambda E)\tilde{u} = -\tilde{u}'' + \left(-k(y)t^2 + ita\left(x_j\right) + c\left(x_j\right) + \lambda\right)\tilde{u} = \tilde{f}(t,y),$$

$$\tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) = 0,$$

где

$$\tilde{u}(t,y) = \underset{x \to t}{F} u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(x,y) e^{-ixt} dx,$$

$$\tilde{f}(t,y) = \underset{x \to t}{F} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f(x,y) e^{-itx} dx.$$

Из леммы 2.2 следует, что

$$\tilde{u} = \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}.$$

Далее, используя обратный оператор $\underset{t \to x}{F^{-1}}$ имеем

$$u(x,y) = \underset{t \to x}{F^{-1}} \tilde{u} = \underset{t \to x}{F^{-1}} \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}$$

или

$$u(x,y) = \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} f = \underset{t \to x}{F^{-1}} \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \tilde{f}. \qquad (2.19)$$

Отсюда и согласно лемме 2.4 следует, что существует непрерывный оператор $\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}$.

Доказательство утверждения 2.2. Из (2.19), пользуясь свойствами преобразования Фурье, получаем, что

$$\|u\|_2^2 = \left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} f\right\|_2^2 = \left\|\underset{t\to x}{F^{-1}}\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}\right\|_2^2 = \left\langle \underset{t\to x}{F^{-1}}\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}, \underset{t\to x}{F^{-1}}\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}, \left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}\left|\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right|^2 dy\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le \sup_{t\in R}\left\|\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt =$$

$$= \sup_{t\in R}\left\|\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}\left|f(x,y)\right|^2 dydx .$$

Отсюда и из леммы 2.2 находим, что

$$\|u\|_2^2 \le \frac{c}{\left(c\left(x_j\right) + \lambda\right)^2}\|f\|_2^2 \tag{2.20}$$

или

$$\left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 \le \frac{c}{\left(c\left(x_j\right) + \lambda\right)^2} .$$

Пункт *(a)* утверждения 2.2 доказан.

Далее

$$u_x = D_x\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} f = \frac{\partial}{\partial x}\underset{t\to x}{F^{-1}}\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)e^{ixt}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(it)\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)e^{ixt}dt = \underset{t\to x}{F^{-1}}(it)\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y) .$$

$$\|u_x\|_2^2 = \left\|D_x\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} f\right\|_2^2 = \left\langle \underset{t\to x}{F^{-1}}\left(it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \widetilde{f}(x,y)\right), \underset{t\to x}{F^{-1}}\left(it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \widetilde{f}(x,y)\right)\right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 \left|it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \widetilde{f}(t,y)\right|^2 dy\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left\|it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \widetilde{f}(t,y)\right\|_2^2\right)dt =$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left\|it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1} \widetilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le \sup_{t\in R}\left\|it\left(l_{t,j} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-1}^1 \left|\widetilde{f}(t,y)\right|^2 dy\right)dt .$$

В силу пункта *(a)* леммы 2.1 получаем, что

$$\left\|D_x\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} f\right\|_2^2 \le \frac{1}{\left|a(x_j)\right|^2}\|f\|_2^2 .$$

Последнее неравенство доказывает пункт *(b)* утверждения 2.2.

Непосредственно вычислим, что

$$D_y(L + \lambda E)^{-1} f = \frac{\partial}{\partial y}\underset{t\to x}{F^{-1}}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)e^{ixt}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)e^{ixt}dt = \underset{t\to x}{F^{-1}}\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)$$

Теперь оценим норму

$$\left\|D_y(L_j + \lambda E)^{-1} f\right\|_2^2 = \left\langle \underset{t\to x}{F^{-1}}\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y), \underset{t\to x}{F^{-1}}\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y), \frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)\right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)\right|^2 dy\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\widetilde{f}\right\|_2^2 dt \le \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j} + \lambda E)^{-1}\right\|_2^2 \cdot \left\|\widetilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le$$

$$\leq \sup_{t\in R}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j}+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\widetilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt\leq$$

$$\leq \sup_{t\in R}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j}+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{f}(t,y)\right|^2 dt\right)dy=\sup_{t\in R}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{t,j}+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\|f\|_2^2.$$

Отсюда, в силу пункта *(c)* леммы 2.1 имеем

$$\left\|D_y(L_j+\lambda E)^{-1}f\right\|_2^2\leq\frac{c^2}{(c(x_j)+\lambda)}\|f\|_2^2.$$

Из последнего неравенства следует полное доказательство утверждения 2.2.

2.4 Об одном покрытии

Для доказательства основных теорем, кроме вспомогательных лемм приведенных выше, нами будут использованы следующие утверждения [69]:

Лемма 2.5 Пусть выполнены условия *i)-iii).* Тогда справедлива оценка

$$\frac{1}{2(\tau+1)}\leq\frac{c(x)}{c(t)}\leq 2(\tau+1) \tag{2.21}$$

при $|x-t|\leq bd(t)$, $d(t)=\dfrac{1}{\sqrt{c(t)}}$, $b>0,\tau>0$.

Доказательство. Из условия *iii)* имеем, что

$$|c(x)|-|c(t)|\leq\tau c(t).$$

Отсюда

$$c(x)\leq(1+\tau)c(t)$$

или

$$\frac{c(x)}{c(t)}\leq(1+\tau)\ \text{при}\ |x-t|\leq bd(t). \tag{2.22}$$

С другой стороны

$$|c(t)|-|c(x)|\leq\tau c(t)$$

Откуда получаем, что

$$1-\tau\leq\frac{c(x)}{c(t)}\ \text{при}\ |x-t|\leq bd(t) \tag{2.23}$$

Из неравенств (2.22) и (2.23) находим, что

$$1-\tau \le \frac{c(x)}{c(t)} \le 1+\tau \quad \text{при } |x-t| \le bd(t) \tag{2.24}$$

Нетрудно показать, что существуют такие числа τ, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{2(1+\tau)} \le \frac{1}{1-\tau}$$

Пользуясь последним неравенством из (2.24) имеем

$$\frac{1}{2(\tau+1)} \le \frac{c(x)}{c(t)} \le 2(\tau+1) \quad \text{при } |x-t| \le bd(t).$$

Лемма 2.5 доказана.

Теперь, числовую ось покроем отрезками Δ_j:

$$\Delta_j = [x_j - bd(x_j), x_j + bd(x_j)],\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

так, что левый конец Δ^-_{j+1} отрезка Δ_{j+1} совпадает с правым концом Δ^+_j отрезка Δ_j. Существование такого покрытия очевидным образом следует из непрерывности функции $c(x)$.

Лемма 2.6. В силу построения системы отрезков $\{\Delta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ выполняются неравенства:

$$\frac{1}{2(1+\tau)} \le \frac{c(\Delta^{\mp}_j)}{c(x_j)} \le 2(1+\tau); \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{2(1+\tau)} \le \frac{c(x_{j\pm 1})}{c(\Delta^{\mp}_{j+1})} \le 2(1+\tau). \tag{2.26}$$

Из леммы 2.6 следует, что выполняется следующее важное неравенство:

$$\frac{1}{2(1+\tau)} \le \frac{d(x_{j\pm 1})}{d(x_j)} \le 2(1+\tau). \tag{2.27}$$

Докажем неравенство (2.27). Так как по построению $c(\Delta^+_j) = c(\Delta^-_{j+1})$ поэтому из (2.25) следует, что

$$\frac{1}{2(1+\tau)}c(x_j)\le c(\Delta^-_{j+1})\le 2(1+\tau)c(x_j) \qquad (2.28)$$

Из (2.26) находим, что

$$\frac{1}{2(1+\tau)}c(\Delta^-_{j+1})\le c(x_{j+1})\le 2(1+\tau)c(\Delta^-_{j+1}) \qquad (2.29)$$

Из неравенств (2.28) и (2.29) получаем, что

$$\frac{1}{4(1+\tau)^2}c(x_j)\le c(x_{j+1})\le 4(1+\tau)^2c(x_j)$$

Отсюда

$$\sqrt{c(x_{j+1})}\le 2(1+\tau)\sqrt{c(x_j)} \qquad (2.30)$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{c(x_j)}}=d(x_j)$, $\frac{1}{\sqrt{c(x_{j+1})}}=d(x_{j+1})$, то из (2.30) следует, что

$$\frac{d(x_{j+1})}{d(x_j)}\ge\frac{1}{2(1+\tau)}$$

Левое неравенство неравенства (2.27) доказано. Точно также доказывается правое неравенство неравенства (2.27).

Пусть

$$\widetilde{\Delta}_j=\sup p\varphi_j(x)=[x_j-b(1+\frac{1}{2(1+\tau)})d(x_j),\ x_j+b(1+\frac{1}{2(1+\tau)})d(x_j)].$$

Рассмотрим функцию $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(R)$ со следующими свойствами:

$\varphi_j(x)\equiv 1$ при $x\in\Delta_j$,

$0\le\varphi_j\le 1$ при $x\in R$, $\left\|\frac{d}{dx}\varphi_j(x)\right\|_{C(R)}\le\frac{c_0}{b\cdot d(x)}$, $\left\|\frac{d^2}{dx^2}\varphi_j(x)\right\|_{C(R)}\le\frac{c_1}{b^2\cdot d^2(x)}$,

где $C(R)$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|\cdot\|_{C(R)}=\sup\limits_{x\in R}|\cdot|$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.7. Система носителей системы функций $\{\varphi_j(\cdot)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ имеет не более чем трехкратное пересечение, т.е. любая точка $x\in R$ может принадлежать не более чем трем отрезкам из системы отрезков $\{\sup p\varphi_j(\cdot)\}_{j=-\infty}^{\infty}$.

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\Delta}^{-}_{j+1} = [\Delta^{-}_{j+1}, x_{j+1}]$, $\widetilde{\Delta}^{+}_{j+1} = [x_{j-1}, \Delta^{+}_{j-1}]$. Тогда выполняется включение:

$$\sup p\varphi_j(x) \subset \Delta_j \cup \widetilde{\Delta}^{-}_{j+1} \cup \widetilde{\Delta}^{+}_{j-1}$$

В самом деле, так как

$$\sup p\varphi_j(x) = \{x : |x - x_j| \le b(1 + \frac{1}{2(1+\tau)})d(x_j)\},$$

то вследствие неравенства (2.27) получим цепочку оценок доказывающих наше утверждение:

$$|x - x_j| \le bd(x_j) + \frac{b}{2(1+\tau)}d(x_j) \le bd(x_j) + bd(x_{j\pm 1}).$$

2.5 О построении правого обратного оператора

Определим оператор $Kf = \sum\limits_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f$, $f \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$.

Непосредственно можно проверить, что оператор K ограниченный и допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ и $Kf \subseteq D(L)$.

Действуя на Kf оператором $(L + \lambda E)$ имеем:

$$(L + \lambda E)Kf = (L + \lambda E)\sum_{\{j\}} \varphi_j (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f = k(y)(\sum_{\{j\}} \varphi_j (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_{xx} -$$

$$- (\sum_{\{j\}} \varphi_j (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_{yy} + a(x)(\sum_{\{j\}} \varphi_j (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_x +$$

$$+ (c(x) + \lambda)(\sum_{\{j\}} \varphi_j (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f) = k(y)(\sum_{\{j\}} \varphi_j ((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_{xx} +$$

$$+ \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx} (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right)_x) -$$

$$- \sum_{\{j\}} \varphi_j \left((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right)_{yy} - \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{yy} (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f -$$

$$- 2\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_y ((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_y + a(x)\sum_{\{j\}} \varphi_j ((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_x +$$

$$+ a(x)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x ((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f) + \left(c(x) + \lambda\right)(\sum_{\{j\}} \varphi_j (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f) =$$

$$= \sum_{\{j\}} \varphi_j [k(y)((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_{xx} - ((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_{yy} + a(x_j)((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_x +$$

$$+\left(c(x_j)+\lambda\right)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f]+\sum_{\{j\}}\varphi_j(a(x)-a(x_j))((L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f)_x+$$

$$+\sum_{\{j\}}\varphi_j(c(x)-c(x_j))(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+$$

$$+k(y)\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_{xx}(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+2k(y)\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x((L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f)_x-$$

$$-\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_{yy}(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f-2\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_y((L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f)_y. \qquad (2.31)$$

Здесь $(\varphi_j)_y=0, (\varphi_j)_{yy}=0$. Так как $\sum_{\{j\}}\varphi_j(L_j+\lambda E)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f=\sum_{\{j\}}\varphi_j^2 f=f$, то из (2.31) получаем, что

$$(L+\lambda E)Kf=f+Af+Bf, \qquad (2.32)$$

где

$$Af=\sum_{\{j\}}\varphi_j(a(x)-a(x_j))((L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f)_x+$$

$$+\sum_{\{j\}}\varphi_j(c(x)-c(x_j))((L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f, \qquad (2.33)$$

$$Bf=\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+k(y)\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_{xx}(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+$$

$$+2k(y)\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x((L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f)_x. \qquad (2.34)$$

И так, нами доказано следующая

Лемма 2.8. Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда для любой функции $f\in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\left(L+\lambda E\right)Kf=\left[E+A+B\right]f, \qquad (2.35)$$

где операторы A, B определяются по формулам (2.33) - (2.34).

Лемма 2.9. Пусть выполнены условия *i)- iii)*. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, то операторы A и B ограничены, причем $\|A + B\|_{2\to 2} < 1$.

Лемма 2.10. Пусть выполнены условия *i)- iii)* и пусть $\|A + B\|_{2\to 2} < 1$. Тогда

$$\left(L + \lambda E\right)^{-1}_{пр} = K\left[E + A + B\right]^{-1}, \tag{2.36}$$

где $\left(L + \lambda E\right)^{-1}_{пр}$ - правый обратный оператор оператора $\left(L + \lambda E\right)$.

Доказательство. Согласно лемме 2.7 $\|A + B\|_{2\to 2} < 1$. Пользуясь этим неравенством и равенством (2.35), приходим к представлению (2.36).

Доказательство леммы 2.9. Оценим норму оператора A в пространстве $L_2(\Omega)$. Для этого, будем оценивать каждое слагаемое отдельно. Будем заниматься оценкой нормы первого слагаемого:

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 =$$

$$= \int_\Omega \left|\sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right|^2 dxdy \leq$$

$$\leq \sum_{\{j\}} \int_{\Delta_j} \left|\sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right|^2 dxdy \leq$$

$$\leq \sum_{\{j\}} \int_{\Delta_j} \left|\sum_{j-1}^{j+1} \varphi_j (a(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right|^2 dxdy \tag{2.37}$$

Здесь мы воспользовались тем, что на Δ_j количество φ_j отличных от нуля не больше трех. Далее, согласно утверждению 2.2 и лемме 2.7, из (2.37) имеем:

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq 9 \sum_{\{j\}} \left\|\varphi_j (a(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \left|a(x) - a(x_j)\right|^2 \left\|D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \left|a(x) - a(x_j)\right|^2 \left\|D_x (L_j + \lambda E)^{-1}\right\|_2^2 \cdot \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \left|a(x) - a(x_j)\right|^2 \cdot \frac{1}{\left|a(x_j)\right|^2} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \leq 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{\left|a(x) - a(x_j)\right|^2}{\left|a(x_j)\right|^2} \sum_j \left\|\varphi_j f_j\right\|_2^2 =$$

$$= 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{\left|a(x) - a(x_j)\right|^2}{\left|a(x_j)\right|^2} \left\|f\right\|_2^2 .$$

Здесь учитывалось $\sum_{\{j\}} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 = \left\|f\right\|_2^2$. Отсюда, окончательно, получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(a(x) - a(x_j)\right) D_x \left(L_j + \lambda \mathrm{E}\right)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 \leq 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{\left|a(x) - a(x_j)\right|^2}{\left|a(x_j)\right|^2} \left\|f\right\|_2^2 \qquad (2.38)$$

Теперь, оценим норму второго слагаемого

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(c(x) - c(x_j)\right)\left(L_j + \lambda \mathrm{E}\right)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2$$

оператора A.

Здесь, учитывая утверждение 2.2 и повторяя выкладки, использованные при доказательстве неравенства (2.38), можно убедиться, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(c(x) - c(x_j)\right)\left(L_j + \lambda \mathrm{E}\right)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 \leq 9c \cdot \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{\left|c(x) - c(x_j)\right|^2}{c^2(x_j)} \sum_{\{j\}} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 .$$

Так как $\sum_{\{j\}} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 = \left\|f\right\|_2^2$, то из последнего неравенства находим:

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(c(x) - c(x_j)\right)\left(L_j + \lambda \mathrm{E}\right)^{-1} \varphi_j f\right\|_2^2 \leq 9c \cdot \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{\left|c(x) - c(x_j)\right|^2}{c^2(x_j)} \left\|f\right\|_2^2 \qquad (2.39)$$

Из неравенств (2.38) и (2.39) следует, что

$$\|Af\|_2^2 = \left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j(a(x) - a(x_j))D_x(L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_j(c(x) - c(x_j))(L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 2\left(\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j(a(x) - a(x_j))D_x(L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 + \left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j(c(x) - c(x_j))(L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\right) \le$$

$$\le 18\left[\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\frac{|a(x) - a(x_j)|^2}{|a(x_j)|^2} + c\cdot\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\frac{|c(x) - c(x_j)|^2}{c^2(x_j)}\right]\|f\|_2^2 \qquad (2.40)$$

И так учитывая условия $i) - iii)$, окончательно, находим:

$$\|A\|_{2\to 2}^2 \le 18\sup_{\{j\}}\left(\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\frac{|a(x) - a(x_j)|^2}{|a(x_j)|^2} + c\cdot\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\frac{|c(x) - c(x_j)|^2}{c^2(x_j)}\right) \le$$

$$\le 18\sup_{\{j\}}\left(\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\frac{|a(x) - a(x_j)|^2 + |c(x) - c(x_j)|}{|a(x_j)|^2} + c\cdot\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\left(\frac{|c(x) - c(x_j)|^2 + |a(x) - a(x_j)|^2}{c^2(x_j)}\right)^2\right).$$

Воспользовавшись здесь условиями $ii) - iii)$, получим

$$\|A\|_{2\to 2}^2 \le 18\sup_{\{j\}}\left(\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\frac{\tau c(x_j)}{c_0 c(x_j)} + c\cdot\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}\left(\frac{\tau c(x_j)}{c(x_j)}\right)^2\right) \le 18\left(\frac{\tau}{c_0} + c\tau^2\right) \le 18c_4(\tau + \tau^2) \qquad (2.41)$$

где $c_4 = \max\{\frac{1}{c_0}, c\}$, а $c > 0$ – постоянная из пункта (*a*) утверждения 2.2

Для справедливости леммы 2.9, теперь надо брать $\tau_0 = c(\tau + \tau^2) < \frac{1}{2}$.

Теперь оценим норму оператора B. Рассмотрим первое слагаемое. Согласно лемме 2.7 и утверждению 2.2 имеем:

$$\left\|\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le \left\|\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x |a(x)| (L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9\sum_{\{j\}} \left\|(\varphi_j)_x a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^2}{b^2 d^2(x_j)} |a(x)|^2 \left\|(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d^2(x_j)} \left\|(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2 \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 .$$

Отсюда и в силу (2.12) получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d^2(x_j)} \cdot \frac{1}{(c(x_j)+\lambda)^2} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d^2(x_j)\cdot(c(x_j)+\lambda)^2} \sum_{\{j\}} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 .$$

Из последнего неравенства, учитывая условия $i) - iii)$, имеем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d^2(x_j)\cdot(c(x_j)+\lambda)^2} \left\|f\right\|_2^2 \le \frac{c(\tau+1)}{b^2}. \qquad (2.42)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое оператора B.

$$\left\|k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx}(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9\sum_{\{j\}} \left\|k(y)(\varphi_j)_{xx}(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9c\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \left|(\varphi_j)_{xx}\right|^2 \left\|(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2 \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9\sum_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^4}{b^4 d^4(x_j)} \cdot \frac{1}{(c(x_j)+\lambda)^2} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^4}{b^4 d^4(x_j)(c(x_j)+\lambda)^2} \sum_{\{j\}} \left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar\Delta_j} \frac{c^4}{b^4 d^4(x_j)(c(x_j)+\lambda)^2} \left\|f\right\|_2^2 .$$

Отсюда пользуясь условиям $i) - iii)$, находим:

$$\left\| \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx} (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le \frac{c}{b^4} \| f \|_2^2 \tag{2.43}$$

Для третьего слагаемого оператора B, непосредственно вычисляя, получаем, что

$$\left\| 2k(y) \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x D_x \left(L + \lambda E \right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le .$$

$$\le 18 \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2}{b^2 d^2 (x_j) \left| a(x_j) \right|^2} \| f \|_2^2 \le \frac{c}{b^2} \| f \|_2^2 \tag{2.44}$$

В результате из (2.42) - (2.44) получаем, что

$$\| B \|_2^2 \le 9 \left[\sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2 \left| a(x) \right|^2}{b^2 d^2 (x_j) \left(c(x_j) + \lambda \right)^2} + \right.$$

$$\left. + \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^4 \left| a(x) \right|^2}{b^4 d^4 (x_j) \left(c(x_j) + \lambda \right)^2} + \sup_{\{j\}} \sup_{(x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2}{b^2 d^2 (x_j) \left| a(x_j) \right|^2} \right] \le$$

$$\le \left(\frac{c(\tau + 1)}{b^2} + \frac{c}{b^4} + \frac{c}{b^2} \right) \le c \left(\frac{\tau + 1}{b^2} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} \right) \tag{2.45}$$

Для справедливости леммы 2.9 теперь надо брать b таким образом, чтобы

$$\| B \|_{2 \to 2} < \frac{1}{2}.$$

2.6 Представление обратного оператора и доказательства основных теорем

Осталось показать, что $KerL = \{0\}$.

Для этого, предположим, что

$$\widetilde{a}(x)=\sum_{\{j\}} a(x_j)\varphi_j^2, \;\; \widetilde{c}(x)=\sum_{\{j\}} c(x_j)\varphi_j^2$$

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)u=k(y)u_{xx}-u_{yy}+\widetilde{a}(x)u_x+\widetilde{c}(x)u+\lambda u, \; u\in C_0^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$\left(\widetilde{L}'+\lambda E\right)u=k(y)u_{xx}-u_{yy}-\widetilde{a}(x)u_x+\widetilde{c}(x)u-\left(\widetilde{a}(x)\right)'_x u+\lambda u, \; u\in C_0^\infty(\overline{\Omega}),$$

где $\widetilde{L}'$ – формально сопряженный оператор. Заметим, что на функциях $u,v\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ выполняется равенство

$$\left\langle \widetilde{L}u,v\right\rangle=\left\langle u,\widetilde{L}'v\right\rangle,$$

где $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ – множество бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Операторы $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}'$ допускают замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ и замыкания этих операторов соответственно также обозначим через $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}'$.

Введем оператор

$$M^{\#}f=\sum_{\{j\}}\varphi_j\left(L'_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f, \quad f\in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

где $L_j'^{-1}$ – оператор, обратный к оператору

$$L'_j u=k(y)u_{xx}-u_{yy}-a(x_j)u_x+c(x_j)u, \; u\in D(L'_j).$$

Лемма 2.11. Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда для любой функции $f\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ справедливы равенства

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)Kf=\left[E+A_1+B_1\right]f, \tag{2.46}$$

$$\left(\widetilde{L}'+\lambda E\right)M^{\#}f=\left[E+A_2+B_2\right]f, \tag{2.47}$$

где

$$Kf=\sum_{\{j\}}\varphi_j\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f,$$

$$A_1 f=\sum_{\{j\}}\varphi_j\left(\widetilde{a}(x)-a(x_j)\right)\left[\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right]_x+\sum_{\{j\}}\varphi_j\left(\widetilde{c}(x)-c(x_j)\right)\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f,$$

$$B_1 f = \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \widetilde{a}(x)\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f + k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx}\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f +$$
$$+ 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right]_x,$$

$$A_2 f = \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(a(x_j) - \widetilde{a}(x)\right)\left[\left(L'_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right]_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\widetilde{c}(x) - c(x_j)\right)\left(L'_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f,$$

$$B_2 f = \sum_{\{j\}} \widetilde{a}(x)(\varphi_j)_x\left(L'_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f - \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\widetilde{a}(x)\right)_x\left(L'_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f +$$
$$+ 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x\left(\left(L'_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_x + k(y)\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\left(L'_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{xx}$$

Здесь учтено, что $(\varphi_j)_{yy} = 0$, $(\varphi_j)_y = 0$.

Доказательство. Действуя на Kf оператором $\left(\widetilde{L} + \lambda E\right)$ имеем:

$$\left(\widetilde{L} + \lambda E\right)Kf = \left(\widetilde{L} + \lambda E\right)\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f =$$
$$= k(y)\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{xx} - \left(\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{yy} + \widetilde{a}(x)\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_x +$$
$$+ \widetilde{c}(x)\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right) + \lambda\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right) =$$
$$= k(y)[\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx}\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{xx}] -$$
$$- \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{yy} + \sum_{\{j\}} \widetilde{a}(x)(\varphi_j)_x\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f + \sum_{\{j\}} \widetilde{a}(x)\varphi_j\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_x +$$
$$+ \sum_{\{j\}} \widetilde{c}(x)\varphi_j\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right) + \lambda\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right) =$$
$$= \sum_{\{j\}} \varphi_j\left[k(y)\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{xx} - \left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_{yy} +\right.$$
$$\left. + a(x_j)\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)_x + \left(c(x_j) + \lambda\right)\left(\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right)\right] +$$
$$+ \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\widetilde{a}(x) - a(x_j)\right)\left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right]_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\widetilde{c}(x) - c(x_j)\right)\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f +$$
$$+ \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \widetilde{a}(x)\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f + k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx}\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f +$$
$$+ 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x\left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right]_x =$$

$$= \sum_{\{j\}} \varphi_j^2 f + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{a}(x) - a(x_j)\right)\left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x +$$

$$+ \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{c}(x) - c(x_j)\right)\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f +$$

$$+ \sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \widetilde{a}(x)\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx}\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f +$$

$$+ 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x .$$

Отсюда следует, что, $\left(\widetilde{L} + \lambda E\right)Kf = \left[E + A_1 + B_1\right] f$, здесь учитывалось, что $\sum_{\{j\}} \varphi_j^2 f = f$.

Точно так же действуя оператором $\left(\widetilde{L}' + \lambda E\right)$ на $M^{\#} f$ получаем:

$$\left(\widetilde{L}' + \lambda E\right)M^{\#} f = \left(\widetilde{L}' + \lambda E\right)\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f =$$

$$= k(y)\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{xx} - \left(\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{yy} -$$

$$- \widetilde{a}(x)\left(\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x + \left(\widetilde{c}(x) + \lambda\right)\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f -$$

$$- \left(\widetilde{a}(x)\right)_x \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f = k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_{xx}\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f +$$

$$+ 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x + k(y)\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{xx} - \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{yy} -$$

$$- \widetilde{a}(x)\left(\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x\right) -$$

$$- \sum_{\{j\}} \left(\widetilde{a}(x)\right)_x \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + \left(\widetilde{c}(x) + \lambda\right)\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f =$$

$$= \sum_{\{j\}} \varphi_j \Big[k(y)\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{xx} - \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{yy} - a(x_j)\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x +$$

$$+ \left(c(x_j) + \lambda\right)\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\Big] + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(a(x_j) - \widetilde{a}(x)\right)\left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x -$$

$$+ \sum_{\{j\}} \widetilde{a}(x)(\varphi_j)_x \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f - \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{a}(x)\right)_x \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f +$$

$$+ \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{c}(x) - c(x_j)\right)\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x +$$

$$+ k(y)\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{xx} = \sum_{\{j\}} \varphi_j^2 f + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(a(x_j) - \widetilde{a}(x)\right)\left[\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x +$$

$$+ \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{c}(x) - c(x_j)\right)\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f -$$

$$- \sum_{\{j\}} \widetilde{a}(x) \varphi_{jx} \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f - \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{a}(x)\right)_x \left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f$$

$$+ 2k(y)\sum_{\{j\}} (\varphi_j)_x \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_x + k(y)\sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\left(L_j' + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right)_{xx}$$

Так как $\sum_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1$ то из последнего равенства имеем:

$$\left(\widetilde{L}' + \lambda E\right) M^{\#} f = f + \left(A_2 + B_2\right) f$$

Лемма 2.12. Пусть выполнены условия *i)- iii)*. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, то существует операторы A_1, B_1, A_2, B_2 с нормами $\|A_i + B_i\|_2 < \frac{1}{2}$, $i = 1,2$ такие, что выполняются равенства

$$\left(\widetilde{L} + \lambda E\right)_{np}^{-1} = K\left[E + A_1 + B_1\right]^{-1} \tag{2.48}$$

$$\left(\widetilde{L}' + \lambda E\right)_{np}^{-1} = M^{\#}\left[E + A_2 + B_2\right]^{-1} \tag{2.49}$$

где $\left(\widetilde{L} + \lambda E\right)_{np}^{-1}$, $\left(\widetilde{L}' + \lambda E\right)_{np}^{-1}$ – правые обратные операторы, соответственно к операторам $\widetilde{L} + \lambda E$, $\widetilde{L}' + \lambda E$.

Доказательство. Оценим норму $\|A_1\|_2$. Для этого, распишем оператор A_1:

$$\|A_1 f\|_2^2 = \left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{a}(x) - a(x_j)\right)\left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\widetilde{c}(x) - c(x_j)\right)\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2. \tag{2.50}$$

Оценим норму оператора A_1 в $L_2(\Omega)$. Для этого будем оценивать каждое слагаемое отдельно.

Используя лемму 2.7, получаем, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j(\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 =$$

$$= \int_{\Omega} \left| \sum_{\{j\}} \varphi_j(\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right|^2 dxdy \le$$

$$\le 9 \sum_{\{j\}} \int_{\Omega_j} \left| \sum_{\{j\}} \varphi_j(\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right|^2 dxdy. \qquad (2.51)$$

Здесь мы воспользовались тем, что на Ω_j количество φ_j отличных от нуля не больше трех, где $\Omega_j = \{(x, y) : x \in \Delta_j, -1 < y < 1\}$.

На основании выше сказанного из (2.51) имеем:

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j(\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le$$

$$\le 9 \sum_{\{j\}} \left\| \varphi_j(\tilde{a}(x) - a(x_j)) D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le$$

$$\le 9 \sum_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \left| \tilde{a}(x) - a(x_j) \right|^2 \left\| D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le$$

$$\le 9 \sum_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \left| \tilde{a}(x) - a(x_j) \right|^2 \left\| D_x (L_j + \lambda E)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \left\| \varphi_j f \right\|_2^2. \qquad (2.52)$$

Согласно лемме 2.7 можно построить систему функций $\{\varphi_j(\cdot)\}_{j=-\infty}^{\infty}$, что соответствующая ей системы носителей имеет не более чем трехкратное пересечение, т.е. на $\bar{\Delta}_j$ только $\varphi_{j-1}(x) \ne 0, \varphi_j(x) \ne 0, \varphi_{j+1}(x) \ne 0$. Следовательно, $\tilde{a}(x)$ на отрезке $\bar{\Delta}_j$ имеет вид:

$$\tilde{a}(x) = a(x_{j-1}) \varphi_{j-1}^2(x) + a(x_j) \varphi_j^2(x) + a(x_{j+1}) \varphi_{j+1}^2(x).$$

Отсюда и учитывая, что $\sum_{i=j-1}^{j+1} \varphi_i^2(x) \equiv 1$, $x \in \bar{\Delta}_j$ имеем:

$$\left|\tilde{a}(x) - a(x_j)\right| = \left|a(x_{j-1})\varphi_{j-1}^2 + a(x_j)\varphi_j^2 + a(x_{j+1})\varphi_{j+1}^2 - a(x_j)\right| =$$
$$= \left|a(x_{j-1})\varphi_{j-1}^2 + a(x_j)\varphi_j^2 + a(x_{j+1})\varphi_{j+1}^2 - a(x_j)\cdot\sum_{i=j-1}^{j+1}\varphi_i^2\right| \le$$
$$\le \left|(a(x_{j-1}) - a(x_j))\varphi_{j-1}^2\right| + \left|a(x_j)\varphi_j^2 - a(x_j)\varphi_j^2\right| + \left|(a(x_{j+1}) - a(x_j))\varphi_{j+1}^2\right| \le$$
$$\le c\left(\left|a(x_{j-1}) - a(x_j)\right| + \left|a(x_{j+1}) - a(x_j)\right|\right), \qquad (2.53)$$

где $c = \sup_{\{j\}}\sup_{x\in R}\left|\varphi_j(x)\right|$.

Нетрудно проверить, что:

$$\left|a(x_{j-1}) - a(x_j)\right| \le \left|a(x_{j-1}) - a(\Delta^+_{j-1})\right| + \left|a(\Delta^+_{j-1}) - a(x_j)\right|, \qquad (2.54)$$

где Δ^+_{j-1} – правый конец отрезка $\overline{\Delta}_{j-1}$.

Рассмотрим первое слагаемое неравенства (2.54):

$$\left|a(x_{j-1}) - a(\Delta^+_{j-1})\right| \le \max_{x\in[x_{j-1},\Delta^+_{j-1}]}\left|a(x) - a(\Delta^+_{j-1})\right| \le \sqrt{\tau}\sqrt{c(\Delta^+_{j-1})}\,.$$

Здесь мы воспользовались условием *iii)*. Из последнего неравенства и учитывая условие *ii)* получаем, что

$$\left|a(x_{j-1}) - a(\Delta^+_{j-1})\right| \le \frac{1}{\sqrt{c_0}}\cdot\sqrt{\tau}\left|a(\Delta^+_{j-1})\right|. \qquad (2.55)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое неравенства (2.54):

$$\left|a(\Delta^+_{j-1}) - a(x_j)\right| \le \max_{x\in[\Delta^+_{j-1},x_j]}\left|a(x) - a(x_j)\right|. \qquad (2.56)$$

Как известно, числовую ось можно покрыть отрезками Δ_j $(j = 0,\pm 1,\pm 2,...)$, так, что правый конец Δ^+_{j-1} отрезка Δ_{j-1} совпадал с левым концом Δ^-_j отрезка Δ_j. Существование такого покрытия очевидным образом следует из непрерывности функции $c(x)$. Отсюда и из (2.56) имеем:

$$\left|a(\Delta^+_{j-1}) - a(x_j)\right| \le \max_{x\in[\Delta^+_{j-1},x_j]}\left|a(x) - a(x_j)\right| = \max_{x\in[\Delta^-_j,x_j]}\left|a(x) - a(x_j)\right|. \qquad (2.57)$$

Теперь, согласно условию *iii)* находим, что

$$\left|a(\Delta^+_{j-1}) - a(x_j)\right| \le \max_{x\in[\Delta^-_j, x_j]}\left|a(x) - a(x_j)\right| \le \sqrt{\tau}\sqrt{c(x_j)}\,.$$

Из последнего неравенства, учитывая условие *ii)*, получаем

$$\left|a(\Delta^+_{j-1}) - a(x_j)\right| \le \frac{1}{\sqrt{c_0}}\cdot\sqrt{\tau}\left|a(x_j)\right|. \tag{2.58}$$

Из этого неравенства получаем, что

$$\left|a(\Delta^+_{j-1})\right| - \left|a(x_j)\right| \le \frac{1}{\sqrt{c_0}}\cdot\sqrt{\tau}\left|a(x_j)\right| = c_1\sqrt{\tau}\left|a(x_j)\right|.$$

Отсюда

$$\left|a(\Delta^+_{j-1})\right| \le (c_1\sqrt{\tau}+1)\left|a(x_j)\right| \le c_2(\sqrt{\tau}+1)\left|a(x_j)\right|, \tag{2.59}$$

где $c_2 = \max\{c_1, 1\}$.

Из неравенства (2.55) пользуясь (2.59) находим

$$\left|a(x_{j-1}) - a(\Delta^+_{j-1})\right| \le c_1\cdot\sqrt{\tau}\cdot c_2(\sqrt{\tau}+1)\cdot\left|a(x_j)\right| \le c_3\sqrt{\tau}\cdot(\sqrt{\tau}+1)\cdot\left|a(x_j)\right|. \tag{2.60}$$

Далее, из (2.55), (2.58) и (2.60) имеем:

$$\left|a(x_{j-1}) - a(x_j)\right| \le c_3\sqrt{\tau}\cdot(\sqrt{\tau}+1)\cdot\left|a(x_j)\right| + c_1\sqrt{\tau}\cdot\left|a(x_j)\right| \le$$
$$\le c_4[(\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}+1)+\sqrt{\tau}]\cdot\left|a(x_j)\right|,$$

где $c_4 = \max\{c_3, c_1\}$.

$$\left|a(x_{j-1}) - a(x_j)\right| \le c_4(\sqrt{\tau}[(\sqrt{\tau}+1)+1])\cdot\left|a(x_j)\right| \le c_4\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}+2)\cdot\left|a(x_j)\right|. \tag{2.61}$$

Пользуясь очевидным неравенством

$\sqrt{\tau}+2 \le 3\sqrt{\tau+2}$, при $0<\tau<1$

из неравенства (2.61) находим, что

$$\left|a(x_{j-1}) - a(x_j)\right| \le 3c_4\cdot\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{\tau+2}\cdot\left|a(x_j)\right| = c_5\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{\tau+2}\cdot\left|a(x_j)\right| \tag{2.62}$$

Точно также повторяя все выкладки и рассуждения, которые использованы при доказательстве неравенства (2.62) получаем, что

$$\left|a(x_{j+1}) - a(x_j)\right| \le c_6\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{\tau+2}\cdot\left|a(x_j)\right| \tag{2.63}$$

Из неравенства (2.63) учитывая (2.61) и (2.62) имеем

$$\left|\tilde{a}(x) - a(x_j)\right| \le c \cdot c_7 \sqrt{\tau} \cdot \sqrt{\tau + 2}\left|a(x_j)\right| \le c_8 \sqrt{\tau} \cdot \sqrt{\tau + 2}\left|a(x_j)\right|$$

или

$$\left|\tilde{a}(x) - a(x_j)\right| \le c\sqrt{\tau(\tau + 2)}\left|a(x_j)\right|, \qquad (2.64)$$

где $c = c_8$.

Здесь учитывалось, что

$$\frac{1}{2(\tau + 1)} \le \frac{c(x)}{c(t)} \le 2(\tau + 1) \text{ при } |x - t| \le bd(t). \qquad (2.65)$$

Из неравенства (2.52) с помощью неравенств (2.13) и (2.64) получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j(\tilde{a}(x) - a(x_j))D_x(L_j + \lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9\frac{c\tau(2 + \tau)\left|a(x_j)\right|^2}{\left|a(x_j)\right|^2}\|f\|_2^2 \le 9c\tau(2 + \tau)\|f\|_2^2, \qquad (2.66)$$

Точно также, повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (2.66), находим, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j(\tilde{c}(x) - c(x_j))(L_j + \lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9c\tau^2(2 + \tau)\|f\|_2^2. \qquad (2.67)$$

В результате, из равенства (2.50) с помощью (2.66)-(2.67) получаем неравенство

$$\|A_1 f\|_2^2 \le 9c\left(\tau(2 + \tau) + \tau^2(2 + \tau)\right)\|f\|_2^2. \qquad (2.68)$$

Отсюда

$$\|A_1\|_{2\to 2}^2 \le 9c\left(\tau(2 + \tau) + \tau^2(2 + \tau)\right). \qquad (2.69)$$

Оценим норму оператора B_1. Рассмотрим первое слагаемое:

$$
\left\|\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x\tilde a(x)\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le\left\|\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x\left|\tilde a(x)\right|\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le
$$

$$
\le 9\sum_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{c^2}{b^2d(x_j)^2}\left|\tilde a(x)\right|^2\left\|\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le
$$

$$
\le 9\sum_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{c^2\left|\tilde a(x)\right|^2}{b^2d(x_j)^2}\left\|\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2\cdot\left\|\varphi_j f\right\|_2^2\le
$$

$$
\le 9\sup_{\{j\}}\left(\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{c^2\left|\tilde a(x)\right|^2}{b^2d(x_j)^2}\cdot\frac{1}{\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}\right)\sum_{\{j\}}\left\|\varphi_j f\right\|_2^2\le
$$

$$
\le 9\sup_{\{j\}}\left(\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{c^2\left|\tilde a(x)\right|^2}{b^2d(x_j)^2}\right)\frac{1}{\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}\left\|f\right\|_2^2. \tag{2.70}
$$

С другой стороны, имеем:

$$
\left|\tilde a(x)\right|=\left|\sum_{j-1}^{j+1}a(x_j)\varphi_j\right|\le\left|a(x_{j-1})\right|+\left|a(x_j)\right|+\left|a(x_{j+1})\right|,
$$

при $x\in\bar\Delta_j$.

Отсюда согласно неравенству (2.65) и условию *ii)* имеем:

$$
\left|\tilde a(x)\right|\le\left(4\tau+5\right)\left|a(x_j)\right|. \tag{2.71}
$$

В результате из (2.40) с помощью (2.12), (2.71) получаем, что

$$
\left\|\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x\tilde a(x)\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le
$$

$$
\le 9\sup_{\{j\}}\frac{c(4\tau+5)^2\left|a(x_j)\right|^2}{b^2d(x_j)^2\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}\left\|f\right\|_2^2\le\frac{c\left(4\tau+5\right)^2}{b^2}, \tag{2.72}
$$

Далее, пользуясь оценкой (2.12) и леммой 2.7, непосредственно вычисляя, имеем:

$$\left\|k(y)\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_{xx}\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9\sum_{\{j\}}\left\|k(y)(\varphi_j)_{xx}\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9c\sum_{\{j\}}\max_{x\in\bar{\Delta}_j}\left|(\varphi_j)_{xx}\right|^2\left\|\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2\cdot\left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le 9\sum_{\{j\}}\frac{c^4}{b^4 d(x_j)^4}\cdot\frac{1}{\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}\cdot\left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9\sup_{\{j\}}\frac{c^4}{b^4 d(x_j)^4}\cdot\frac{1}{\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}\sum_{\{j\}}\cdot\left\|\varphi_j f\right\|_2^2 \le$$

$$\le 9\sup_{\{j\}}\frac{c^4}{b^4 d(x_j)^4}\cdot\frac{1}{\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}\left\|f\right\|_2^2 \le \frac{c}{b^4}\left\|f\right\|_2^2. \qquad (2.73)$$

Далее, пользуясь утверждением 2.2, леммой 2.7 и условиям $i)-ii)$ получаем, что

$$\left\|2k(y)\sum_{\{j\}}(\varphi_j)_x D_x\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2 \le 36\sup_{\{j\}}\frac{c^2}{b^2 d^2(x_j)}\cdot\frac{1}{a^2(x_j)}\left\|f\right\|_2^2 \le \frac{c}{b^2}\left\|f\right\|_2^2. \qquad (2.74)$$

Неравенства (2.72)-(2.74) дают, что

$$\left\|B_1\right\|_{2\to 2}^2 \le \frac{c\left(4\tau+5\right)^2}{b^2}+\frac{12c}{b^4}+\frac{c}{b^2}. \qquad (2.75)$$

Теперь для справедливости леммы 2.12 выберем τ и b так, чтобы

$$\left\|A_1+B_1\right\|_{2\to 2} \le \left\|A_1\right\|_{2\to 2}+\left\|B_1\right\|_{2\to 2} < \frac{1}{2}. \qquad (2.76)$$

Повторяя выкладки и рассуждения использованны при доказательстве неравенства (2.76), получаем, что

$$\left\|A_2+B_2\right\|_{2\to 2} < \frac{1}{2}\ . \qquad (2.77)$$

Лемма 2.13. Пусть выполнены условия леммы 2.9. Тогда справедливо равенство

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)^{-1}=K[E+A_1+B_1]^{-1}, \qquad (2.78)$$

где $\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)^{-1}$ – обратный оператор оператора $\widetilde{L}+\lambda E$.

Доказательство. Для полного доказательства леммы 2.13, нам остается показать, что $Ker\widetilde{L}=\{0\}$. Из общей теории операторов известны следующие утверждения:

$$L_2(\Omega)=R(\widetilde{L})\dot{+}N(\widetilde{L}^*),\ L_2(\Omega)=R(\widetilde{L}')\dot{+}N\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)$$

где $\dot{+}$ ортогональное дополнение, $N(\widetilde{L}^*)=Ker\widetilde{L}^*$, $N\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)=Ker\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)$.

Из равенств (2.48), (2.49) следует, что

$$N(\widetilde{L}^*)\equiv 0,\ N\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)\equiv 0. \qquad (2.79)$$

Так как $D\left(\widetilde{L}\right)\subseteq D\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)$, то из равенства (2.79) следует, что

$$N(\widetilde{L})\equiv 0. \qquad (2.80)$$

Учитывая (2.79) из (2.80) имеем:

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)^{-1}=K[E+A_1+B_1]^{-1}.$$

Лемма 2.13 доказана.

Лемма 2.14. Пусть выполнены условия леммы 2.11. Тогда $KerK=\{0\}$.

Доказательство. Поскольку $Ker[E+A_1+B_1]\equiv 0$ то из (2.78) и (2.80) следует, что

$$KerK=\{0\}.$$

Лемма 2.14 доказана.

Лемма 2.15. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда оператор L допускает замыкание.

Доказательство. Пусть $u_n\to 0,\ Lu_n\to \upsilon$ $\left(u\in L_2(\Omega),\ u_n\in C_0^\infty(\overline{\Omega}),\ n=1,2,...\right)$. Из леммы 2.10 следует, что u_n представима в виде $u_n=K\upsilon_n,\ \upsilon_n\in L_2(\Omega)$, (так как $C_0^\infty(\overline{\Omega})\subset D(\widetilde{L})=R(K)$). Поэтому при $n\to\infty$ имеем

$$Lu_n = LK\upsilon_n = [E + A + B]\upsilon_n \to \upsilon$$

Отсюда

$$\upsilon_n \to [E + A + B]^{-1}\upsilon, \; K\upsilon_n \to K[E + A + B]^{-1}\upsilon$$

Из того $u_n = K\upsilon_n \to 0$ получаем, что $K[E + A + B]^{-1}\upsilon = 0$. Откуда заключаем $\upsilon = 0$.

Лемма 2.15 доказана.

Лемма 2.16. Пусть выполнены условия леммы 2.14. Тогда $KerL \equiv \{0\}$.

Доказательство. Пусть $Lu = 0$, $u \in D(L)$, $u \neq 0$. Тогда для этой функции существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$u_n \to u, Lu_n \to Lu, \; u_n \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega}) \subset D(L).$$

Теперь используя представление $u_n = K\upsilon_n$, $\upsilon_n \in L_2(\Omega)$ получаем

$$Lu_n = LK\upsilon_n = [E + A + B]\upsilon_n \to 0 \tag{2.81}$$

при $n \to \infty$. Поскольку $Ker[E + A + B] \equiv 0$, то из (2.81) следует, что $\upsilon_n \to 0$. Отсюда и из представления $u_n = K\upsilon_n$ получаем, что $u_n \to 0$. Следовательно $u = 0$.

Лемма 2.16 доказана.

Доказательства теорем 2.1-2.3. Доказательства теорем следует из лемм 2.10, 2.15 и 2.16.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена исследованию вопросов о существовании, единственности и дифференциальных свойствах решений дифференциальных уравнений смешанного типа, заданных в неограниченной области с сингулярными коэффициентами.

Обзор литературы показывает, что теория дифференциальных уравнений смешанного типа в случае неограниченной области с быстро растущими коэффициентами имеет сравнительно недолгую историю и что для сингулярных дифференциальных операторов смешанного типа, т.е. дифференциальных операторов заданных в неограниченной области такие вопросы как 1) замыкаемость оператора; 2) существование резольвенты; 3) дискретность спектра; 4) оценки собственных и сингулярных чисел недостаточно изучены.

В работе рассматривается оператор

$$Lu = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(\cdot)u_x + c(\cdot)u,$$

определенный в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $u(x,y)$, финитных по переменной x. Здесь коэффициент $k(y)$ является ограниченной и кусочно-непрерывной функцией. Коэффициенты $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ являются непрерывными функциями в рассматриваемой области и удовлетворяют условиям, указанным в работе.

В зависимости от знака коэффициента $k(y)$ рассматриваемый оператор может соответсвенно принадлежат эллиптическому, параболическому, гиперболическому и смешанному типу.

Результаты исследования позволили сформулировать следующие основные научные итоги диссертационной работы:

– на плоскости, в терминах коэффициентов уравнения получено достаточное условие, обеспечивающее существование и единственность решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа;

– доказано замыкаемость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе;

– найдены условия, обеспечивающие непрерывную обратимость одного класса сингулярных операторов смешанного типа, заданных на полосе, коэффициенты которых зависят только от одной переменной;

– для данных уравнений получены коэрцитивные оценки решений.

Полученные результаты полностью решают поставленные задачи и являются новыми.

Диссертационная работа состоит из введения и двух разделов, заключения и списка использованных литературных источников.

В первом разделе исследуется вопрос о существовании, единственности решения одного класса сингулярных уравнений смешанного типа на всей плоскости. Основной метод применяемый при доказательстве полученных результатов является метод локальных оценок.

Во втором разделе рассмотрены вопросы о замыкаемости и непрерывной обратимости одного класса операторов смешанного типа на полосе.

Все утверждения, изложенные в работе, обоснованы, сформулированы в виде теорем и математически строго доказаны. Результаты диссертации являются существенным вкладом в теорию развития дифференциальных уравнений смешанного типа заданных в неограниченной области.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Чаплыгин С.А. О газовых струях. – М.;-Л.: ГИТА, 1949. – 144 с.

2 Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. – М.;-Л.: Гостехиздат, 1947. – 192 с.

3 Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.;-Л.: ИЛ, 1957. – 440 с.

4 Gellerstedt S. // Arkiv Mat. Ast. Och. Fisik. – 1937. – Vol.25 (A), №29. – P.54-60.

5 Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.:Наука, 1973. – 712 с.

6 Лаврентьев М.А. К проблеме уравнений смешанного типа // ДАН СССР. – 1950. – Т. 70, №3. – С. 373-376.

7 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР. – 1959. – 164 с.

8 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука. – 1981. – 448 с.

9 Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа // Успехи математических наук. – 1953. – Т. 8, № 2 (54). – С. 160.

10 Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. – 1969. – Т.5, №1. – С.44-59.

11 Нахушев А.М. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифф. уравнения. – 2001. – Т.37, №11. – С. 44-53.

12 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.:Наука. – 1970. – 296 с.

13 Смирнов М.М. Краевая задача для уравнения смешанного типа 2-го рода со смещением // Дифф. уравнения. – 1977. – Т.15, №5. – С.931-943.

14 Кальменов Т.Ш., Муратбеков М.Б. Спектральные свойства оператора смешанного типа. – Шымкент. – 1997. – 80 с.

15 Моисеев Е.И. Некоторые теоремы единственности для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.238, №3. – С.531-533.

16 Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.:Изд-во МГУ. – 1988. – 152 с.

17 Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН. – 1979. – 240 с.

18 Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. – Ташкент: ФАН. – 1974. – 156 с.

19 Салахитдинов М.С., Саматов Т.С. О краевых задачах для уравнения смешанного типа // Сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – Ташкент: ФАН. – 1972. – Т.2. – С.164-174.

20 Morawetz, C.S. Note on maximum principle and a uniqueness theorem for on elliptic-hyperbolic equation // Proc. Hoy. Soc. – 1956. – Vol.236, №1024. – P.141-144.

21 Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-

Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13, №8. – С.1718-1725.

22 Хайруллин, Р. С. Задача Трикоми в классе функций, неограниченных на характеристике // Известия вузов. Математика. – 2004. – №4. – С. 3-7.

23 Рузиев М.Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // Изв. вузов. Матем. – 2010, №11. – С.41-49.

24 Рузиев М.Х. О краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Матем. Заметки. – 2012. – Т.92, №1. – С.74–83.

25 М. Е. Лернер, О. А. Репин. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т.40, №6. – С. 1260-1275.

26 Everitt W.N. Girtz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. – 1971. – Vol.23(3). – P.301-324.

27 Everitt W.N. Girtz M. On some properties of the powers of a formally seet-adjoint differential expression // Proc. London Math. Soc. – 1971. Vol.23(3). – P.301-324.

28 Отелбаев М. Оценки собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1976. – Т.20, №6. –С.859-867.

29 Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов // ДАН СССР. – 1977. – Т243, №3. – С.540-543.

30 Otelbaev M. Coercive estimates and separation theorems for elliptic equations in R^n // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 1984, №3, – P.213-239.

31 Отелбаев М. Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля. – Алматы. – 1990. –190 с.

32 Бойматов К.Х. Теория разделимости для оператора Штурма-Лиувилля // Матем. заметки. – 1973. – Т.14, №3. – С.349-359.

33 Бойматов К.Х. Теория разделимости // ДАН СССР. – 1973. – Т.213, №5 – С.1009-1011.

34 Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир. – 1972. – 740 с.

35 Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз. – 1963. – 339 с.

36 Костюченко А.Г. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов // Доклады АН ССССР. – 1966. – Т.168. №1. – С.21-24.

37 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1977. – 735с

38 Нагумо М. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. – М.: Мир. – 1967. – 132с.

39 Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А. Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа // Математический журнал. – 2005. – Т.5, №2(16). – С.57-65.

40 Муратбеков М.Б., Жусипназаров Р.М. О существовании и

дифференциальных свойствах решений одного класса сингулярных гиперболических уравнений в $L_2(\Omega)$. // Евразийский математический журнал, 2008, №1. –С.65-86.
41 Муратбеков М.Б. Разделимость оператора смешанного типа и полнота его системы корневых векторов // Диф. уравнения. – 1991. – Т.27, №16. – С.2127-2137.
42 Муратбеков М.Б. Разделимость и оценка сингулярных чисел оператора смешанного типа // Известия АН КазССР. – 1992. – №1. –С.25.
43 Муратбеков М.Б. Разделимость и спектр дифференциальных операторов смешанного типа. – Тараз. – 2006. – С.163.
44 Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М. Оценки спектра одного класса операторов смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т.43, №1. – С.135-137.
45 Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Об аппроксимативных свойствах решения нелинейного уравнения смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика. Изд-во МГУ. – 2006. – Т.12, №5. – С.95-107.
46 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. and Ospanov K.N. On approximate properties of solutions of a nonlinear mixed type equation // Journal of mathematical sciences7 – 2008. – Vol.150, №6. – P.2521-2530.
47 Муратбеков М.Б, Мусилимов Б.М., Игисинов С.Ж. О существовании и дифференциальных свойствах решений одного класса сингулярных дифференциальных уравнений смешанного типа // Вестник КарГУ. – 2010. – №3(59). – С.45-56.
48 Муратбеков М.Б, Медетбеков М., Игисинов С.Ж. О существовании и единственности решений одного класса сингулярных уравнений смешанного типа // Теор. и прикл. проблемы математики, механики и информатики: материалы межд. научной конференции. – Караганда: КарГУ. – 2010. – С.67-68.
49 Муратбеков М.Б, Медетбеков М., Игисинов С.Ж. О существовании и единственности решений одного класса сингулярных уравнений смешанного типа // Вестник КарГУ. – 2010. – №3(59). – С.56-61.
50 Игисинов С.Ж. Об условиях однозначной разрешимости одного класса уравнений смешанного типа на плоскости // Ломоносов-2011: тезисы докладов межд. научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. – Астана: КФ МГУ им. М.В. Ломоносова. – 2011. – С.49-50.
51 M.Muratbekov, K.Ospanov, S.Igisinov. Nonlocal estimates for solutions of Chaplygin type equations // 8-ой Международной конгресс ISAAC: материалы межд. научной конференции. – М. – 2011. – С.80.
52 Игисинов С.Ж., Жумалиева Л. О существовании и свойствах резольвенты одного класса сингулярного дифференциального оператора смешанного типа // Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II: материалы межд. научной конференции. – Алматы. – 2011. – С.71.
53 M.Muratbekov, K.Ospanov, S.Igisinov. Solvability of a class of mixed type

second order equations and nonlocal estimates // Applied Mathematics Letters. – 2012. – Vol. 25, No.11. – P.1661-1665.

54 Игисинов С.Ж. О существовании резольвенты одного класса сингулярных дифференциальных операторов смешанного типа в неограниченной области // Теоретические и прикладные проблемы математики и информационных технологий: материалы межд. научной конференции: – Караганда: КарГУ. – 2012. – С.63.

55 Муратбеков М.Б, Игисинов С.Ж. О разделимости одного класса сингулярных дифференциальных операторов смешанного типа в неограниченной области // Функциональный анализ и его приложения: материалы межд. научной конференции – Астана: ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2012. – С.164.

56 Игисинов С.Ж. О замыкаемости и об ограниченной обратимости дифференциального оператора смешанного типа в неограниченной области // Вестник КарГУ. –2013. – №1(69). – С.28-33.

57 M.Muratbekov, S.Igisinov. On the existence of the resolvent of a class of singular mixed type differential operators in an unbounded domain // Advances in Pure and Applied Mathematics: DOI 10.1515/apam-2013-5001.

58 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы функции и функционального анализа. – М.: Наука. – 1981. – 544с.

59 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука. – 1980. – 496 с.

60 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1984. – 567 с.

61 Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука. – 1988. – 567 с

62 Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз. – 1961. – 140с.

63 Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука. – 1976. – 392 с.

64 Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Изд. ЛКИ. – 2010. – 624с.

65 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука. – 1969. –526 с.

66 Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир. – 1985. – 468 с.

67 Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. – М.: Изд-во Мир. – 1977. – 357 с.

68 Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука. – 1966. – 544 с.

69 Гусман М. Дифференцирование интегралов в R^n. – М.: Мир. – 1978. – 246 с.