

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 524.1; 524.8

На правах рукописи

**МЫРЗАКУЛОВ ЕРЛАН МУРАТБАЕВИЧ**

**Точные космологические решения некоторых моделей гравитации со  
скалярными и фермионными полями**

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора философии PhD

Научные консультанты  
к.ф.-м.н., PhD, доцент К.К. Ержанов;  
к.ф.-м.н., доцент Г.Н. Нугманова  
PhD, профессор Д. Синглетон

Республика Казахстан

Астана, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ</b> .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>1 МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ГРАВИТАЦИИ</b> .....	19
1.1 Анизотропные модели $f(T)$ гравитации.....	20
1.1.1 Общий вид уравнения движения $f(T)$ гравитации.....	20
1.1.2 Уравнения полей для моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса.....	22
1.1.3 Решение в виде замкнутых кривых для метрики типа Бьянки-I.....	24
1.2 Вселенная с трилистными узлами в космологии типа Бьянки-I.....	27
1.2.1 Уравнения движения.....	27
1.2.2 Уравнения полей для моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса.....	28
1.2.3 Точное решение в виде узловой Вселенной типа трилистника.....	29
1.3 Темная энергия в $F(R, T)$ гравитации.....	31
1.3.1 Предварительные сведения из $F(R)$ , $F(G)$ и $F(T)$ гравитации.....	34
1.3.2 Простейшая модель $F(R, T)$ гравитации.....	36
<b>Выводы по 1 разделу</b> .....	38
<b>2 ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ В НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ФРИДМАНА-РОБЕРТСОНА-УОКЕРА</b> .....	40
2.1 Космология ФРУ.....	40
2.2 Неинтегрируемые космологические модели ФРУ.....	42
2.2.1 $\Lambda$ CDM космология.....	43
2.2.2 Космология Пиннея.....	43
2.2.3 Космология Шредингера.....	46
2.2.4 Гипергеометрическая космология.....	47
2.3 Интегрируемые космологические модели ФРУ. Космология Пенлеве.....	48
2.3.1 $P_I$ – модель.....	49
2.3.2 $P_{II}$ – модель.....	50
2.3.3 $P_{III}$ – модель.....	51
2.3.4 $P_{IV}$ – модель.....	52
2.3.5 $P_V$ – модель.....	52
2.3.6 $P_{VI}$ – модель.....	53
2.3.7 Структура гамильтониана.....	54
2.4 $F(R)$ -гравитационные модели, вызванные ОДУ второго порядка.....	55
2.4.1 Интегрируемые $F(R)$ -гравитационные модели.....	55
2.4.2 Неинтегрируемые $F(R)$ -гравитационные модели.....	60
2.5 $F(G)$ -гравитационные модели, вызванные ОДУ второго порядка.....	62
2.5.1 Интегрируемые $F(G)$ -гравитационные модели.....	62
2.5.2 Неинтегрируемые $f(G)$ -гравитационные модели.....	66
2.6 Описание в терминах скалярных полей.....	67
2.7 Двумерные обобщения.....	68
2.8 Реконструкция решений уравнения Эйнштейна с помощью.....	69

уравнений Рамануджана и Шези.....	
2.8.1 Уравнение.....	69
2.8.2 Решения.....	72
<b>Выводы по 2 разделу.....</b>	<b>74</b>
<b>3 МОДЕЛИ ТИПА ДИРАКА-БОРНА-ИНФЕЛЬДА И МОДЕЛИ ГАЗА ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ В <math>f</math>-ЭССЕНЦИИ.....</b>	<b>77</b>
3.1 Основы $f$ -эссенции.....	78
3.2 Решение.....	79
3.2.1 Космологические приложения некоторых моделей $f$ -эссенции.....	80
3.3 Модели $f$ -эссенции типа Дирака-Борна-Инфельда.....	82
3.3.1 Тахионные модели.....	83
3.3.2 Модели ТЭ.....	84
3.4 Интегрируемые модели $f$ -эссенции.....	85
<b>Выводы по 3 разделу.....</b>	<b>87</b>
<b>4 КОСМОЛОГИЯ <math>g</math>-ЭССЕНЦИИ СО СКАЛЯРНО- ФЕРМИОННЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ.....</b>	<b>88</b>
4.1 Обобщенная модель с взаимодействием типа Юкавы.....	88
4.2 МГЧ и космология решаемых моделей $f$ -эссенции.....	90
4.2.1 Основные элементы модели $f$ -эссенции.....	92
4.2.2 Точно решаемые космологические модели $f$ -эссенции.....	95
<b>Выводы по 4 разделу.....</b>	<b>98</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>101</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>102</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А – Список уравнений Шези.....</b>	<b>116</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б – Вывод уравнений движения <math>g</math>-эссенции, <math>k</math>-эссенции и <math>f</math>-эссенции.....</b>	<b>117</b>

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- $\Lambda$ CDM — Lambda-Cold Dark Matter  
 $a(t)$  — масштабный фактор  
 $T$  — скаляр кручения  
 $\Lambda$  — космологическая константа  
 $H$  — параметр Хаббла  
 $\square$  — даламбертиан  
 $R$  — скалярная кривизна  
COBE — Cosmic Background Explorer  
CMB — Cosmic Microwave Background  
MOND — модифицированная ньютоновская динамика  
WMAP — Wilkinson Microwave Anisotropy Probe  
ДБИ — Дирак-Борн-Инфельд  
МГЧ — модифицированный газ Чаплыгина  
МТГ — модифицированная теория гравитации  
ОГЧ — обобщенный газ Чаплыгина  
ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения  
ОТО — общая теория относительности  
ТМ — темная материя  
ТЭ — темная энергия  
УС — уравнение состояния  
УФ — уравнение Фридмана  
УШ — уравнение Шредингера  
ФРУ — Фридман-Робертсон-Уокер  
ФЛРУ — Фридман-Леметр-Робертсон-Уокер

## ВВЕДЕНИЕ

**Оценка современного состояния изучаемой научной проблемы.** Стандартная модель Вселенной в теории Большого Взрыва является удивительно успешной теорией. Ее предсказания, в частности расширение Вселенной и существование реликтового излучения, СМВ были подтверждены наблюдениями несколько лет назад. Другой ее успех связан с объяснением синтеза легких элементов в модели ранней Вселенной. Стандартная модель основывается на основных космологических принципах о том, что Вселенная однородна и изотропна на больших масштабах, что подтверждается наблюдениями. В частности закон Хаббла  $v = H(t)r$  ( $H$  – параметр Хаббла,  $r$  – расстояние галактики от наблюдателя в его системе и  $v$  – скорость удаления галактики) является подтверждением однородности и изотропии, что согласуется с наблюдениями. Считается установленным, что однородная изотропная Вселенная всегда переходит в однородную гладкую Вселенную.

Поскольку существуют неоднородности (звезды, галактики), это означает, что должны существовать отклонения от однородной Вселенной. Эти малые возмущения были найдены в эксперименте СОBE в 1992 году. В горячей модели Большого Взрыва есть механизм, а именно гравитационная неустойчивость, которая позволяет этим малым возмущениям перерасти в структуру, которую мы видим во Вселенной сегодня. Но в стандартной модели нет никакого способа, чтобы генерировать эти неоднородности. Это является одной из проблем модели горячего Большого Взрыва. Несмотря на большой успех этой модели, кажется, что она имеет несколько логических несоответствий. Первая проблема плоскостности: наблюдаемая Вселенная сегодня с большой точностью является пространственно-плоской, но эволюционирует от ранней Вселенной только при чрезвычайно большой подгонки параметров. Во-вторых, модель сталкивается с проблемой причинности, т.е. проблемой горизонта. Современная Вселенная эволюционировала от ранней фазы, где Вселенная состоит из большого количества причинно-несвязанных участков. Так как различные области в ранней Вселенной не взаимодействовали друг с другом, то в современной Вселенной должны наблюдаться неоднородности в СМВ. Есть и другие проблемы, такие как проблемы монополей и так далее.

Существует замечательная парадигма, известная как космологическая инфляция, которая успешно решает эти проблемы. Что самое важное, в ее рамках могут генерироваться квантово-механически-малые возмущения, что приводит к образованию структур во Вселенной. Таким образом, ясно, что стандартная модель Вселенной должна быть дополнена ранней стадией ускоренного расширения, т.е. инфляцией [1].

Теория горячего Большого Взрыва по-прежнему сталкивается с еще одной серьезной проблемой: возраст Вселенной в модели оказывается меньше (8-10 млрд. лет), чем некоторые известные объекты Вселенной (глобальные кластеры с возрастом 12-15 млрд. лет). Основной вклад в возраст связан с эрой доминантности материи. Например, возраст Вселенной составлял всего 105 лет

при переходе от эры радиации к эре материи, что является незначительным по сравнению с возрастом Вселенной. В ранней Вселенной, структурные составляющие (материя) двигались с огромной скоростью, а гравитация замедляла эту скорость. Слабое гравитационное поле подразумевает необходимость большего времени для достижения заданной скорости расширения: время, необходимое для достижения нынешних значений параметра Хаббла – это возраст Вселенной. Меньшая плотность вещества приводит к большому возрасту Вселенной, но процент плотности вещества во Вселенной фиксирован, и с этим ничего нельзя сделать. Единственный способ решения проблемы – это ввести эффект отталкивания, который позволит уменьшить гравитационное притяжение и усовершенствовать возраст Вселенной. Введение космологической постоянной эквивалентно отталкивающему эффекту и увеличению возраста Вселенной до уровня, согласованного с наблюдениями. Удивительно, что решение проблем позднего времени в теории Большого Взрыва также требует ускоренного расширения Вселенной. Очевидно, что ускоренное расширение, играет важную роль в динамической истории нашей Вселенной. В настоящее время существует твердое убеждение, что Вселенная действительно прошла через фазу инфляции на ранних стадиях. Наблюдения подтверждают, что в настоящее время Вселенная также ускоряется. Последние измерения микроволнового анизотропного исследования (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)) приводит к выводу, что (а) современная Вселенная очень близка к критической, и что (б) первичные возмущения плотности, которые образовались в крупномасштабную структуру Вселенной, являются масштабно-инвариантными и гауссовыми, что согласуется с инфляционной парадигмой. Что касается нынешнего ускорения Вселенной, оно подтверждается наблюдениями красного смещения сверхновых типа  $Ia$ , рассматриваемых как стандартизированные свечи, и косвенно наблюдениями космического микроволнового фона и кластеризации галактик. Критичность Вселенной поддерживается наблюдениями СМВ, который фиксирует общий энергетически состав Вселенной. Изучение крупномасштабной структуры показывает, что почти 30 процентов от полной массы Вселенной представлены темной материей (ТМ). Тогда возникает дефицит почти на 70 процентов; наблюдения сверхновых говорят о том, что должна существовать жидкость с большим отрицательным давлением. Такая жидкость условно называется темной энергией (ТЭ). В последнее время эксперименты по барионным колебаниям дают еще одну независимую проверку явлениям позднего ускорения. Идея, что Вселенная находится в состоянии ускорения в настоящее время, считается установленной в современной космологии.

Что является причиной современного ускорения Вселенной, в настоящее время абсолютно не ясно. Динамика нашей Вселенной описывается уравнениями Эйнштейна, в которых энергия Вселенной появляется в виде тензора энергии-импульса с правой стороны этих уравнений. Левая сторона уравнения представляет вклад чистой геометрии, в виде кривизны пространства-времени. Уравнения Эйнштейна в их первоначальном виде с

энергией-импульсом обычного вещества не могут привести к ускоренному расширению. Есть два способа получения ускоренного расширения. Дополнить тензор энергии-импульса вкладом экзотической жидкости называемой ТЭ [2-10] или путем модификации в левой части уравнения Эйнштейна вклада кривизны. Например, в рамках работы Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) по исследованию бранного мира [11], эффекты дополнительных измерений могут привести к большим модификациям теории гравитации (МТГ), что меняет левую часть гравитационных уравнений.

Простейшим кандидатом на роль ТЭ является космологическая постоянная  $\Lambda$ . Космологическая постоянная, как свободный параметр присутствует в уравнениях Эйнштейна в силу тождества Бьянки. Положительная космологическая постоянная приводит к ускоренному расширению Вселенной. Мы знаем, что космологическая постоянная необходима также для решения проблемы возраста Вселенной. Масса, соответствующая наблюдаемому значению космологической постоянной  $m_\Lambda = 10^{-3}$  эВ, является очень малой величиной. Квантовые флуктуации для любого поля в вакууме также дают вакуумное значение космологической постоянной, которая добавляется к имеющимся значениям космологической постоянной, присутствующей в уравнениях Эйнштейна как классический параметр. Вклад флуктуации вакуума может быть рассчитан, и он, как правило, порядка  $10^{27}$  эВ, что на тридцать порядков выше наблюдаемого значения космологической постоянной. Это означает, что необходима подгонка (и сокращение) вкладов в космологическую постоянную с фантастической точностью, чтобы привести его к  $10^{-3}$  эВ. Это и есть знаменитая проблема космологической постоянной. В настоящее время никто не знает, как решить эту проблему.

Для решения вышеперечисленных проблем, было введено большее число моделей: скалярные поля, векторные поля, фантомные поля, спиноры и т.д.

Оставляя в стороне теоретические проблемы, спросим, что говорят нам наблюдения? Наблюдения указывают на отрицательные значения уравнения состояния (УС). Такое уравнение ведет к возникновению фантома. Это поле с отрицательной кинетической энергией. К сожалению, такое поле является неустойчивым. В этом случае желательно иметь модели, в которых фантомные эры происходили так, что эра де Ситтера является поздним аттрактором. Вполне понятно, что могут реализоваться разные варианты. Только будущие наблюдения в космологии должны решать вопрос является ли ТЭ фантомной энергией.

Вполне возможно, что в природе нет никакой ТЭ, но гравитация модифицируется на больших масштабах, так что она сводится к Эйнштейновской общей теории относительности (ОТО) в Солнечной системе, где эйнштейновская гравитация находится в прекрасном согласии с наблюдениями. Давайте зададим здесь два вопроса: (1) Почему гравитация может быть модифицированной на больших масштабах? (2) Что является руководящим принципом в поддержку крупномасштабной модификации гравитации? Что касается первого вопроса, то гравитация меняется при

высоких энергиях и малых масштабах в силу квантовых эффектов, и нет никакой гарантии, что этого не случится на больших масштабах. ОТО Эйнштейна проверяется непосредственно в Солнечной системе, где она согласуется с наблюдениями. Затем она просто экстраполируется на большие масштабы. Вполне возможно, что ОТО изменится на больших масштабах, и именно эта модификация отвечает за современное космическое ускорение. Что касается второго вопроса, то мы можем руководствоваться теоремой Вайнберга, в которой говорится, что ОТО является низкоэнергетическим пределом последовательной теории гравитации со спином 2. Это означает, что на больших масштабах или при низких энергиях, мы обязательно должны придерживаться ОТО.

Возьмем пример  $f(R)$  гравитации, которая вводится из феноменологических соображений. В этой теории предполагается ввести произвольную функцию скалярной кривизны. Такая теория не содержит «духов», т.е. частиц с неканонической кинетической энергией. Далее, мы можем применить конформное преобразование на  $f(R)$ . В результате получим теорию скалярно-тензорного типа, где скаляр называется скаляроном. Это скалярное поле непосредственно взаимодействует с материей. Следует отметить, что конформное преобразование обычно является инвариантным. Таким образом, тот факт, что нет «духов» в Эйнштейновской системе отсчета (скалярно-тензорная теория) говорит нам о том, что нет духов и также в рамках системы отсчета Джордана.

Возникает важный вопрос: каков допустимый вид «духов»  $f(R)$  гравитации и может ли она быть совместимой с локальными тестами? Отсутствие «духов» не гарантирует, что  $f(R)$  гравитация будет в целом последовательной. В частности, вид  $f(R)$  должен быть выбран так, чтобы она не вела к антигравитации. Этого всегда можно добиться. Далее  $f(R)$  гравитация должна вести к ньютоновскому пределу в Солнечной системе. Наконец, эта теория должна приводить к эре ТЭ. Как показано в обзоре [12] такие реалистичные теории существуют. Более того, доказано, что можно построить реалистичные теории  $f(R)$  гравитации, где возможно объединенное описание инфляции и эры ТЭ. Более того, можно продемонстрировать, что в таких объединенных теориях нет сингулярностей в прошлом и/или будущем [13; 14]. Таким образом модели  $f(R)$  являются одними из наиболее реалистических претендентов на роль инфланта и ТЭ.

Еще один интересный класс модифицированных гравитаций – это теории с лагранжианом  $L = R + f(G)$ , где  $G$  – это топологический инвариант Гаусса-Бонне. В качестве источника ТЭ они были введены в работах [15]. Теории модифицированной  $f(G)$  гравитации также могут успешно описывать эру ТЭ.

Следует также отметить еще одну модификацию, которая связана с MOND. Основной идеей в MOND было изменение закона Ньютона таким образом, что вращения галактик можно объяснить без привлечения ТМ. Получается, что нужно одно дополнительное скалярное поле для решения



проблемы. Полученная теория феноменологическая и не ковариантная. Возникает вопрос, как построить ковариантную теорию MOND. Попытки построить такую теорию делались довольно успешно в рамках  $f(R)$  гравитации.

Последнее, но не менее важное, это сравнение с историческими данными. Например, УС может быть параметризовано использованием текущих данных из различных источников, таких как данные из сверхновых, ВАО, СМВ и крупномасштабной структуры нуклеосинтеза. Если мы заинтересованы описать эволюцию от стадии доминантности, мы можем использовать УС газа Чаплыгина, с помощью которого можно точно имитировать массу Вселенной на ранних стадиях и эры ТЭ сегодня. Также можно построить потенциал скалярного поля, который приводит к газу Чаплыгина. При этом важно использовать общие УС и изучать точные космологические решения с ними. Очевидно, что важно также расширить анализ за рамки скалярного поля, в том числе спинорное поле и, вообще, все остальные поля, присутствующие в стандартной модели физики элементарных частиц.

Настоящая диссертация посвящена исследованию космологических точных решений ряда гравитационных моделей, в том числе со скалярными и фермионными полями в стандартных и модифицированных схемах гравитации, а именно исследованию эволюции Вселенной, в первую очередь на современной стадии и решению соответствующих космологических уравнений. Особое внимание обращено на исследование эры ТЭ в различных моделях. В частности исследованию космологии, описывающей эпоху ТЭ или современного космического ускорения. И это представлено в МТГ в моделях типа Борна-Инфилда, в моделях газа Чаплыгина, и в некоторых других моделях. Кроме того проведено исследование и найдены соответствующие масштабные факторы для модели с модифицированным газом Чаплыгина (МГЧ), для модели  $g$ -эссенция, и для модели  $f$ -эссенция. В целом можно сказать, что данная диссертация представляет собой работу, в которой изложены точные космологические решения ряда моделей гравитации, взаимодействующие скалярами и спинорами, которые достаточно реалистично описывают современную эпоху эволюции Вселенной. Диссертация построена следующим образом:

1. Раздел 1 посвящен построению космологических решений различного вида в МТГ. Первый параграф первого раздела исследует анизотропные метрики в теории  $f(T)$  гравитации. То есть, гравитация с кручением специального вида. Конкретно, построено уравнение движения для модели типа Бьянки-I, Бьянки-III и Кантовского-Сакса. И найден ряд решений для этих моделей, соответствующих индуцируемых в теории гравитации с кручением. Второй параграф посвящен изучению космологии Бьянки-I в теории гравитации с кручением специального вида  $f(T)$ . Данный параграф продолжает предыдущий параграф. В нем вновь рассматриваются анизотропные метрики, строятся уравнения движения для теории  $f(T)$  гравитации и находятся явные решения уравнений движения, которые представляют анизотропную

Вселенную с трилистными узлами. Соответствующие выражения для метрики представлены в данном параграфе. Стоит отметить, что явный вид решения констант, который возникает в решении, имеет чрезвычайно усложненный вид, что показывает сложный характер данной задачи.

В параграфе 1.3 рассматривается вопрос о космическом ускорении современной Вселенной в теории гравитации вида  $f(R,T)$ , где  $T$  – это скаляр кручения,  $R$  – это кривизна. Специальным образом строится модель  $f(R,T)$  гравитации, которая является скорее математической теорией. Произведено сравнение этой модели с  $f(R)$  и  $f(T)$  гравитацией. Построены лагранжиан и уравнения движения в модели с  $f(R,T)$  гравитацией. Данный лагранжиан и уравнение движения являются очень сложными, тем не менее качественный вывод о возможности ТЭ в такой модели можно сделать.

2. В разделе 2 рассматривается вопрос о эре ТЭ для ряда интегрируемых и неинтегрируемых космологических моделей Фридмана. Этот раздел с одной стороны имеет важное математическое значение, которое показывает аналогии между уравнениями гравитационного поля типа Эйнштейна и солитонными уравнениями, где и возникло понятие об интегрируемости и неинтегрируемости, с другой стороны этот раздел важен в связи с тем, что она указывает на возможность получения новых космологических решений для ряда теорий с использованием математических методов типичных для теории солитонов уравнения Навье-Стокса. В первом параграфе рассматривается общее определение космологии Фридмана, выводятся уравнения Фридмана (УФ), закон сохранения энергии-импульса, другими словами, этот параграф имеет вспомогательное значение.

Во втором параграфе рассматривается  $\Lambda$ CDM космология и ряд других космологий, которые обозначаются по уравнению, индуцирующему данную космологию. В частности рассматривается космология Пиннея, где уравнение гравитационного поля принимает вид известного в математической физике уравнения Пиннея, рассматривается космология Шредингера, где Фридмановская модель описывается линейным уравнением Шредингера (УШ), рассматривается гипергеометрическая космология, где Фридмановская космологическая модель описывается гипергеометрическим уравнением. Другими словами, вводится аналогия между описанием космологических решений в терминах уравнений Эйнштейна и преобразованием соответствующих уравнений для каждого конкретного случая из хорошо известных уравнений математической физики.

В параграфе 2.3 рассматриваются интегрируемые космологии Фридмана. Эти космологии описываются космологией Пенлеве, название обусловлено использованием известных уравнений Пенлеве, которые были обнаружены достаточно давно при исследовании нелинейных уравнений второго порядка. Все шесть уравнений Пенлеве записаны и показаны, когда уравнения Эйнштейна могут принимать вид уравнения Пенлеве. Конкретно приведены шесть моделей Пенлеве, обсуждается структура решений, обсуждается возможность космологического решения данного уравнения для конкретного

выбора УС идеальной жидкости, заполняющей Вселенную, приводится также структура гамильтониана для этих уравнений.

Следующий параграф 2.4 связан также с предыдущим параграфом, именно в этом параграфе рассматриваются космологические модели, индуцируемые  $f(R)$  гравитацией, в том случае, когда соответствующие уравнения могут быть приведены к виду обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка. Другими словами, рассматриваются интегрируемые модели  $f(R)$  гравитации. Вводится общее действие теории  $f(R)$  гравитации и эффективная плотность энергии, а также эффективное давление такой гравитационной жидкости. Рассматриваются модели  $f(R)$  гравитации, которые могут быть переписаны в упрощенном виде так, что соответствующие уравнения движения принимают вид уравнений ОДУ второго порядка. Конкретно найден целый класс таких лагранжианов, начиная с лагранжиана, где функция  $f(R)$  гравитации пропорционально единице  $R$ , а также других более усложненных лагранжианов.

Во второй части этого параграфа исследуются неинтегрируемые модели  $f(R)$  гравитации. Вновь записано дифференциальное уравнение, к которому ведут уравнения движения таких моделей. Показано, что это гипергеометрическое дифференциальное уравнение. Обсуждаются возможности решения этого уравнения для нескольких конкретных примеров.

Идея параграфа 2.5 очень связана с предыдущим параграфом 2.4. В нем рассматриваются космологические модели, основанные на модифицированных гравитациях с действием  $f(G)$ , где  $G$  – инвариант Гаусса-Бонне, который также может быть представлен в виде ОДУ второго порядка. Записаны действия модифицированной гравитации типа  $f(G)$ , записаны уравнения движения, введены эффективная плотность энергии и эффективное давление таких моделей. Далее исследуются интегрируемые модели  $f(G)$  гравитации. Конкретно вновь построен класс таких моделей, который допускает интегрируемость. Соответствующие решения приведены в параграфе 2.5 и показано, что они допускают солитонные решения, либо решения в виде бесконечного числа коммутирующих интегралов в силу своей интегрируемости.

Следующим элементом этого параграфа рассматриваются неинтегрируемые модели  $f(G)$  гравитации. Вновь используются уравнения Пиннея и проводятся несколько примеров моделей  $f(G)$  гравитации, которые являются неинтегрируемыми.

В параграфе 2.6 приведено описание скалярных полей, с помощью которых находятся космологические решения и интересные для построения реалистических моделей Вселенной. В начале параграфа вводится лагранжиан скалярного поля, и рассматриваются двумерные версии космологических моделей Фридмана. Таким образом, в целом в этом параграфе рассмотрены интегрируемые и неинтегрируемые космологические модели для ряда МТГ, а также для скалярных полей. Важность этого параграфа заключается в том, что в

нем показана явная аналогия между уравнениями гравитационного поля в теории Эйнштейна и уравнениями математической физики, то есть солитонными уравнениями, уравнениями Навье-Стокса. Другими словами возникает интригующая возможность использования методов решения уравнений математической физики, основанных на критерии интегрируемости уравнений гравитационного поля.

Параграф 2.8 ориентирован более в сторону математической физики и показывает глубокую связь между различными решениями, возникающими, с одной стороны, в теории гравитации, то есть уравнениями Эйнштейна, а с другой стороны, в теории математической физики, уравнениями Рамануджана и Шези.

В параграфе 2.8.1 рассматриваются уравнения Эйнштейна и попытка преобразовать эти уравнения таким образом, чтобы свести их форму к известным уравнениям математической физики. В частности, показана глубокая связь между уравнениями Эйнштейна и уравнением Рамануджана, а также между уравнениями Эйнштейна и уравнением Шези. В дальнейшем эта аналогия продолжена на уравнении Дарбу-Халфена.

В параграфе 2.8.2 строится решение уравнения Эйнштейна для случая, когда оно имеет вид, описанный в параграфе 2.8.1 уравнением математической физики. В частности, зная решение уравнения Шези-III построено решение уравнения Эйнштейна со степенной зависимостью для масштабного фактора. Соответствующий метод использован также для случая, когда уравнение Эйнштейна совпадает с уравнением Рамануджана, используя решение уравнения Рамануджана мы приходим вновь к решению уравнения Эйнштейна с масштабным фактором, представляющим собой произведение степенного по времени параметра и экспоненциальных по времени параметров. Таким образом, в данной разделе показано, что существует связь между гравитационным уравнением и уравнениями Рамануджана и Шези. Это дает возможность при решении довольно сложных гравитационных уравнений использовать известные результаты из классической математической физики, просто переписывая соответствующее решение уравнения Рамануджана и Шези. Этот метод очевидно может быть продолжен далее таким образом, что еще большее число новых решений гравитационных уравнений могут быть найдены в рамках данного метода.

3. В разделе 3 рассматривается фермионная модель Дирака-Борна-Инфельда (ДБИ), а также модель газа Чаплыгина, которая использована для построения эры ТЭ и современной Вселенной, а также для описания ТМ используют так называемую  $f$ -эссенцию. В параграфе 1 вводится понятие  $f$ -эссенции, то есть теории в которой имеются фермионные поля, где вводится произвольная функция кинетического члена для фермионных полей. Такая модель является обобщением известной и популярной в теории гравитации модели  $k$ -эссенции. Рассматривается вновь метрика Фридмана и для метрики Фридмана для нескольких конкретных выборов теории  $f$ -эссенции найдены уравнения движения, а также их общее решение. После этого решение космологических уравнений применяется для построения космологических

решений, интересных с точки зрения реалистичной Вселенной. В частности показано, что есть возможность в рамках теории  $f$ -эссенции описать эру ТЭ современной Вселенной.

В параграфе 3.3 рассматривается модель типа ДБИ с  $f$ -эссенцией, а также тахионная модель. В некотором смысле тахионная модель является подклассом модели  $f$ -эссенции. Для конкретного выбора такой модели, то есть теории ДБИ построены уравнения движения и найдено решение, описывающее позднюю Вселенную таким образом, что соответствующее УС имеет вид, характерный для газа Чаплыгина. Другими словами доказано, что есть однозначное соответствие между моделями типа ДБИ и газа Чаплыгина при описании космического ускорения современной Вселенной.

Параграф 3.4 посвящен исследованию интегрируемых моделей  $f$ -эссенции. Вновь используя уравнения движения, показано когда эти уравнения принимают вид, типичный для интегрируемых моделей математической физики. Таким образом, возникает возможность довольно легко получить явное решение таких моделей.

4. Раздел 4 посвящен космологии Фридмана для теории  $g$ -эссенции, взаимодействующей со скалярными фермионами. В первом параграфе этого раздела вводится действие  $g$ -эссенции, взаимодействующей со скалярными фермионами. Записаны уравнения движения и найдены довольно простые решения, описывающиеся экспоненциальным законом для масштабного фактора и степенным законом для скаляров, и несколько более сложным экспоненциальным законом по времени для спиноров. Найдены явные выражения для потенциалов.

Параграф 4.2 посвящен изучению Фридмановских космологий для случая, когда УС имеет вид МГЧ либо индуцированной теории  $f$ -эссенции.

В параграфе 4.2.1 этойой раздела представлен обзор теории  $f$ -эссенции. Вводятся соответствующее действие, уравнения движения и показаны в каких случаях эти уравнения могут допускать достаточно простые решения.

В параграфе 4.2.2 детально изучен вопрос о Фридмановских космологиях в теории  $f$ -эссенции, исследован случай, когда имеются точные решения. Конкретно рассматриваются различные виды УС для МГЧ и приводятся соответствующее решение для масштабного фактора, плотности энергии и давление. Приведено не только аналитическое решение, являющееся довольно сложным, но также и численное значение. Кроме того такого же сорта решение найдено в общем случае. Это решение описывается в космологии Фридмана с отрицательным значением эффективного параметра УС. Таким образом, найденную точную метрику можно использовать для описания Вселенной в эпоху ТЭ, то есть в современной Вселенной. В приложении рассматривается вывод уравнения движения  $g$ -эссенции,  $k$ -эссенции и  $f$ -эссенции.

**Актуальность темы диссертации.** Во-первых, в связи с открытием частицы Хиггса стало очевидно, что скалярные поля имеют фундаментальную роль в физике высоких энергий. В этом случае очевидно, что скалярные поля также должны играть важную роль в космологии.

Другими словами необходимо рассмотрение скалярных полей в рамках различных космологических моделей, поскольку заведомо известно, что они присутствуют в физике высоких энергий. С другой стороны, известно, что стандартная модель включает не только скалярные поля, но и фермионные поля. Это означает, что необходимо также использовать и фермионные поля в описании космологии нашей Вселенной.

Модели гравитации со скалярными и фермионными полями могут служить мостом между космологией и математической физикой. В частности, в данной диссертации показано, что такие модели могут быть записаны в виде известных уравнений математической физики так, что известные решения уравнения математической физики, как Навье-Стокс, Пенлеве, Рамануджана могут быть использованы в данном контексте.

Наконец, использование такого сорта моделей со скалярными и фермионными полями в космологии может быть важно в связи с тем, что эти модели допускают наличие ряда параметров, как скалярный потенциал, нетривиальная функция кинетических членов таким образом, что данные потенциалы можно использовать для достаточно четкого согласования этих моделей с наблюдательными данными.

Другими словами ожидается, что в рамках таких простых моделей можно достаточно реалистично описать различные этапы эволюции Вселенной.

**Связь темы с планами научных работ.** Работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ по следующим проектам:

1) Государственная программа фундаментальных исследований. Проект: "Исследование структуры и динамики гравитирующих систем в ускоренно расширяющейся Вселенной. Разработка теории и методов исследования ускоряющегося расширения Вселенной" (2009-2011 гг., руководитель проекта – Р. Мырзакулов).

2) Государственная программа фундаментальных исследований. Проект: "Исследование космологии ТЭ на базе модифицированных и обобщенных теорий гравитации, скалярных и фермионных полей" (2012-2014 гг., руководитель проекта – Р. Мырзакулов).

**Цель диссертационной работы.** Исследование точных решений некоторых космологических моделей гравитации с учетом скалярных и фермионных полей ранней и поздней Вселенной.

**Объект исследования.** Эволюция структуры Вселенной в разных космологических моделях.

**Предмет исследования.** Поиск космологических решений гравитационных уравнений с материей, описывающих эпоху доминирования темной энергии Вселенной.

**Методологическая база исследования.** ОТО и скалярно-фермионные

теории поля в искривленном пространстве.

**Научная новизна и практическая ценность диссертации.** Научная новизна и теоретическая значимость исследования заключается в следующем:

– исследован вопрос о космическом ускорении современной Вселенной в теории  $f(R,T)$ -гравитации. Произведено сравнение  $f(R,T)$ -гравитации с моделями  $f(R)$  и  $f(T)$  гравитаций;

– исследован вопрос об эре темной энергии для ряда интегрируемых и неинтегрируемых космологических моделей Фридмана. Рассматривается  $\Lambda$ CDM космология, космология Пиннея, космология Шредингера и ряд других космологий, которые обозначаются уравнениями, индуцирующими данные космологии;

– рассмотрены космологические модели, индуцируемые  $f(R)$ -гравитацией, для случая, когда соответствующие уравнения могут быть приведены к виду обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка;

– исследованы неинтегрируемые модели  $f(R)$ -гравитации, записано дифференциальное уравнение, к которому ведут уравнения движения таких моделей. Показано, что это гипергеометрическое дифференциальное уравнение;

– рассмотрены уравнения Эйнштейна с точки зрения математической физики, и показана глубокая связь между уравнениями Эйнштейна, а с другой стороны теорией математической физики, уравнениями Рамануджана и Шези. Построены решения уравнений Эйнштейна для случая, когда они имеют вид уравнений математической физики. Из решения уравнения Шези-III построено решение уравнений Эйнштейна со степенной зависимостью для масштабного фактора. Соответствующий метод использован также для случая, когда уравнения Эйнштейна совпадают с уравнением Рамануджана;

– рассмотрена фермионная модель типа Дирака-Борна-Инфельда, а также модель газа Чаплыгина, которая использована для построения эры темной энергии современной Вселенной, а для описания темной материи используется так называемая  $f$ -эссенция;

– рассмотрена модель типа Дирака-Борна-Инфельда с  $f$ -эссенцией. Для конкретного выбора такой модели, то есть теории ДБИ построены уравнения движения и найдено решение, описывающее позднюю Вселенную таким образом, что соответствующее УС имеет вид характерный для газа Чаплыгина. Доказано, что есть однозначное соответствие между моделями Дирака-Борна-Инфельда и газа Чаплыгина при описании космического ускорения современной Вселенной;

– для космологии  $g$ -эссенции со скалярно-фермионными взаимодействиями получены уравнения движения и найдены довольно простые решения, для масштабного фактора с экспоненциальным и со степенным видом. Найдены явные выражения для потенциалов;

– рассмотрена космология Фридмана для случая, когда уравнение

состояния имеет вид модифицированного газа Чаплыгина либо индуцированной теории  $f$ -эссенции;

– исследован вопрос о космологии Фридмана в теории  $f$ -эссенции для случая, когда имеются точные решения. Рассмотрены различные виды уравнения состояния для модифицированного газа Чаплыгина и приводятся соответствующие решения для масштабного фактора, плотности энергии и давления. Решение описывается в космологии Фридмана с отрицательным значением эффективного параметра уравнения состояния. Найденное точное выражение для метрики можно использовать для описания Вселенной в эпоху темной энергии, то есть в современной Вселенной.

#### **Основные положения диссертации, выносимые на защиту**

– Построены уравнения Эйнштейна с точки зрения математической физики, и показана связь между уравнениями Эйнштейна с уравнениями теорией математической физики Рамануджана и Шези.

– Найдены уравнения движения некоторых конкретных моделей  $f$ -эссенции для метрики Фридмана.

– Рассматривается модель типа Дирака-Борна-Инфельда с  $f$ -эссенцией. Для конкретного выбора такой модели, то есть теории ДБИ построены уравнения движения и найдено решение описывающее позднюю Вселенную таким образом, что соответствующее УС имеет вид характерный для газа Чаплыгина.

– Рассмотрены частные модели  $g$ -эссенции со взаимодействием типа Юкавы между скалярным полем  $\phi$  и классическим Дираковским полем  $\psi$ . Для однородной, изотропной и плоской Вселенной ФРУ, заполненной  $g$ -эссенцией найдены некоторые точные решения этих моделей. Реконструированы соответствующие скалярный и фермионный потенциалы.

– Рассмотрена космология Фридмана в том случае, когда уравнение состояния имеет вид модифицированного газа Чаплыгина либо индуцированной теории  $f$ -эссенция и космология Фридмана в теории  $f$ -эссенции исследована в случае, когда имеются точные решения.

**Личный вклад автора.** В процессе выполнения исследований диссертант под руководством научных руководителей принимал непосредственное участие во всех этапах работы: провел все расчеты, построил графики найденных решений, лично подготовил публикации.

**Апробация результатов работы.** Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на:

– Международной научной конференции студентов, магистрантов, и молодых ученых "ЛОМОНОСОВ-2013". - Астана. 12-13 апреля 2013;

– Международной конференция "Актуальные проблемы современной физики", посвященная 75-летию академика НАН РК Абдильдина М.М. - Алматы. 15-16 марта 2013;

– 8-й Международной научной конференции "Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент", посвященной 40-летию КарГУ имени академика Е.А. Букетова. - Караганда. 18-20 июня 2012;



- X International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology, Vietnam, Quy Nhon, December 17<sup>th</sup>-22<sup>nd</sup> 2011;
- III Italian-Pakistani Workshop on Relativistic Astrophysics, Lecce, 2011;
- Международной научной конференции "Наука и образование – ведущий фактор стратегии "Казахстан-2030" посвященной 20-летию Независимости Казахстана. - Караганда. 23-24 июня 2011;
- Международной научной конференции, посвященной 20-летию Независимости Казахстана. Наука и образование – ведущий фактор стратегии «Казахстан – 2030», 23-24 июня. Караганда, 2011.

Кроме того, полученные результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева и на семинарах международного центра теоретической физики.

**Опубликованность результатов.** По результатам диссертационной работы опубликовано 16 работ, из них 5 статей – в зарубежных журналах с высоким импакт-фактором; 1 статья – в зарубежном журнале Journal of Physics Conference Series: 3rd Italian-Pakistani Workshop on Relativistic Astrophysics; 3 статьи – в периодических изданиях Республики Казахстан, рекомендованных Комитетом по контролю сфере образования и науки МОН РК; 3 тезиса – в материалах международных конференций дальнего зарубежья, 4 статьи – в материалах международных конференций ближнего зарубежья.

Таблица 1 - Индекс Хирша (H-индекс) и индекс цитируемости соискателя Е.Мырзакулова по данным зарубежных баз данных на 30.10.2013г.

Название базы данных	Индекс Хирша (H-индекс) соискателя	Индекс цитируемости соискателя	Источник
Академия Google	4	43	www.scholar.google.com
Thomson Reuters	3	26	www.webofknowledge.com
Scopus	3	22	www.scopus.com
Inspire	3	17	www.inspirehep.net

**Импакт-фактор журналов.** Докторантом опубликованы 6 статей в зарубежных журналах, в том числе 5 – в журналах с высоким импакт-фактором, которые приведены в Таблице 2:

**Индекс Хирша (H - индекс) соискателя.** Индекс Хирша (H - индекс) соискателя по основным четырем международным базы данных приведены в Таблице 1.

**Индекс цитируемости соискателя.** Индекс цитируемости соискателя по основным четырем международным базы данных приведены в Таблице 1.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения и списка использованных источников из 214 наименований, содержит 119 страниц основного компьютерного текста,

включая 5 рисунков.

Таблица 2 - Зарубежные публикации соискателя Е. Мырзакулова по теме диссертации, опубликованные в зарубежных журналах с высоким импакт-фактором

Название	Журналы	Авторы	Импакт-фактор за 2012 год
Modified Chaplygin gas and solvable $f$ -essence cosmologies	Astrophysics and Space Science, - v.336, N2, P.315-325 (2011)	Myrzakulov Y., Razina O., Jamil M., Myrzakulov R.	2.064
$g$ -essence cosmologies with scalar-fermion interactions	European Physical Journal Plus, - v.126, N9, P.85-89 (2011)	Myrzakulov Y., Razina O., Serikbayev N., Myrzakul S., Nugmanova G., Myrzakulov R.	1.302
Dark energy in some integrable and nonintegrable FRW cosmological models	International Journal of Modern Physics D, - v.20, N12, P.2419-2446 (2011)	Myrzakulov Y., Esmakhanova K., Myrzakulov N., Nugmanova G., Chechin L., Myrzakulov R.	1.03
A note on the relationship between solutions of Einstein, Ramanujan and Chazy equations	International Journal of Theoretical Physics, - v.51, N4, 1204-1210 (2012)	Myrzakulov Y., Esmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R.	1.086
Einstein-Cartan gravity with scalar-fermion interactions	Central European Journal of Physics, - v.10, N1, P.47-50 (2012)	Myrzakulov Y., Razina O., Serikbayev N., Nugmanova G., Myrzakulov R.	0.905
Fermionic DBI and Chaplygin gas unified models of dark energy and dark matter from $f$ -essence	III Italian-Pakistani Workshop on Relativistic Astrophysics, - Lecce, 2011. Journal of Physics: Conference Series - v.354, 012011 (P11) (2012)	Myrzakulov Y., Momeni D., Tsyba P., Yesmakhanova K., Myrzakulov R.	

## 1 МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ГРАВИТАЦИИ

В контексте модифицированной гравитации, был исследован широкий ряд моделей, где  $f(R)$ -гравитация являлась, вероятно, самой популярной моделью благодаря ее простоте. Она обобщает действие Гильберта-Эйнштейна для более сложной функции скаляра Риччи [12; 16]. Были предложены также другие виды теорий, где включаются другие инварианты кривизны такие как инвариант Гаусса-Бонне. Исследуется так называемая гравитация  $f(T)$ , которая по аналогии с гравитацией  $f(R)$ , состоит в обобщении действия телепараллельной теории гравитации, которая предполагает связность Вейтзенбока вместо связности Леви-Чивита, что приводит к нулевой кривизне, но к неисчезающему кручению. В этой гравитационной теории основное поле представляется так называемой тетрадой вместо метрики как в ОТО. Этот вид теории стал очень популярным в недавнее время, так как может также объяснить ускоренное расширение Вселенной без какой-либо ТЭ, и даже эпохи раздувания. Был изучен широкий ряд вопросов в контексте гравитации  $f(T)$ , такие как ее локальная Лоренц-инвариантность, статические решения, недиагональные тетрады, или присутствие черных дыр, также как и другие аспекты. Также были приложены большие усилия для изучения космологических решений этого класса теорий, также как и возможные космологические предсказания.

В настоящем разделе, мы изучаем некоторые особенные космологические решения в  $f(T)$ -гравитации, где соответствующее действие восстановлено для каждого случая. В частности, рассмотрены модели типа Бьянки-I, Кантовски-Сакса и типа Бьянки-III, и также некоторые важные решения, такие как разложения по степенному закону и де-Ситтера, или более сложные решения, такие как экспоненциальные функции для масштабного фактора в каждом направлении пространства. Так как решение по степенному закону и решение де-Ситтера могут дать хорошее описание для некоторых фаз эволюции Вселенной, их реконструкция в гравитации  $f(T)$  становится важным этапом для рассмотрения этого класса теорий как серьезных кандидатов для объяснения космологической истории Вселенной. В дополнение, здесь предполагаем более общую космологическую метрику, чем метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ), и анизотропные Вселенные, описанные метриками типа Бьянки-I, Кантовски-Сакса и типа Бьянки-III, для того, чтобы обеспечить наиболее общее описание космологической эволюции в контексте гравитации  $f(T)$  [17]. Более того, также рассмотрены экспоненциальные решения, где этот вид решений стал очень популярным в недавнее время, так как они могут описывать Вселенную в несингулярном состоянии. Такое состояние, предложенное в работе [18] и названное Малый разрыв, уже было исследовано в гравитации  $f(R)$ , а также и в теориях  $f(T)$  [19]. Более того, возможное существование Малого разрыва также было исследовано в контексте так называемой реалистичной модифицированной гравитации [20]. Следует отметить, что анизотропные космологические метрики уже были исследованы в контексте ОТО с присутствием изотропной и анизотропной жидкостей, также

как и устойчивость решений.

Также было предложено использование вспомогательного скалярного поля, по аналогии с эквивалентностью теории Бранс-Дике для гравитации  $f(R)$  [21], из чего может в результате получиться полезный инструмент для восстановления соответствующего действия, также как и для изучения свойств гравитации  $f(T)$ .

Основные мотивы предположения модели с анизотропной геометрией основаны на некоторых физических аспектах, таких как: известная проблема квадруполя СМВ, которая может быть решена рассмотрением Вселенной с плоской симметрией, индуцированной однородным космическим магнитным полем, чья сила тока  $B(t_0) \approx 10^{-9}$  Гаусс, должна быть ближе к  $e_{dec} \approx 10^{-2}$ ; распространенность  ${}^4\text{He}$ , космический параллакс, маленькое анизотропное давление, космологические решения эффективного действия низкоэнергетичной струны, анизотропное раздувание Вселенной и некоторые другие. В теории  $f(R)$ , уже имеются некоторые хорошие результаты [22; 23], поэтому, предлагаем установить здесь уравнения и получить первый результат в гравитации  $f(T)$ , для моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса.

## 1.1 Анизотропные модели $f(T)$ -гравитации

### 1.1.1 Общий вид уравнения движения $f(T)$ -гравитации

Как было уже упомянуто, теория гравитации  $f(T)$  определяется в пространстве-времени Вейтзенбока, в котором линейный элемент описывается с помощью выражения

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

где  $g_{\mu\nu}$  – это компоненты метрики, которая симметрична и имеет 10 степеней свободы. Можно описать теорию в пространстве-времени или в касательном пространстве, которое позволяет нам переписать линейный элемент (1.1) следующим образом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ij} \theta^i \theta^j, \quad (1.2)$$

$$dx^\mu = e_i{}^\mu \theta^i, \theta^i = e^i{}_\mu dx^\mu, \quad (1.3)$$

где  $\eta_{ij} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$  и  $e_i{}^\mu e^i{}_\nu = \delta_\nu^\mu$  или  $e_i{}^\mu e^j{}_\mu = \delta_i^j$ . Квадрат метрического детерминанта дается формулой  $\sqrt{-g} = \det[e^i{}_\mu] = e$  и матрицы  $e^a{}_\mu$  называются тетрадой и представляют динамические поля теории.

Можно определить связность Вейтзенбока как

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = e_i^{\alpha} \partial_{\nu} e_{\mu}^i = -e_i^i \partial_{\nu} e_i^{\alpha}. \quad (1.4)$$

Основные геометрические объекты пространства-времени построены из этой связности. Компоненты тензора кручения определяются антисимметричной частью этого соотношения

$$T_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = e_i^{\alpha} (\partial_{\mu} e_{\nu}^i - \partial_{\nu} e_{\mu}^i). \quad (1.5)$$

Компоненты конторсионного тензора определяются как

$$K_{\alpha}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (T_{\alpha}^{\mu\nu} - T_{\alpha}^{\nu\mu} - T_{\alpha}^{\mu\nu}). \quad (1.6)$$

Для того чтобы сделать определение скалярного эквивалента скалярной кривизне ОТО более ясным, сперва определим новый тензор  $S_{\alpha}^{\mu\nu}$ , построенный из компонентов тензоров кручения и конторсионного тензора в следующем виде:

$$S_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (K_{\alpha}^{\mu\nu} + \delta_{\alpha}^{\mu} T_{\beta}^{\nu\beta} - \delta_{\alpha}^{\nu} T_{\beta}^{\mu\beta}). \quad (1.7)$$

Теперь можем определить скаляр кручения следующим образом

$$T = T_{\mu\nu}^{\alpha} S_{\alpha}^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Действие теории определяется обобщением телепараллельной теории, как

$$S = \int e [F(T) + L_{Matter}] d^4x, \quad (1.9)$$

где  $f(T)$  – это алгебраическая функция скалярного кручения  $T$ . Проводя функциональную вариацию действия (1.9) по тетрадам, получаем следующие уравнения движения

$$S_{\mu}^{\nu\rho} \partial_{\rho} T f_{TT} + \left[ e^{-1} e_{\mu}^i \partial_{\rho} (e e_i^{\alpha} S_{\alpha}^{\nu\rho}) + T_{\lambda\mu}^{\alpha} S_{\alpha}^{\nu\lambda} \right] f_T + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} f = 4\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (1.10)$$

где  $T_{\mu}^{\nu}$  – тензор энергии-импульса,  $f_T = df(T)/dT$  и  $f_{TT} = d^2f(T)/dT^2$ . Если рассматривать  $f(T) = a_1 T + a_0$ , то из (1.10) получим уравнения движения точно такие же, как в телепараллельной теории с космологической константой, и это динамически эквивалентно ОТО. Эти уравнения явно зависят от выбора набора тетрад.

Вклад взаимодействия с материальными полями дается тензором энергии-импульса, который в данном случае, определяется как

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(1, -\omega_x, -\omega_y, -\omega_z) \rho, \quad (1.11)$$

где  $\omega_i$  ( $i = x, y, z$ ) является параметром УС, относящиеся к давлениям  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ .

1.1.2 Уравнения полей для моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса

Выведем уравнения движения с помощью набора диагональных тетрад, используя метрику декартовых координат, для описания моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса. Начнем со случая метрики типа Бьянки-III, из которого могут быть получены метрика типа Бьянки-I и метрика Кантовски-Сакса. Для случая типа Бьянки-III, метрика имеет следующий вид

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dx^2 - e^{-2\alpha}B^2(t)dy^2 - C^2(t)dz^2, \quad (1.12)$$

где  $\alpha$  является постоянным параметром. Заметим, что метрика типа Бьянки-I получается в результате выбора  $\alpha = 0$  из метрики типа Бьянки-III, тогда как метрика Кантовски-Сакса получается, полагая  $\alpha = 0$  и  $B(t) = C(t)$ . Давайте выберем следующий набор диагональных тетрад, относенных к метрике (1.12)

$$[e^a_{\mu}] = \text{diag}[1, A, e^{-\alpha}B, C]. \quad (1.13)$$

Детерминант матрицы (1.13) равен  $e = e^{-\alpha}ABC$ . Компоненты тензора кручения (1.5) для тетрад (1.13) даются формулами

$$T^1_{01} = \frac{\dot{A}}{A}, \quad T^2_{02} = \frac{\dot{B}}{B}, \quad T^2_{21} = \alpha, \quad T^3_{03} = \frac{\dot{C}}{C}. \quad (1.14)$$

В тоже время компоненты соответствующего конторсионного тензора имеет следующий вид

$$K^{01}_{10} = \frac{\dot{A}}{A}, \quad K^{02}_{20} = \frac{\dot{B}}{B}, \quad K^{12}_{21} = \frac{\alpha}{A^2}, \quad K^{03}_{30} = \frac{\dot{C}}{C}. \quad (1.15)$$

Тогда компоненты тензора  $S_{\alpha}^{\mu\nu}$  в (1.7), даются формулами

$$S_0^{01} = S_3^{31} = \frac{\alpha}{2A^2}, \quad S_1^{10} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right),$$

$$S_2^{20} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right), \quad S_3^{30} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right). \quad (1.16)$$

Используя компоненты (1.14) и (1.16), скаляр кручения (1.8) дается формулой

$$T = -2 \left( \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right). \quad (1.17)$$

Уравнения движения записываются как

$$16\pi\rho = f + 4f_T \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\alpha^2}{2A^2} \right], \quad (1.18)$$

$$-16\pi p_x = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] + 2 \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT}, \quad (1.19)$$

$$-16\pi p_y = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] + 2 \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT}, \quad (1.20)$$

$$-16\pi p_z = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\alpha^2}{A^2} \right] + 2 \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{T}f_{TT}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\alpha}{2A^2} \left[ \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) f_T - \dot{T}f_{TT} \right] = 0, \quad (1.22)$$

$$\alpha \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) f_T = 0. \quad (1.23)$$

В частном случае, когда  $f(T) = T - 2\Lambda$ , уравнения (1.18)-(1.23) идентичны тем, которые имеют место в ОТО. Уравнение связи (1.23) возникает в ОТО, а также в  $f(R)$ -гравитации. Но здесь имеем второе уравнение связи (1.22), которое появляется как обобщение предыдущего уравнения, потому что здесь имеем вклад члена второй производной функции  $f(T)$  по переменной  $T$ .

Полагая  $\alpha = 0$ , то есть для метрики типа Бьянки-I, получаем уравнения движения следующего вида:

$$16\pi\rho = f + 4f_T \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right], \quad (1.24)$$

$$-16\pi p_x = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] + 2 \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT}, \quad (1.25)$$

$$-16\pi p_y = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{T}f_{TT}, \quad (1.26)$$

$$-16\pi p_z = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{T}f_{TT}. \quad (1.27)$$

Аналогично уравнения движения соответствующие модели Кантовски-Сакса получаются, полагая  $\alpha=0$  и  $B=C$ . В результате имеем следующие уравнения движения для метрики Кантовски-Сакса:

$$16\pi\rho = f + 4f_T \left[ \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right], \quad (1.28)$$

$$-16\pi p_x = f + 4f_T \left[ \frac{\ddot{B}}{B} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right] + 4\frac{\dot{B}}{B}\dot{T}f_{TT}, \quad (1.29)$$

$$-16\pi p_y = f + 2f_T \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + 3\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right] + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{T}f_{TT}, \quad (1.30)$$

$$p_y = p_z. \quad (1.31)$$

### 1.1.3 Решение в виде замкнутых кривых для метрики типа Бьянки-I

Теперь представим новый вид Вселенных с траекторией в виде замкнутых кривых. Пусть система (1.24)-(1.27) имеет решение в виде

$$A = \alpha \cos[(n-1)t] + \alpha(n-1) \cos[t], \quad (1.32)$$

$$B = \alpha \sin[(n-1)t] - \alpha(n-1) \sin[t], \quad (1.33)$$

$$C = \sin[t]. \quad (1.34)$$

На рисунке 1.1 показана замкнутая кривая, соответствующая решению (1.32)-(1.34) для случая  $\alpha=1, n=5$ .



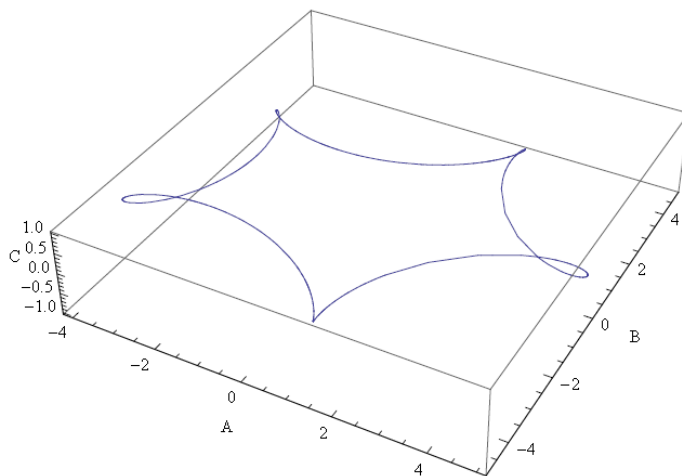


Рисунок 1.1 - Замкнутая кривая, соответствующая решению (1.32)-(1.34),  
 $t \in [0, 2\pi], \alpha = 1$

Подставляя формулы (1.32)-(1.34) в систему (1.24)-(1.27), получим соответствующие выражения для  $\rho$  и  $p_i$ , что дает нам параметрическое УС. Это параметрическое УС имеет вид

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{f}{2} + f_T \frac{D_1}{E_1} + \frac{D_2}{E_2} \dot{T}f_{TT} \right), \quad (1.35)$$

$$p_2 = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{f}{2} + f_T \frac{D_3}{E_3} + \frac{D_4}{E_4} \dot{T}f_{TT} \right), \quad (1.36)$$

$$p_3 = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{f}{2} + f_T \frac{D_5}{E_5} + \frac{D_6}{E_6} \dot{T}f_{TT} \right), \quad (1.37)$$

$$\rho = \frac{f}{16\pi} + \frac{f_T D_0}{4\pi E_0}. \quad (1.38)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 = & (-\alpha \sin((n-1)t)(n-1)^2 + \alpha(n-1) \sin(t))(\alpha \cos((n-1)t) + \\ & + \alpha(n-1) \cos(t)) \sin(t) + (2(-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \\ & - \alpha(n-1) \sin(t)))(\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t)) \\ & \sin(t) + (4(\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t))) \cos(t) \\ & (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)) - (\alpha \cos((n-1)t) + \\ & + \alpha(n-1) \cos(t))(\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t) + \\ & + (2(-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \sin(t))) \cos(t) \\ & (\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$E_1 = [\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)] \alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t) \sin(t), \quad (1.40)$$

$$D_2 = (\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t)) \sin(t) + \cos(t) (\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)), \quad (1.41)$$

$$E_2 = (\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t), \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} D_3 = & (-\alpha \cos((n-1)t)(n-1)^2 - \alpha(n-1) \cos(t))(\alpha \sin((n-1)t) - \\ & - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t) + (2(-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \\ & - \alpha(n-1) \sin(t)))(\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \\ & \cos(t)) \sin(t) + (4(-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \sin(t))) \\ & \cos(t)(\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) - (\alpha \cos((n-1)t) + \\ & + \alpha(n-1) \cos(t))(\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t) + \\ & + (2(\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t))) \\ & \cos(t)(\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)), \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$E_3 = [\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)] \alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t) \sin(t), \quad (1.44)$$

$$D_4 = (-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t) + \cos(t)(\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)), \quad (1.45)$$

$$E_4 = (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)) \sin(t), \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} D_5 = & (-\alpha \cos((n-1)t)(n-1)^2 - \alpha(n-1) \cos(t))(\alpha \sin((n-1)t) - \\ & - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t) + (4(-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \\ & - \alpha(n-1) \sin(t)))(\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t)) \\ & \sin(t) + (2(-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \sin(t))) \cos(t) \\ & (\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) + (-\alpha \sin((n-1)t)(n-1)^2 + \\ & + \alpha(n-1) \sin(t))(\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)) \sin(t) + \\ & + (2(\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t))) \cos(t) \\ & (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)), \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$E_5 = (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t))(\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) \sin(t), \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} D_6 = & (-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \sin(t))(\alpha \sin((n-1)t) - \\ & - \alpha(n-1) \sin(t)) + (\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t)) \\ & (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)), \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} E_6 = & (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)) \\ & (\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)), \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & (-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \sin(t))(\alpha \cos((n-1)t) \\
& (n-1) - \alpha(n-1) \cos(t)) \sin(t) + (-\alpha \sin((n-1)t)(n-1) - \\
& - \alpha(n-1) \sin(t)) \cos(t) (\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)) + \\
& + (\alpha \cos((n-1)t)(n-1) - \alpha(n-1) \cos(t)) \cos(t) \\
& (\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)),
\end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned}
E_0 = & [\alpha \cos((n-1)t) + \alpha(n-1) \cos(t)] \\
& [\alpha \sin((n-1)t) - \alpha(n-1) \sin(t)] \sin(t).
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Теперь, выбирая явный вид функции  $f(T)$ , мы найдем соответствующее УС. Можно показать, что данные решения описывают ускоренное и замедленное расширение Вселенной, соответствующее такому переходу, где ускорение будет равно нулю.

## 1.2 Вселенная с трилистными узлами в космологии типа Бьянки-I

Считается, что ранняя Вселенная началась с сингулярности Большого Взрыва. Помимо этого, в истории развития Вселенной предполагаются такие сингулярности как Большой Разрыв. Исследованию Вселенной с подобными сингулярностями посвящен данный параграф. Существует большое число различных моделей, описывающих циклическую Вселенную [12; 17; 21] (другой подход к описанию циклической Вселенной можно посмотреть в [18-20]).

В работе [21] была изучена теория, связанная с циклической Вселенной, теория заузленных Вселенных на примере трилистника и восьмерки. В однородной и изотропной космологии ФЛРУ, а также в однородной и анизотропной космологии типа Бьянки-I геометрические описания теории этих узлов соответствуют колеблющимся решениям уравнений гравитационного поля [24].

В этом параграфе детально рассмотрим космологические особенности и свойства заузленных Вселенных на примере трилистника, для космологии типа Бьянки-I. В частности, построим конкретную модель, описывающую заузленные Вселенные типа трилистника на основе пространства-времени типа Бьянки-I. В нашей предыдущей работе [22], были изучены модели заузленных Вселенных из однородного и изотропного пространства-времени ФРУ. Используя аналогичную процедуру, в этом параграфе ясно показано, что узловое Вселенные могут быть построены через пространство-время типа Бьянки-I.

### 1.2.1 Уравнения движения

Теория гравитации  $f(T)$  определяется в пространстве-времени Вейтзенбока с помощью выражения (1.1). Можно описать теорию в пространстве-времени, которое позволяет нам переписать линейный элемент (1.1) как (1.2) и (1.3).

Действие теории определяется как (1.9) (предыдущий параграф). В результате получаем следующие уравнения движения (уравнения поля)

$$S_{\mu}{}^{\nu\rho}\partial_{\rho}Tf_{TT} + \left[ e^{-1}e_{\mu}^i\partial_{\rho}\left(ee_i{}^{\alpha}S_{\alpha}{}^{\nu\rho}\right) + T^{\alpha}{}_{\lambda\mu}S_{\alpha}{}^{\nu\lambda} \right] f_T + \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}f = 4\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (1.53)$$

где  $T_{\mu}^{\nu}$  – тензор энергии-импульса,  $f_T = df(T)/dT$  и  $f_{TT} = d^2f(T)/dT^2$ . В простейшем случае  $f(T) = a_1T + a_0$ , получим уравнения движения (1.53) точно такие же, как в телепараллельной теории с космологической константой, и это динамически эквивалентно ОТО. Эти уравнения явно зависят от выбора набора тетрад.

### 1.2.2 Уравнения полей для моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса

Нас интересуют уравнения движения для моделей типа Бьянки-I, типа Бьянки-III и Кантовски-Сакса. Рассмотрим наиболее общий случай метрики типа Бьянки-III в виде (1.12). Тип Бьянки-I получается в результате установления  $\alpha = 0$  из типа Бьянки-III, тогда как Кантовски-Сакса получается, если возьмем  $\alpha = 0$  и  $B(t) = C(t)$ . Выберем следующий набор диагональных тетрад (1.12)

$$[e^{\alpha}_{\mu}] = \text{diag}[1, A, e^{-\alpha}B, C]. \quad (1.54)$$

Детерминант матрицы (1.54) равен  $e = \det(e^{\alpha}_{\mu}) = e^{-\alpha}ABC$ . Скаляр кручения дается формулой (1.17). Уравнения движения даются формулами (1.18)-(1.23).

Когда  $\alpha = 0$  для метрики типа Бьянки-I, то уравнения движения примут вид:

$$16\pi\rho = f + 4f_T\left[\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}\right], \quad (1.55)$$

$$-16\pi p_x = f + 2f_T\left[\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}\right] + 2\left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{T}f_{TT}, \quad (1.56)$$

$$-16\pi p_y = f + 2f_T\left[\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}\right] + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{T}f_{TT}, \quad (1.57)$$

$$-16\pi p_z = f + 2f_T\left[\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}\right] + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{T}f_{TT}. \quad (1.58)$$

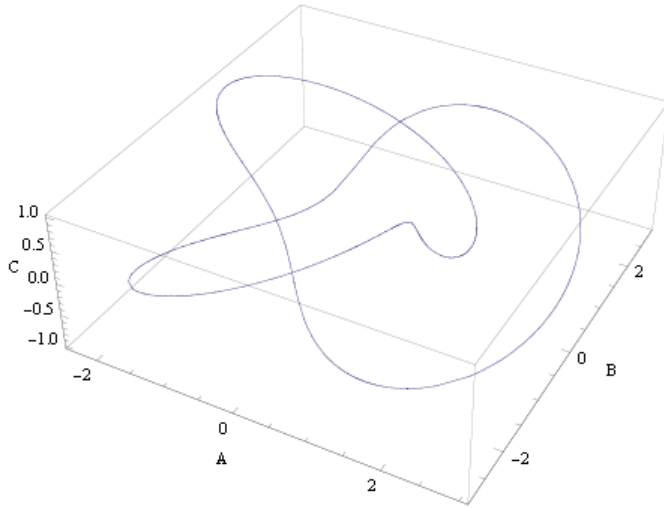


Рисунок 1.2 - Замкнутая кривая, соответствующая решению (1.59)-(1.61),  
 $t \in [0, 2\pi]$

### 1.2.3 Точное решение в виде узловой Вселенной типа трилистника

Пусть система (1.55)-(1.58) имеет решение

$$A = (2 + \cos(3t)) \cos(2t), \quad (1.59)$$

$$B = (2 + \cos(3t)) \sin(2t), \quad (1.60)$$

$$C = \sin(3t). \quad (1.61)$$

На рисунке 1.2 показана замкнутая кривая, соответствующая решению (1.59)-(1.61). Это есть узел типа трилистника. Подставляя формулы (1.59)-(1.61) в систему (1.55)-(1.58) получим соответствующие выражения для  $\rho$  и  $p_i$ , что дает нам параметрическое УС. Это параметрическое УС имеет вид

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{f}{4} + f_T \frac{D_0}{E_0} \right) \quad (1.62)$$

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{f}{2} + \frac{D_1}{E_1} \right), \quad (1.63)$$

$$p_2 = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{f}{2} + \frac{D_2}{E_2} \right), \quad (1.64)$$

$$p_3 = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{f}{2} + \frac{D_3}{E_3} \right). \quad (1.65)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
D_1 = & ((24 \sin(3t)(2 + \cos(3t))^2 (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \\
& - \sin^2(3t)) \cos^4(2t) + (36(2 + \cos(3t))) \sin(2t) \\
& (\sin^4(3t) + (2 \cos^2(3t) + 6 \cos(3t) + 4) \sin^2(3t) + \cos^2(3t)(2 + \\
& + \cos(3t))) \cos^3(2t) + 48 \sin(3t)(-9/4) \sin^4(3t) - (13/4) \\
& (2 + \cos(3t))^2 \sin^2(3t) + \cos(3t)(2 + \cos(3t))^3) \sin^2(2t) \cos^2(2t) - \\
& - (36(2 + \cos(3t))) \sin^3(2t)(\sin^4(3t) + (2 \cos^2(3t) + \\
& + 6 \cos(3t) + 4) \sin^2(3t) + \cos^2(3t)(2 + \cos(3t))) \cos(2t) + \\
& + 24 \sin^4(2t) \sin(3t)(2 + \cos(3t))^2 (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \\
& - \sin^2(3t))) f_{TT} ((-3 \sin(3t) \sin(2t) + (2(2 + \cos(3t))) \cos(2t))(2 + \\
& + \cos(3t)) \cos(2t) \sin(3t) + 3 \cos(3t)(2 + \cos(3t))^2 \cos(2t) \sin(2t)) + \\
& + (24((2 + \cos(3t))(\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \sin^2(3t)) \cos^2(2t) - \\
& - (7/2(\cos^2(3t) + (5/2) \cos(3t) - (3/14) \sin^2(3t) + 1)) \\
& \sin(3t) \sin(2t) \cos(2t) - (1/2) \sin^2(2t)(2 + \cos(3t)) \\
& (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \sin^2(3t)))) \sin^2(3t) f_T (2 + \cos(3t))^3 \\
& \sin^2(2t) \cos^2(2t)) / ((2 + \cos(3t))^3 \cos^2(2t) \sin^2(2t) \sin^2(3t)), \tag{1.66}
\end{aligned}$$

$$E_1 = (2 + \cos(3t))^2 \cos(2t) \sin(2t) \sin(3t), \tag{1.67}$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & ((24 \sin(3t)(2 + \cos(3t))^2 (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \\
& - \sin^2(3t)) \cos^4(2t) + (36(2 + \cos(3t))) \sin(2t)(\sin^4(3t) + \\
& + (2 \cos^2(3t) + 6 \cos(3t) + 4) \sin^2(3t) + \cos^2(3t)(2 + \cos(3t))^2) \\
& \cos^3(2t)^3 + 48 \sin(3t)(-9/4) \sin^4(3t) - (13/4) \\
& (2 + \cos(3t))^2 \sin^2(3t) + \cos(3t)(2 + \cos(3t))^3) \sin^2(2t) \cos^2(2t) - \\
& - (36(2 + \cos(3t))) \sin^3(2t)(\sin^4(3t) + (2 \cos^2(3t) + 6 \cos(3t) + 4) \\
& \sin^2(3t) + \cos^2(3t)(2 + \cos(3t))^2) \cos(2t) + 24 \sin^4(2t) \sin(3t) \\
& (2 + \cos(3t))^2 (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \sin^2(3t))) f_{TT} ((-3 \sin(3t) \\
& \cos(2t) - (2(2 + \cos(3t))) \sin(2t))(2 + \cos(3t)) \sin(2t) \sin(3t) + \\
& + 3 \cos(3t)(2 + \cos(3t))^2 \cos(2t) \sin(2t)) + 12 \sin^2(3t) f_T (2 + \cos(3t))^3 \\
& ((2 + \cos(3t))(\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \sin^2(3t)) \cos^2(2t) - \\
& - (7(\cos^2(3t) + (5/2) \cos(3t) - (3/14) \sin^2(3t) + 1)) \sin(3t) \sin(2t) \\
& \cos(2t) - 2 \sin^2(2t)(2 + \cos(3t))(\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \sin^2(3t))) \\
& \sin^2(2t) \cos^2(2t)) / ((2 + \cos(3t))^3 \cos^2(2t) \sin^2(2t) \sin^2(3t)), \tag{1.68}
\end{aligned}$$

$$E_2 = (2 + \cos(3t))^2 \cos(2t) \sin(2t) \sin(3t), \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = & ((24 \sin(3t)(2 + \cos(3t))^2 (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \sin^2(3t)) \cos^4(2t) + \\
& + (36(2 + \cos(3t))) \sin(2t)(\sin^3(3t) + (2 \cos^2(3t) + 6 \cos(3t) + 4) \\
& \sin^2(3t) + \cos^2(3t)(2 + \cos(3t))^2) \cos^3(2t) + 48 \sin(3t)(-9/4) \\
& \sin^4(3t) - (13/4)(2 + \cos(3t))^2 \sin^2(3t) + \cos(3t)(2 + \cos(3t))^3) \\
& \sin^2(2t) \cos^2(2t) - (36(2 + \cos(3t))) \sin^3(2t)(\sin^4(3t) + \\
& + (2 \cos^2(3t) + 6 \cos(3t) + 4) \sin^2(3t) + \cos^2(3t)(2 + \cos(3t))^2) \\
& \cos(2t) + 24 \sin^4(2t) \sin(3t)(2 + \cos(3t))^2 (\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - \\
& - \sin^2(3t))) f_{TT} (2 \sin(3t)(2 + \cos(3t))(-\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) \\
& \cos(3t) - 3 \sin(2t) \sin(3t) \cos(2t) - 2 \sin^2(2t) + 2 \cos^2(2t))) + \\
& + (12((2 + \cos(3t))(\cos^2(3t) + 2 \cos(3t) - 3 \sin^2(3t)) \cos^2(2t) - \\
& - (13/2) \sin(3t) \sin(2t)(\cos^2(3t) + (34/13) \cos(3t) + 16/13 - \\
& - (6/13) \sin^2(3t)) \cos(2t) - \sin^2(2t)(2 + \cos(3t))(\cos^2(3t) + \\
& + 2 \cos(3t) - 3 \sin^2(3t)))) f_T \sin^2(3t) \sin^2(2t) \cos^2(2t) \\
& (2 + \cos(3t))^3 / ((2 + \cos(3t))^3 \cos^2(2t) \sin^2(2t) \sin^2(3t)), \tag{1.70}
\end{aligned}$$

$$E_3 = (2 + \cos(3t))^2 \cos(2t) \sin(2t) \sin(3t), \tag{1.71}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & (-6 \sin^2(2t) + 6 \cos^2(2t)) \cos^3(3t) + (-24 \sin^2(2t) - \\
& - 22 \sin(2t) \sin(3t) \cos(2t) + 24 \cos^2(2t)) \cos^2(3t) + \\
& + ((-6 \sin^2(3t) + 24) \cos^2(2t) - 52 \sin(2t) \sin(3t) \cos(2t) + \\
& + (-24 + 6 \sin^2(3t)) \sin^2(2t)) \cos(3t) - (12(\sin(3t) \cos(2t) + \\
& + (4/3) \sin(2t))) \sin(3t)(\cos(2t) - (3/4) \sin(3t) \sin(2t)), \tag{1.72}
\end{aligned}$$

$$E_0 = (2 + \cos(3t))^2 \cos(2t) \sin(2t) \sin(3t). \tag{1.73}$$

В данном пункте мы построили модель, описывающую узловые Вселенные типа трилистника, исходя из космологической модели типа Бьянки-I, и исследовали их космологические свойства.

Следует отметить, что по итогам нашей предыдущей [24] и этой работы, узловые Вселенные, описывающие циклические Вселенные, могут быть реализованы для анизотропной космологии типа Бьянки-I. В этой серии работ, были предложены формулировки метода построения моделей узловых Вселенных. Следовательно, представленный формализм будет очень полезным для построения Вселенных и с другими свойствами пространства-времени, как изотропными, так и анизотропными.

И наконец, хотелось бы отметить, что все решения, представленные выше, описывают как ускоренного, так и замедленного расширения Вселенной.

### 1.3 Темная энергия в $F(R, T)$ -гравитации

С момента открытия космического ускорения, МТГ играют важную роль в

современной космологии. В частности, известная  $F(R)$ -теория достигла большой популярности и мотивированна тем, что она является достаточно простой и в то же время теоретически описывает возможность космического ускорения. В настоящем пункте изучаем некоторые обобщения  $F(R)$  и  $F(T)$  теории гравитации, а именно  $F(R,T)$ -гравитацию.

Последние данные наблюдений подтверждают нынешнее ускоренное расширение Вселенной [25]. После этого открытия, ТЭ, вероятно, стала самой масштабной и дразнящей областью исследования в области фундаментальной физики. Там существует несколько подходов к описанию космического ускорения. Среди них, самым простым является введение небольшой положительной космологической постоянной в рамках ОТО, так называемая  $\Lambda$ CDM модель. Другое обобщение ОТО состоит в рассмотрении МТГ [20; 25-26]. В частности, в последние годы вырос интерес к теориям гравитации, таким как  $F(R)$ - и  $F(G)$ -гравитации в качестве альтернативы модели  $\Lambda$ CDM.

В последнее время появились новые альтернативные теории гравитации, а именно  $F(T)$ -теория (предыдущие параграфы). Это обобщенная версия телепараллельной гравитации первоначально предложенная Эйнштейном [27-28]. Она также может описать текущее космическое ускорение без привлечения ТЭ. В отличие от ОТО, где вводится связность Леви-Чивита, в  $f(T)$  гравитации использована связность Вейтзенбока. В принципе, альтернативная гравитация может содержать огромный список инвариантов и нет никаких причин ограничивать теорию тяготения моделями ОТО, телепараллельной гравитацией,  $F(R)$ -гравитацией и/или  $F(T)$ -гравитацией. Действительно, в литературе некоторые обобщения этих теорий были предложены в [29-30]. В этом параграфе мы изучаем некоторые другие обобщения  $F(R)$ - и  $F(T)$ -теории гравитации. В начале кратко рассмотрим формализм  $F(R)$ -гравитации и  $F(T)$ -гравитации в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) Вселенной. Как известно плоское пространство-время Фридмана описывается метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.74)$$

где  $a(t)$  является масштабным фактором. Ортонормированные тетрады компонентов  $e_i(x^\mu)$  связаны с метрикой через

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j, \quad (1.75)$$

где латинские индексы  $i, j$  пробегает значения 0...3 для касательного пространства многообразия, в то время как греческие буквы  $\mu, \nu$  дают индексы координат на многообразии, и меняются от 0,..,3.

Детально были изучены  $F(R)$  и  $F(T)$  МТГ и также была детально проанализирована возможность построения реалистичных моделей в их рамках в ряде работ [31-32]. Для таких теорий, физические мотивации связаны с



возможностью более реалистичного представления гравитационных полей вблизи сингулярностей и возможностью создать некоторое приближение первого порядка для квантовой теории гравитационных полей. В последнее время,  $F(R)$ - и  $F(T)$ -теории гравитации изучались в попытке объяснить позднее ускоренное расширение Вселенной [33-35]. В современной космологии, для того, чтобы построить альтернативные теории гравитации, часто нужны три величины: скалярная кривизна, инвариант Гаусса-Бонне и скаляр кручения:

$$R_S = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.76)$$

$$G_S = R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.77)$$

$$T_S = S^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho. \quad (1.78)$$

В данном пункте, наша цель заключается в замене этих величин другими тремя переменными в виде

$$R_S = u + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.79)$$

$$G_S = \omega + R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.80)$$

$$T_S = \nu + S^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho, \quad (1.81)$$

где  $u = u(x_i; g_{ij}, \dot{g}_{ij}, \ddot{g}_{ij} \dots; f_j)$  и  $\omega = \omega(x_i; g_{ij}, \dot{g}_{ij}, \ddot{g}_{ij} \dots; h_j)$  – некоторые функции, которые будут определены в дальнейшем. В результате, получаем некоторое обобщение известных модифицированных теорий  $F(R)$  и  $F(T)$ . В метрике Фридмана три переменные (1.76)-(1.78) выглядят так

$$R_S = 6(\dot{H} + 2H^2), \quad (1.82)$$

$$G_S = 24H^2(\dot{H} + H^2), \quad (1.83)$$

$$T_S = -6H^2. \quad (1.84)$$

где  $H = (\ln a)_t$ . В противоположность этому, в этом пункте будем использовать следующие три переменные

$$R = u + 6(\dot{H} + 2H^2), \quad (1.85)$$

$$G = \omega + 24H^2(\dot{H} + H^2), \quad (1.86)$$

$$T = \nu - 6H^2. \quad (1.87)$$

Кратко рассмотрим формализм  $F(R)$ - и  $F(T)$ -гравитации для метрики ФРУ. В частности, приведем соответствующие лагранжианы. В пункте (1.3.2), вводим  $F(R,T)$ -теории, где  $R$  и  $T$  будут обобщены по отношению к обычным понятиям скалярной кривизны и скаляра кручения.

### 1.3.1 Предварительные сведения из $F(R)$ -, $F(G)$ - и $F(T)$ -гравитации

В начале, представляем основные уравнения  $F(R)$ ,  $F(G)$  и  $F(T)$ , МТГ. Для простоты в основном работаем в пространства-времени ФРУ.

#### а) $F(R)$ гравитация

Действие  $F(R)$  модифицированной гравитационной теории задается в виде

$$S_R = \int d^4 x e [F(R) + L_m], \quad (1.88)$$

где  $R$  является скалярной кривизной. Работаем с метрикой ФРУ (1.74). В этом случае  $R$  принимает вид

$$R = R_S = 6(\dot{H} + 2H^2). \quad (1.89)$$

Действие перепишем в следующем виде

$$S_R = \int dt L_R, \quad (1.90)$$

где лагранжиан дается формулой

$$L_R = a^3 (F - RF_R) - 6F_{RR} a \dot{a}^2 - 6F_{RR} \dot{R} a^2 \dot{a} - a^3 L_m. \quad (1.91)$$

Соответствующие уравнения движения  $F(R)$ -гравитации выглядят так

$$\rho = 6\dot{R}H F_{RR} - (R - 6H^2)F_R + F \quad (1.92)$$

$$p = -2\dot{R}^2 F_{RRR} + [-4\dot{R}H - 2\ddot{R}]F_{RR} + [-2H^2 - 4a^{-1}\ddot{a} + R]F_R - F \quad (1.93)$$

$$0 = \dot{\rho} + 3H(\rho + p). \quad (1.94)$$

#### б) $F(T)$ гравитация

В модифицированной телепараллель гравитации, гравитационное действие имеет вид

$$S_R = \int d^4 x e [F(T) + L_m], \quad (1.95)$$

где  $e = \det(e^i_\mu) = \sqrt{-g}$ , и для удобства используем единицы  $16\pi G = \hbar = c = 1$ . Скаляр

кручения  $T$  определяется как (параграф 1.1)

$$T \equiv S_{\rho}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (1.96)$$

где

$$T_{\mu\nu}^{\rho} \equiv -e_{\rho}^i (\partial_{\mu} e_{\nu}^i - \partial_{\nu} e_{\mu}^i), \quad (1.97)$$

$$K_{\rho}^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} (T_{\rho}^{\mu\nu} - T_{\rho}^{\nu\mu} - T_{\rho}^{\mu\nu}), \quad (1.98)$$

$$S_{\rho}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (K_{\rho}^{\mu\nu} + \delta_{\rho}^{\mu} T^{\theta\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} T^{\theta\mu}). \quad (1.99)$$

Для пространственно-плоской метрики ФРУ (1.74), как следствие уравнений (1.96) и (1.74), имеем, что скаляр кручения принимает вид

$$T = T_s = -6H^2. \quad (1.100)$$

Действие (1.95) можно записать в виде

$$S_T = \int dt L_T, \quad (1.101)$$

где

$$L_T = a^3 (F - F_T T) - 6F_T a \dot{a}^2 - a^3 L_m. \quad (1.102)$$

Тогда уравнения движения  $F(T)$  гравитации имеют вид

$$12H^2 F_T + F = \rho, \quad (1.103)$$

$$48H^2 F_{TT} \dot{H} - F_T (12H^2 + 4\dot{H}) - F = p, \quad (1.104)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.105)$$

в)  $F(G)$  гравитация

Действие  $F(G)$  модифицированной гравитационной теории имеет вид

$$S_G = \int d^2 x e [F(G) + L_m], \quad (1.106)$$

где для инварианта Гаусса-Бонне на метрике ФРУ имеем следующее выражение

$$G = G_s = 24H^2 (\dot{H} + H^2). \quad (1.107)$$

### 1.3.2 Простейшая модель $F(R,T)$ -гравитации

В этом пункте мы представим простую версию  $F(R,T)$ -гравитации. Будем считать, что соответствующие действия  $F(R,T)$ -теории имеет вид [36-38]

$$S_{37} = \int d^2 x e [F(R,T) + L_m], \quad (1.108)$$

где  $R = u + R_S$  и  $T = \nu + T_S$  – некоторые динамические геометрические переменные, которые должны быть определены, а  $R_S$  и  $T_S$  – обычные скалярная кривизна и скалярное кручение для пространства-времени Фридмана. Так называемая  $M_{37}$ -модель [39]. В этом пункте ограничимся простым случаем, когда для пространства-времени ФРУ  $R$  и  $T$  задаются выражением

$$R = u + 6(\dot{H} + 2H^2) = u + R_S, \quad (1.109)$$

$$T = \nu - 6H^2 = \nu + T_S. \quad (1.110)$$

Как видим, эти две переменные  $(R,T)$  дают некоторые аналогии (обобщения) обычной скалярной кривизны ( $R_S$ ) и скалярного кручения ( $T_S$ ) и, по понятным причинам, до сих пор продолжаем называть их как скалярная "кривизна" и скаляр "кручения". Отметим, что, в общем,  $u = u(t, a, \dot{a}, \ddot{a}, \dots, f_i)$  и  $\nu = \nu(t, a, \dot{a}, \ddot{a}, \dots, g_i)$  – некоторые реальные функции,  $H = (\ln a)_t$ , в то время  $f_i$  и  $g_i$  – некоторые неизвестные функции, связанные с геометрией пространства-времени. Наконец, можем написать  $M_{37}$ -модели в пространстве-времени как ФРУ

$$S_{37} = \int d^2 x e [F(R,T) + L_m], \quad (1.111)$$

$$R = u + 6(\dot{H} + 2H^2), \quad (1.112)$$

$$T = \nu - 6H^2. \quad (1.113)$$

В этом параграфе ограничимся рассмотрением случая  $u = u(a, \dot{a})$  и  $\nu = \nu(a, \dot{a})$ . Масштабный фактор  $a(t)$ , скалярная кривизна  $R$  и скалярное кручение  $T(t)$  берутся в качестве независимых динамических переменных. Затем, после некоторой алгебры действие (1.111) становится

$$S_{37} = \int dt L_{37}, \quad (1.114)$$

где

$$L_{37} = a^3 (F - TF_T - RF_R + \nu F_T + u F_R) - 6(F_R + F_T) a \dot{a}^2 - 6(F_{RR} \dot{R} + F_{RT} \dot{T}) a^2 \dot{a} - a^3 L_m. \quad (1.115)$$

Соответствующие уравнения движения для  $M_{37}$ -модели принимают вид [40-41]

$$\begin{aligned}
 D_2 F_{RR} + D_1 F_R + J F_{RT} + E_1 F_T + K F &= -2a^3 \rho, \\
 U + B_2 F_{TT} + B_1 F_T + C_2 F_{RRT} + C_1 F_{RRT} + \\
 C_0 F_{RT} + M F &= 6a^2 p, \\
 \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

Здесь

$$D_2 = -6\dot{R}a^2\dot{a}, \tag{1.117}$$

$$D_1 = -6a\dot{a}^2 + a^3 u_{,a}\dot{a} - a^3(u - R), \tag{1.118}$$

$$J = -6a^2\dot{a}\dot{T}, \tag{1.119}$$

$$E_1 = -6a\dot{a}^2 + a^3 v_{,a}\dot{a} - a^3(v - T), \tag{1.120}$$

$$K = -a^3, \tag{1.121}$$

и

$$U = A_3 F_{RRR} + A_2 F_{RR} + A_1 F_R, \tag{1.122}$$

$$A_3 = -6\dot{R}^2 a^2, \tag{1.123}$$

$$A_2 = -6\ddot{R}a^2 - 12\dot{R}a\dot{a} + a^3\dot{R}u_{,a}, \tag{1.124}$$

$$A_1 = -6\dot{a}^2 - 12a\ddot{a} + 3a^2\dot{a}u_{,a} + a^3\dot{u}_{,a} - 3a^2(u - R) - a^3u_{,a}, \tag{1.125}$$

$$B_2 = -12\dot{T}a\dot{a} + a^3\dot{T}v_{,a}, \tag{1.126}$$

$$B_1 = -6\dot{a}^2 - 12a\ddot{a} + 3a^2\dot{a}v_{,a} + a^3\dot{v}_{,a} - 3a^2(v - R) - a^3v_{,a}, \tag{1.127}$$

$$C_2 = -12a^2\dot{R}\dot{T}, \tag{1.128}$$

$$C_1 = -6a^2\dot{T}^2, \tag{1.129}$$

$$C_0 = -12\dot{R}a\dot{a} - 12\dot{T}a\dot{a} - 6a^2\ddot{T} + a^3\dot{R}v_{,a} + a^3\dot{T}u_{,a}, \tag{1.130}$$

$$M = -3a^2. \tag{1.131}$$

Теперь можем переписать систему (1.116) в терминах  $H$  как

$$\begin{aligned}
DF_{RR} + D_1F_R + JF_{RT} + E_1F_T + KF &= -2a^3\rho, \\
U + B_2F_{TT} + B_1F_T + C_2F_{RRT} + C_1F_{RRT} + C_0F_{RT} + MF &= 6a^2p, \\
\dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0,
\end{aligned}$$

где

$$D_2 = -6\dot{R}a^2\dot{a} = -6a^3H\dot{R}, \quad (1.132)$$

$$D_1 = -6a\dot{a}^2 + a^3u_a\dot{a} - a^3(u - R) = a^3u_a\dot{a} + 6a^3(\dot{H} + H^2), \quad (1.133)$$

$$J = -6a^3H\dot{T}, \quad (1.134)$$

$$E_1 = -6a\dot{a}^2 + a^3v_a\dot{a} - a^3(v - T) = -12a^3H^2 + a^3v_a\dot{a}, \quad (1.135)$$

$$K = -a^3, \quad (1.136)$$

и

$$U = A_3F_{RRR} + A_2F_{RR} + A_1F_R, \quad (1.137)$$

$$A_3 = -6\dot{R}^2a^2, \quad (1.138)$$

$$A_2 = -6\ddot{R}a^2 - 12\dot{R}a\dot{a} + a^3\dot{R}u_a, \quad (1.139)$$

$$A_1 = -6\dot{a}^2 - 12a\ddot{a} + 3a^2\dot{a}u_a + a^3\dot{u}_a - 3a^2(u - R) - a^3u_a, \quad (1.140)$$

$$B_2 = -12\dot{T}a\dot{a} + a^3\dot{T}v_a, \quad (1.141)$$

$$B_1 = -6\dot{a}^2 - 12a\ddot{a} + 3a^2\dot{a}v_a + a^3\dot{v}_a - 3a^2(v - R) - a^3v_a, \quad (1.142)$$

$$C_2 = -12a^2\dot{R}\dot{T}, \quad (1.143)$$

$$C_1 = -6a^2\dot{T}^2, \quad (1.144)$$

$$C_0 = -12\dot{R}a\dot{a} - 12\dot{T}a\dot{a} - 6a^2\ddot{T} + a^3\dot{R}v_a + a^3\dot{T}u_a, \quad (1.145)$$

$$M = -3a^2. \quad (1.146)$$

### Выводы по 1 разделу

Как это хорошо известно, МТГ играют важную роль в современной космологии. В частности,  $F(R)$ - и  $F(T)$ -теории являются полезным инструментом для изучения ТЭ и мотивированы на фундаментальном уровне. В

данном пункте нами рассмотрена более общая теория, а именно  $F(R,T)$ -гравитация. Конечно, многие аспекты  $F(R,T)$ -теории фактически остаются неизученными. Например, у нас нет никакой реальной модели, которая удовлетворяет космологическим данным, кроме  $F(R)$ - или  $F(T)$ -теории. Не знаем условий реалистичности модели, какие формы  $F(R,T)$  могут быть получены из фундаментальных теорий и так далее (это может быть чрезвычайно важно для реконструкции  $F(R,T)$ -теории, начиная с некоторого базисного принципа). С другой стороны, здесь показано, что  $F(R,T)$ -модели могут быть серьезными кандидатами модифицированной гравитации как модели ТЭ. Также отметим, что поведение и следствия  $F(R,T)$ -гравитации могут быть весьма различными по сравнению с ОТО,  $F(R)$ - и  $F(T)$ -теориями гравитации, так что наблюдательные данные могут различать реалистичные теории гравитации. Не хотим здесь обсуждать достоинства и недостатки разных моделей, поскольку считаем, что это требует некоторого более точного исследования, связанного с космологическими приложениями.

## 2 ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ В НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ФРИДМАНА-РОБЕРТСОНА-УОКЕРА

Одной из величайших задач, стоящих перед космологией сегодня, является задача определения природы ТЭ, возможные причины наблюдаемого настоящего ускорения Вселенной. Помимо энергии вакуума, были предложены различные иные модели ТЭ [42-43]. Пространство-время ФРУ играет важную роль в современной космологии. В частности, наиболее популярные модели ТЭ выполняются в пространстве-времени ФРУ. В настоящем разделе представляется новый класс интегрируемых космологических моделей ФРУ. Эти модели возникли из хорошо известных уравнений Пенлеве. Также рассматриваются некоторые неинтегрируемые модели ФРУ. Эти последние модели строятся с помощью уравнений Пиннея, Шредингера и гипергеометрических уравнений. В данном случае представим описание скалярных полей и двумерные обобщения некоторых космологических моделей. В заключение построены некоторые интегрируемые и неинтегрируемые  $F(R)$ - и  $F(G)$ -модели гравитации.

Недавние измерения красного смещения и соотношений свечение-расстояние суперновых типа  $Ia$  указывают на то, что расширение Вселенной ускоряется. Это не согласуется со стандартной картиной материи, доминирующей во Вселенной. Эти наблюдения могут сопровождаться теоретически постулированием того, что определенная экзотическая материя (ТЭ) с отрицательным давлением доминирует в настоящее время в нашей Вселенной. Понимание природы ТЭ и многих связанных с ней задач является одной из важных проблем в современной космологии [32; 44-52]. Почти все модели ТЭ работают в пространстве-времени ФРУ, то есть, другими словами, являются моделями ФРУ. Практически, все космологические модели ФРУ для ТЭ сталкиваются с некоторыми трудностями, связанными с некоторыми нетривиальными проблемами как проблема совпадения, проблема тонкой настройки и т.д. Такие и другие проблемы космологии требуют более внимательного исследования физической и математической природы моделей ФРУ [53-57]. В этом контексте важными для изучения являются интегрируемые (и неинтегрируемые) случаи моделей ФРУ. Здесь упомянем хорошо известный факт, что гравитационные уравнения Эйнштейна и их некоторые обобщения допускают интегрируемые редукции. В настоящем разделе мы рассматриваем некоторые космологические модели вызванные некоторыми известными линейными и нелинейными ОДУ второго порядка [26; 58-59].

### 2.1 Космология ФРУ

Начнем со стандартного гравитационного действия

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x (R + L_m). \quad (2.1)$$



Здесь  $R$  является скалярной кривизной и  $L_m$  является лагранжиан материи. Теперь рассматриваем пространство-время с масштабным фактором  $a(t)$  и метрикой ФРУ в таком виде

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.2)$$

Здесь  $k$  может принимать любое значение, или соответствует  $(-,0,+)$  кривизнам согласно сигнатуре. Положим  $\dot{a} = da/dt$ . Компоненты символов Кристоффеля определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2, \quad \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = r^{-1}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Они приводят к следующим выражениям для компонентов тензоров кривизны

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}, \\ R_{22} &= r^2 [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k], \quad R_{33} = r^2 [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соответствующий скаляр Риччи имеет вид

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.5)$$

УФ записываются как

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.6)$$

где, если  $p < -\rho/3$ , то мы имеем отталкивающую гравитацию. Используя параметр Хаббла  $H = \dot{a}a^{-1}$ , эти уравнения могут быть переписаны следующим образом:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad \dot{H} = -4\pi G (\rho + 3p) + \frac{k}{a^2}. \quad (2.7)$$

УФ с космологической константой для однородной изотропной модели Вселенной имеют вид:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.8)$$

В настоящем пункте рассматриваем случай  $k = \Lambda = 0$  и полагаем  $8\pi G = 1$ . Если пространство-время ФРУ заполнено жидкостью с плотностью энергии  $\rho$  и давлением  $p$ , тогда сохранение тензора энергии-импульса

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

приводит к

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.10)$$

где точка обозначает дифференцирование по  $t$ . Наконец приведем разные формы УФ. Для действия (2.1) можем переписать в  $H$ -форме

$$p = -2\dot{H} - 3H^2, \quad (2.11)$$

$$\rho = 3H^2, \quad (2.12)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p), \quad (2.13)$$

или в  $N$ -форме

$$p = -2\ddot{N} - 3\dot{N}^2, \quad (2.14)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2, \quad (2.15)$$

$$\dot{\rho} = -3\dot{N}(\rho + p), \quad (2.16)$$

где  $N = \ln a$ . В настоящем разделе мы изучаем некоторые космологические модели, например, с УС следующего вида [44-46]

$$p = f_1(\dot{N}, N, t)\rho + f_2(\dot{N}, N, t)\rho^\beta + f_3(\dot{N}, N, t), \quad (2.17)$$

где  $\beta \neq 1$  и  $f_i = f_i(\dot{N}, N, t)$  являются некоторыми функциями от  $\dot{N}, N$  и  $t$ .

## 2.2 Неинтегрируемые космологические модели ФРУ

В данном параграфе рассматриваем некоторые известные и новые модели ФРУ, для которых  $N$  удовлетворяет некоторым линейным и нелинейным ОДУ второго порядка. Эти ОДУ являются неинтегрируемыми, так что

соответствующая космологическая модель ФРУ неинтегрируема [26; 58-59]. Прежде чем идти дальше, объясняем более четко (как математическое требование), что является интегрируемой ФРУ космологией. Если одна из зависимых переменных некоторой модели ФРУ, скажем  $N$  для нашего случая, удовлетворяет некоторым интегрируемым дифференциальным уравнениям, то такую модель ФРУ называем *интегрируемой моделью ФРУ* (или, другими словами, *интегрируемой космологией ФРУ*). С другой стороны, если  $N$  удовлетворяет некоторым неинтегрируемым дифференциальным уравнениям, то такую модель ФРУ называем *неинтегрируемой моделью ФРУ* (или, другими словами *неинтегрируемой космологией ФРУ*). Теперь дадим определение интегрируемым уравнениям. В математике и физике существуют различные понятия, которые относятся к названию интегрируемые системы (уравнений). В нашем случае, данное нелинейное дифференциальное уравнение называется интегрируемым, если оно допускает бесконечное число независимых сохраняющихся величин (то есть интегралов движения)  $(I_1, I_2, \dots)$  и которые находятся в инволюции. Две сохраняющиеся величины  $(I_i, I_j)$  находятся в инволюции, если они коммутируют, то есть  $\{I_i, I_j\} = 0$ , где  $\{f, g\}$  является некоторой скобкой Пуассона.

### 2.2.1 $\Lambda$ CDM космология

Начнем с  $\Lambda$ CDM космологии. Пусть параметрические УС имеют вид

$$p = -\Lambda, \quad \rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.18)$$

Хорошо известно, что в этом случае,  $N$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\ddot{N} = 0,5\Lambda - 1,5\dot{N}^2. \quad (2.19)$$

Соответствующий параметр УС имеет вид:

$$\omega = -1 + \frac{\rho_0}{\rho_0 + \Lambda a^3}. \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Космология Пиннея

В этом подпункте, изучаем космологические модели, индуцированные уравнением Пиннея. Это уравнение здесь записываем как [61-63]

$$\ddot{y} = \xi(t)y + \frac{k}{y^3}, \quad (2.21)$$

где  $\xi = \xi(t)$ ,  $k = const$ .

1) Пусть параметрическое УС имеет вид:

$$p = -3\dot{N}^2 + 2\zeta^2(t)N - 2kN^{-3}, \quad (2.22)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.23)$$

Тогда можно показать, что  $N$  удовлетворяет уравнению Пиннея

$$\ddot{N} = -\zeta^2(t)N + \frac{k}{N^3}, \quad (2.24)$$

где  $\xi = \xi(t)$ ,  $k = const$ . Известно, для  $\xi = 1$ , уравнение Пиннея имеет следующее частное решение [60]

$$N = (\cos^2 t + k \sin^2 t)^{0.5}. \quad (2.25)$$

Тогда

$$\dot{N} = (k-1) \sin t \cos t (\cos^2 t + k \sin^2 t)^{-0.5}, \quad (2.26)$$

$$\ddot{N} = \left[ k - (\cos^4 t + 2k \sin^2 t \cos^2 t + k^2 \sin^4 t) \right] (\cos^2 t + k \sin^2 t)^{-1.5}, \quad (2.27)$$

и

$$\rho = \frac{3(k-1)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{\cos^2 t + k \sin^2 t}, \quad (2.28)$$

$$p = -\frac{3(k-1)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{\cos^2 t + k \sin^2 t} - \frac{2 \left[ k - (\cos^4 t + 2k \sin^2 t \cos^2 t + k^2 \sin^4 t) \right]}{(\cos^2 t + k \sin^2 t)^{1.5}}. \quad (2.29)$$

Последнее уравнение – это параметрическое УС, соответствующее уравнению Пиннея (2.24) (если точно, то его решению (2.25)). УС можем записать в обычной форме как

$$p = -\rho - 2(kN^{-3} - N) \quad (2.30)$$

Соответствующий параметр УС принимает вид

$$\omega = -\frac{1}{3} - \frac{2k}{3(\cos^2 t + k \sin^2 t)^2}. \quad (2.31)$$

2) Теперь рассмотрим другой вариант космологии Пиннея. Для плоской метрики ФРУ (2.2), обычное уравнение Эйнштейна-Дирака имеет вид

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (2.32)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (2.33)$$

$$\dot{\psi} + 1,5H\psi + i\gamma^0 V_{\bar{\psi}} = 0, \quad (2.34)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + 1,5H\bar{\psi} + iV_{\psi}\gamma^0 = 0, \quad (2.35)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.36)$$

где кинетический член, плотность энергии и давление имеют следующий вид

$$Y = 0,5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi), \quad \rho = V, \quad p = uV_u - V, \quad u = \bar{\psi}\psi. \quad (2.37)$$

Пусть потенциал имеет такой вид

$$V = V_0 + mu + 3c^{\frac{2}{3}}\xi_1 u^{\frac{2}{3}} - 3c^{\frac{2}{3}}\xi_2 u^{\frac{2}{3}} - 1,5c^{\frac{4}{3}}\xi_3 u^{\frac{4}{3}}, \quad (2.38)$$

где  $\xi_j = \xi_j(t)$  является некоторой функцией от  $t$  и  $V_0, m, c = const$ . В этом случае имеем

$$\dot{Y} + 3Hu(V_u + uV_{uu}) = 0, \quad \dot{V} + 3HY = 0, \quad u = ca^{-3}. \quad (2.39)$$

Так как

$$a_{\eta\eta} = -\frac{Y}{2a}, \quad (2.40)$$

для потенциала (2.38), получаем, что масштабный фактор удовлетворяет следующему уравнению

$$a_{\eta\eta} = \xi_1(\eta)a + \xi_2(\eta)a^{-3} + \xi_4(\eta)a^{-4} + \xi_3(\eta)a^{-5}, \quad (2.41)$$

где  $d\eta = adt$ ,  $\xi_4 = 0,5Act$ . Рассмотрим частные случаи.

а) Пусть  $\xi_1 = -\theta^2(\eta)$ ,  $\xi_2 = k$ ,  $\xi_4 = \xi_5 = 0$ . Тогда уравнение (2.41) становится

$$a_{\eta\eta} + \theta^2(\eta)a - \frac{k}{a^3} = 0. \quad (2.42)$$

Это уравнение Пиннея или Ермакова-Пиннея. Общее решение уравнения (2.42) дается следующим образом [62]

$$a = \sqrt{Az_1^2 + Bz_2^2 + 2Cz_1z_2}, \quad (2.43)$$

где  $z_j(\eta)$  – линейно-независимые решения уравнения

$$z_{j\eta\eta} + \theta^2(\eta)z_j = 0. \quad (2.44)$$

Здесь константы  $A, B, C$  удовлетворяют условию связи

$$AB - C^2 = kW^{-2}, \quad (2.45)$$

и

$$W \equiv z_1 z_{2\eta} - z_2 z_{1\eta}, \quad (2.46)$$

является Вронскианом.

б) Теперь рассмотрим случай:  $\xi_1 = -\theta_0^2 = const$ ,  $\xi_2 = \xi_4 = 0$ ,  $\xi_5 = -k$ . Тогда уравнение (2.41) примет форму [64]

$$a_{\eta\eta} + \theta_0^2 a + \frac{k}{a^5} = 0. \quad (2.47)$$

### 2.2.3 Космология Шредингера

Теперь рассмотрим космологическую модель ФРУ индуцированным линейным УШ

$$\ddot{N} = uN + kN, \quad (2.48)$$

где  $u = u(t)$ ,  $k = const$ . Тогда параметрическое УС принимает вид

$$p = -3\dot{N}^2 - 2uN - 2kN, \quad (2.49)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.50)$$

Хорошо известно, что, так как  $u = n(n-1)t^{-2} - k$ , то уравнение (2.48) имеет следующее частное решение

$$N = \lambda t^n. \quad (2.51)$$

Тогда

$$\rho = 3\lambda^2 n^2 t^{2(n-1)}, \quad (2.52)$$

$$p = -3\lambda^2 n^2 t^{2(n-1)} - 2n(n-1)\lambda t^{n-2}. \quad (2.53)$$

Отсюда получаем следующее УС:

$$p = -\rho - 2n(n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} 3^{\frac{2-n}{2(n-1)}} \rho^{\frac{n-2}{2(n-1)}}. \quad (2.54)$$

Соответствующий параметр УС принимает вид

$$\omega = -1 + \frac{2(n-1)}{3n\lambda t^n}. \quad (2.55)$$

Как видим в двух случаях мы получим ТЭ (то есть  $\omega = -1$ ) при  $n=1$  и  $n > 1$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

#### 2.2.4 Гипергеометрическая космология

Теперь рассмотрим космологии, задаваемые гипергеометрическими функциями.

1) Начнем с уравнения

$$\ddot{N} = t^{-1}(1-t)^{-1} \{[(a+b+1)t-c]\dot{N} + abN\}. \quad (2.56)$$

Это гипергеометрическое дифференциальное уравнение. В этом случае, параметрическое УС имеет вид

$$p = -3\dot{N}^2 - 2t^{-1}(1-t)^{-1} \{[(a+b+1)t-c]\dot{N} + abN\}, \quad (2.57)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.58)$$

Решение уравнения (2.56) – это гипергеометрическая функция

$$N = {}_2F_1(a, b, c, t). \quad (2.59)$$

Некоторые частные решения для него имеют вид:

$$\ln(1+t) = {}_2F_1(1, 1; 2; -t), \quad (2.60)$$

$$(1-t)^{-a} = {}_2F_1(a, b; b; t), \quad (2.61)$$

$$\arcsin t = {}_2F_1(0, 5, 0, 5; 1, 5; t^2), \quad (2.62)$$

и т.д. Как пример, рассмотрим решение (2.62) то есть  $N = \arcsin t$ . Тогда

$$\dot{N} = (1-t^2)^{-0,5}, \quad \ddot{N} = t(1-t^2)^{-1,5}, \quad (2.63)$$

и

$$\rho = 3(1-t^2)^{-1}, \quad (2.64)$$

$$p = -3(1-t^2)^{-1} - 2t(1-t^2)^{-1,5}. \quad (2.65)$$

Следовательно, получим следующее УС:

$$p = -\rho - 3^{-1.5} 2t\rho^{1.5}, \quad (2.66)$$

или

$$p = -\rho - 3^{-1.5} 2(\rho - 3)^{0.5} \rho. \quad (2.67)$$

Для этого случая, параметр УС принимает вид

$$\omega = -1 - \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (2.68)$$

2) В качестве следующего примера гипергеометрической космологии можем рассмотреть модели, вызванные эллиптическими интегралами. Как пример, давайте рассмотрим полный эллиптический интеграл первого вида  $K$ :

$$K(t) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-t^2z^2)}}. \quad (2.69)$$

Предполагая, что  $N = K(t)$ , можем рассчитать все выражения для этого случая. Но опустим это, так как этот случай является частным случаем модели (2.59) из-за того, что  $N = K(t) = 0.5\pi_2 F_1(0.5, 0.5, 1, t)$ .

3) Последний пример это случай, когда  $N$  равно одному из неполных эллиптических интегралов. Например, можем положить

$$N(t) = F(t; k) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (2.70)$$

Подобно предыдущим случаям также можем найти все выражения для описания космологической модели, но опускаем это.

### 2.3 Интегрируемые космологические модели ФРУ. Космология Пенлеве

После предыдущего пункта, будет логичным сделать следующий шаг, а именно, рассмотреть некоторые интегрируемые космологии ФРУ [26; 58-59]. Здесь ограничимся космологией Пенлеве индуцированных известными уравнениями Пенлеве. Эти шесть уравнений Пенлеве ( $P_I - P_{VI}$  уравнений) впервые были обнаружены около ста лет назад Пенлеве и его коллегами при исследовании нелинейных уравнений второго порядка ОДУ. В последнее время интерес к уравнениям Пенлеве, в первую очередь, связан с тем, что они возникают, как редукции солитонных уравнений, разрешимых методами обратной задачи [65-66]. Следовательно, уравнения Пенлеве можно



рассматривать как вполне интегрируемые уравнения, обладающие решениями, которые могут быть выражены через решения линейных интегральных уравнений, несмотря на то, что уравнения нелинейны. Уравнений Пенлеве могут быть нелинейными аналогами классических специальных функций. Они обладают иерархиями рациональных решений, однопараметрических семейств решений, выражающихся через классические специальные функции, при специальных значениях параметров. Далее уравнения Пенлеве допускают симметрии относительно аффинных групп Вейля, которые имеют отношение к соответствующим преобразованиям Беклунда. Хотя впервые они были обнаружены из строгих математических соображений, уравнения Пенлеве возникли в различных важных физических приложениях, включая статистическую механику, физику плазмы, нелинейные волны, квантовую гравитацию, квантовую теорию поля, ОТО, нелинейную оптику и волоконную оптику. В этом параграфе покажем, что эти шесть уравнений Пенлеве также могут описать, в частности, ускоренное расширение Вселенной, то есть ТЭ.

Работаем с  $N$ -формой уравнений Эйнштейна, то есть с системой (2.14)-(2.16). Теперь предполагаем, что  $N$  удовлетворяет одному из уравнений Пенлеве. Рассмотрим примеры [ниже  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$  и  $\mu$  это произвольные константы].

### 2.3.1 $P_I$ - модель

Пусть параметрическое УС имеет вид

$$p = -3\dot{N}^2 - 12N^2 - 2t, \quad (2.71)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.72)$$

Тогда можем показать, что  $N$  удовлетворяет  $P_I$ -уравнению [65-66]

$$\ddot{N} = 6N^2 + t. \quad (2.73)$$

Хорошо известно, что  $P_I$ -уравнение может быть выражено как условие совместности

$$A_t - B_\lambda + [A, B] = 0, \quad (2.74)$$

следующей линейной системы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = A\Phi, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = B\Phi. \quad (2.76)$$

Здесь  $A = A(t, \lambda)$  и  $B = B(t, \lambda)$  являются матрицами,  $\lambda$  является спектральным

параметром, который не зависит от  $t$ . Для  $P_I$ -уравнений,  $A$  и  $B$  имеют вид:

$$A = (4\lambda^4 + 2N^2 + t)\sigma_3 - i(4\lambda^2 N + 2N^2 + t)\sigma_2 - (2\lambda\dot{N} + 0.5\lambda^{-1})\sigma_1, \quad (2.77)$$

$$B = (\lambda + \lambda^{-1}N)\sigma_3 - i\lambda^{-1}N\sigma_2, \quad (2.78)$$

где матрицы Паули заданы как:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.2 $P_{II}$ -модель

Наш следующий пример – это случай, когда  $N$  удовлетворяет  $P_{II}$ -уравнению

$$\ddot{N} = 2N^3 + (t - t_0)N + \alpha, \quad (2.79)$$

где  $N = N(t, \alpha)$ ,  $\alpha = const$ . Тогда параметрическое УС имеет вид

$$p = -3\dot{N}^2 - 4N^3 - 2(t - t_0)N - 2\alpha, \quad (2.80)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.81)$$

Отметим, что  $P_{II}$ -уравнение (2.79) можно записать в виде условия совместности (2.74) линейной системы (2.75)-(2.76) с

$$A = -i(4\lambda^2 + 2N^2 + t)\sigma_3 - 2\dot{N}\sigma_2 + (4\lambda N - \alpha\lambda^{-1})\sigma_1, \quad (2.82)$$

$$B = -i\lambda\sigma_3 + N\sigma_1. \quad (2.83)$$

Хорошо известно, что  $P_{II}$ -уравнение имеет следующее частное решение

$$N = N(t, 1) = -(t - t_0)^{-1}. \quad (2.84)$$

Тогда

$$\dot{N} = (t - t_0)^{-2}, \quad \ddot{N} = -2(t - t_0)^{-3}, \quad (2.85)$$

и

$$\rho = 3(t - t_0)^{-4}, \quad p = 4(t - t_0)^{-3} - 3(t - t_0)^{-4}. \quad (2.86)$$

Для этого примера, УС и его параметр состояния принимает вид

$$p = -\rho + 4\left(\frac{\rho}{3}\right)^{0.75}, \quad (2.87)$$

и

$$\omega = -1 + \frac{4}{3}(t - t_0). \quad (2.88)$$

Так, если  $t < t_0 + 0.5$  ( $t > t_0 + 0.5$ ) тогда эта  $P_{II}$ -модель описывает ускоренное (замедленное) расширение Вселенной и случай  $t = t_0$  соответствует космологической константе.

### 2.3.3 $P_{III}$ -модель

Пусть параметрическое УС имеет вид

$$p = -3\dot{N}^2 - 2\left[\frac{1}{N}\dot{N}^2 - \frac{1}{t}(\dot{N} - \alpha N^2 - \beta) + \gamma N^3 + \frac{\delta}{N}\right], \quad (2.89)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.90)$$

Тогда  $N$  удовлетворяет  $P_{III}$ -уравнению [65-66]

$$\ddot{N} = \frac{1}{N}\dot{N}^2 - \frac{1}{t}(\dot{N} - \alpha N^2 - \beta) + \gamma N^3 + \frac{\delta}{N}, \quad (2.91)$$

где  $N = N(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . Одно из частных решений этого уравнения имеет вид [65-66]

$$N = N(t, \alpha, 0, 0, -\alpha k^3) = kt^{\frac{1}{3}}. \quad (2.92)$$

Тогда

$$\dot{N} = \frac{\kappa}{3}t^{-2/3}, \quad \ddot{N} = -\frac{2\kappa}{9}t^{-5/3}, \quad (2.93)$$

и

$$\rho = \frac{k^2}{3}t^{-4/3}, \quad p = -\frac{k^2}{3}t^{-4/3} + \frac{4k}{9}t^{-5/3}. \quad (2.94)$$

Соответствующее УС и его параметр состояния принимают вид

$$p = -\rho + \frac{4}{\sqrt[4]{27k^6}}\rho^{1.25}, \quad (2.95)$$

и

$$\omega = -1 + \frac{4}{3k\sqrt[3]{t}}. \quad (2.96)$$

### 2.3.4 $P_{IV}$ -модель

Рассмотрим параметрическое УС в форме

$$p = -3\dot{N}^2 - 2\left[\frac{1}{N}\dot{N}^2 - \frac{1}{t}(\dot{N} - \alpha N^2 - \beta) + \gamma N^3 + \frac{\delta}{N}\right], \quad (2.97)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2. \quad (2.98)$$

Тогда для  $N$  приходим к уравнению

$$\ddot{N} = \frac{1}{2N}\dot{N}^2 + 1.5N^3 + 4tN^2 + 2(t^2 - \alpha)N + \frac{\delta}{N}, \quad (2.99)$$

что есть не что иное, как  $P_{IV}$ -уравнение. Здесь  $N = N(t, \alpha, \delta)$ . Одно из частных решений этого уравнения имеет вид [65-66]

$$N = N(t, 0, -2) = -2t. \quad (2.100)$$

Тогда

$$\dot{N} = -2, \quad \ddot{N} = 0, \quad (2.101)$$

и

$$\rho = 12, \quad p = -12. \quad (2.102)$$

Соответствующее УС и его параметр состояния принимают вид

$$p = -\rho, \quad \omega = -1. \quad (2.103)$$

### 2.3.5 $P_V$ -модель

Пусть  $N$  это решение  $P_V$ -уравнения [65-66]

$$\begin{aligned} \ddot{N} = & \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{N-1}\right)\dot{N}^2 - \frac{1}{t}(\dot{N} - \gamma N) + \\ & + t^{-2}(N-1)^2(\alpha N + \beta N^{-1}) + \frac{\delta N(N+1)}{N-1}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

где  $N = N(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . Соответствующее параметрическое УС дается следующим выражением

$$\begin{aligned} p = & -3\dot{N}^2 - 2\left[\left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{N-1}\right)\dot{N}^2 - \frac{1}{t}(\dot{N} - \gamma N) + \right. \\ & \left. + t^{-2}(N-1)^2(\alpha N + \beta N^{-1}) + I\right], \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2, \quad (2.106)$$

где  $I = \delta N(N+1)(N-1)^{-1}$ . Хорошо известно, что уравнение (2.104) имеет следующее частное решение [65-66]

$$N = N(t, 0, 0, \mu, -0.5\mu^2) = ke^{\mu t}. \quad (2.107)$$

Тогда

$$\dot{N} = k\mu e^{\mu t}, \quad \ddot{N} = k\mu^2 e^{\mu t}, \quad (2.108)$$

и

$$\rho = 3k^2\mu^2 e^{2\mu t}, \quad p = -3k^2\mu^2 e^{2\mu t} - 2k\mu^2 e^{\mu t}. \quad (2.109)$$

Соответствующее УС и его параметр состояния принимают вид

$$p = -\rho \mp 2\mu\sqrt{\frac{\rho}{3}}, \quad (2.110)$$

и

$$\omega = -1 - \frac{2}{3k} e^{-\mu t}. \quad (2.111)$$

### 2.3.6 $P_{VI}$ -модель

Наш последний пример интегрируемых космологий ФРУ это  $P_{VI}$ -модель. Ее параметрическое УС дается выражением

$$p = -3\dot{N}^2 - 2\left[0.5\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-t}\right)\dot{N}^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{N-t}\right)\dot{N} + J\right], \quad (2.112)$$

$$\rho = 3\dot{N}^2, \quad (2.113)$$

где  $J = t^{-2}(t-1)^{-2}N(N-1)(N-t)[\alpha + \beta tN^{-2} + \gamma(t-1)(N-1)^{-2} + \delta(t-1)(N-t)^{-2}]$ .

Соответствующее нелинейное ОДУ – это  $P_{VI}$ -уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{N} = & 0.5\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-t}\right)\dot{N}^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{N-t}\right)\dot{N} + \\ & + t^{-2}(t-1)^{-2}N(N-1)(N-t)[\alpha + \beta tN^{-2} + \gamma(t-1)(N-1)^{-2} + \\ & + \delta(t-1)(N-t)^{-2}], \end{aligned} \quad (2.114)$$

где  $N = N(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . Его частное решение это [65-66]

$$N = N(t, 0.5k^2, -0.5k^2, 0.5\mu^2, 0.5(1-\mu^2)) = t^{0.5}. \quad (2.115)$$

Тогда

$$\dot{N} = 0.5t^{-0.5}, \quad \ddot{N} = -0.25t^{-1.5}, \quad (2.116)$$

и

$$\rho = \frac{3}{4}t^{-1}, \quad p = -\frac{3}{4}t^{-1} + 0.5t^{-1.5}. \quad (2.117)$$

Соответствующее УС и его параметр состояния принимают вид:

$$p = -\rho + \sqrt{\frac{16}{27}\rho^{1.5}}, \quad (2.118)$$

и

$$\omega = -1 + \frac{2}{3}t^{-0.5}. \quad (2.119)$$

### 2.3.7 Структура гамильтониана

Очень важно, что все уравнения Пенлеве могут быть представлены в виде Гамильтоновой формы, то есть [65-66]

$$\dot{q} = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad (2.120)$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \quad (2.121)$$

где  $F(q, r, t)$  является соответствующей функцией Гамильтониана. Рассмотрим некоторые примеры [65-66].

i)  $P_I$ -модель. В этом случае,  $q, r, F$  записываются следующим образом

$$\dot{q} = r, \quad (2.122)$$

$$\dot{r} = 6q^2 + t, \quad (2.123)$$

$$F = 0.5r^2 - 2q^3 - tq. \quad (2.124)$$

ii)  $P_{II}$ -модель. В этом случае имеем

$$\dot{q} = r - q^2 - 0.5t, \quad (2.125)$$

$$\dot{r} = 2qr + \alpha + 0.5, \quad (2.126)$$

$$F = 0.5r^2 - (q^2 + 0.5t)r - (\alpha + 0.5)q. \quad (2.127)$$

iii)  $P_{III}$ -модель. В этом случае имеем

$$t\dot{q} = 2q^2r - k_2tq^2 - (2\theta_1 + 1)q + k_1t, \quad (2.128)$$

$$t\dot{r} = -2qr^2 + 2k_2tqr + (2\theta_1 + 1)r - k_2((\theta_1 + \theta_2)t), \quad (2.129)$$

$$t\dot{F} = q^2r^2 - [k_2tq^2 + (2\theta_1 + 1)q - k_1t]r + k_2(\theta_1 + \theta_2)tq. \quad (2.130)$$

## 2.4 $F(R)$ -гравитационные модели, вызванные ОДУ второго порядка

В этом пункте рассмотрим  $F(R)$ -гравитационные модели, индуцированные ОДУ второго порядка. Некоторые из этих  $F(R)$ -гравитационных моделей являются интегрируемыми, а другие неинтегрируемыми.

### 2.4.1. Интегрируемые $F(R)$ -гравитационные модели

Здесь наша цель – представить класс интегрируемых  $F(R)$ -гравитационных моделей для случая метрики ФРУ. Для того, чтобы сделать это используем опять уравнения Пенлеве. Рассмотрим действие  $F(R)$ -гравитации [12-13; 15; 67-71]

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x [R + f(R) + L_m] \quad (2.131)$$

В случае метрики ФРУ, уравнения для действия (2.131) даются выражением

$$3H^2 = \rho_{eff}, \quad 2H + 3\dot{H} = p_{eff}. \quad (2.132)$$

Здесь

$$\rho_{eff} = -0.5f + 3(H^2 + \dot{H})f' - 18H(\ddot{H} + 4H\dot{H})f'', \quad (2.133)$$

$$p_{eff} = 0.5f - (3H^2 + \dot{H})f' + 6(\ddot{H} + 6H\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 8H^2\dot{H})f'' + 36(\ddot{H} + 4H\dot{H})^2 f''', \quad (2.134)$$

где  $f' = df/dR$  и т.д. Для построения интегрируемых  $f(R)$ -гравитационных моделей, предполагаем, что функция  $f(R)$  удовлетворяет некоторому интегрируемому ОДУ. В качестве примера, здесь потребуем, чтобы  $f(R)$  являлось решением одного из уравнений Пенлеве. Давайте представим эти уравнения.

1)  $F_I(R)$ -модели.

а)  $F_{IA}(R)$ -модель:

$$f'' = 6f^2 + R, \quad (2.135)$$

или

$$F'' = 6F^2 + R, \quad (2.136)$$

где  $F = R + f(R)$ .

б)  $F_{IB}(R)$ -модель. Заметим, что вместо этих двух моделей можем рассмотреть следующие:

$$\ddot{f} = 6f^2 + t,$$

или

$$\ddot{F} = 6F^2 + t.$$

2)  $F_{II}(R)$ -модели.

а)  $F_{IIA}(R)$ -модель:

$$f'' = 2f^3 + Rf + \alpha, \quad (2.137)$$

или

$$F'' = 2F^3 + RF + \alpha. \quad (2.138)$$

б)  $F_{IIB}(R)$ -модели. Альтернативные модели даются следующим выражением

$$\ddot{f} = 2f^3 + tf + \alpha,$$

или

$$\ddot{F} = 2F^3 + tF + \alpha.$$

3)  $F_{III}(R)$ -модели.

а)  $F_{IIIA}(R)$ -модель:

$$f'' = \frac{1}{f} f'^2 - \frac{1}{R} (f' - \alpha f^2 - \beta) + \gamma f^3 + \frac{\delta}{f}, \quad (2.139)$$

или



$$F'' = \frac{1}{F} F'^2 - \frac{1}{R} (F' - \alpha F^2 - \beta) + \gamma F^3 + \frac{\delta}{F}. \quad (2.140)$$

б)  $F_{\text{IB}}(R)$ -модель. Альтернативные модели даются выражением

$$\ddot{f} = \frac{1}{f} \dot{f}^2 - \frac{1}{R} (\dot{f} - \alpha f^2 - \beta) + \gamma f^3 + \frac{\delta}{f},$$

или

$$\ddot{F} = \frac{1}{F} \dot{F}^2 - \frac{1}{t} (\dot{F} - \alpha F^2 - \beta) + \gamma F^3 + \frac{\delta}{F}.$$

4)  $F_{IV}(R)$ -модели.

а)  $F_{IVa}(R)$ -модель:

$$f'' = \frac{1}{2f} f'^2 + 1.5f^3 + 4Rf^2 + 2(R^2 - \alpha)f + \frac{\delta}{f}, \quad (2.141)$$

или

$$F'' = \frac{1}{2F} F'^2 + 1.5F^3 + 4RF^2 + 2(R^2 - \alpha)F + \frac{\delta}{F}. \quad (2.142)$$

б)  $F_{IVb}(R)$ -модель:

$$\ddot{f} = \frac{1}{2f} \dot{f}^2 + 1.5f^3 + 4Rf^2 + 2(t^2 - \alpha)f + \frac{\delta}{f},$$

или

$$\ddot{F} = \frac{1}{2F} \dot{F}^2 + 1.5F^3 + 4tF^2 + 2(t^2 - \alpha)F + \frac{\delta}{F}.$$

5)  $F_V(R)$ -модели.

а)  $F_{Va}(R)$ -модель:

$$f'' = \left( \frac{1}{2f} + \frac{1}{f-1} \right) f'^2 - \frac{1}{R} (f' - \gamma) + R^{-2} (f-1)^2 (\alpha f + \beta f^{-1}) + \frac{\delta f (f+1)}{f-1}, \quad (2.143)$$

или

$$F'' = \left(\frac{1}{2F} + \frac{1}{F-1}\right)F'^2 - \frac{1}{R}(F' - \gamma F) + R^{-2}(F-1)^2(\alpha F + \beta F^{-1}) + \frac{\delta F(F+1)}{F-1}. \quad (2.144)$$

б)  $F_{VB}(R)$ -модель:

$$\ddot{f} = \left(\frac{1}{2f} + \frac{1}{f-1}\right)\dot{f}^2 - \frac{1}{R}(\dot{f} - \gamma f) + t^{-2}(f-1)^2(\alpha f + \beta f^{-1}) + \frac{\delta f(f+1)}{f-1},$$

ИЛИ

$$\ddot{F} = \left(\frac{1}{2F} + \frac{1}{F-1}\right)\dot{F}^2 - \frac{1}{R}(\dot{F} - \gamma F) + R^{-2}(F-1)^2(\alpha F + \beta F^{-1}) + \frac{\delta F(F+1)}{F-1}.$$

б)  $F_{VI}(R)$ -модели.

а)  $F_{VIA}(R)$ -модель:

$$f'' = 0.5\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f-1} + \frac{1}{f-R}\right)f'^2 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-1} + \frac{1}{f-R}\right)f' + R^{-2}(R-1)^{-2}f(f-1)(f-R)[\alpha + \beta Rf^{-2} + \gamma(R-1)(f-1)^{-2} + \delta R(R-1)(f-R)^{-2}]. \quad (2.145)$$

Вместо этого уравнения рассматриваем следующее

$$F'' = 0.5\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F-1} + \frac{1}{F-R}\right)F'^2 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-1} + \frac{1}{F-R}\right)F' + R^{-2}(R-1)^{-2}F(F-1)(F-R)[\alpha + \beta RF^{-2} + \gamma(R-1)(F-1)^{-2} + \delta R(R-1)(F-R)^{-2}]. \quad (2.146)$$

б)  $F_{VIB}(R)$ -модель:

$$\ddot{f} = 0.5\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f-1} + \frac{1}{f-t}\right)\dot{f}^2 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-1} + \frac{1}{f-R}\right)\dot{f} + t^{-2}(t-1)^{-2}f(f-1)(f-t) [\alpha + \beta tf^{-2} + \gamma(t-1)(f-1)^{-2} + \delta t(t-1)(f-t)^{-2}],$$

И

$$\ddot{F} = 0.5\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F-1} + \frac{1}{F-R}\right)\dot{F}^2 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-1} + \frac{1}{F-R}\right)\dot{F} + \\ + t^{-2}(t-1)^{-2}F(F-1)(F-t) \\ \left[\alpha + \beta tF^{-2} + \gamma(t-1)(F-1)^{-2} + \delta t(t-1)(F-t)^{-2}\right]$$

Выше  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  являются некоторыми константами и функция  $F(R)$  соответствует действию

$$S = \sqrt{-g}d^4x[F(R) + L_m] \quad (2.147)$$

Все выше названные космологические  $F_J(R)$  модели ( $J = I, II, III, IV, V, VI$ ) являются интегрируемыми из-за интегрируемости уравнений Пенлеве. В частности, это значит, что эти модели допускают  $n$ -солитонных решений. В качестве примера, представим здесь некоторые точные решения для  $F_{II}$  космологии, которая дается выражением (2.137). Хорошо известно, что уравнение (2.137) имеет следующее рациональное решение

$$f(R) \equiv f(R; n) = \frac{d}{dR} \left( \ln \left( \frac{E_{n-1}(R)}{E_n(R)} \right) \right), \quad (2.148)$$

где  $E_n(R)$  – это нормированные полиномы (коэффициент высшего порядка от  $R$  это 1) и удовлетворяют следующему уравнению

$$E_{n+1}(R)E_{n-1}(R) = RE_n^2(R) + 4E_n^2(R) - 4E_n(R)E_n''(R). \quad (2.149)$$

Это уравнение имеет следующие первые решения [65, 66]

$$E_0(R) = 1, \quad (2.150)$$

$$E_1(R) = R, \quad (2.151)$$

$$E_2(R) = R^3 + 4, \quad (2.152)$$

$$E_3(R) = R^6 + 20R^3 - 80, \quad (2.153)$$

$$E_4(R) = R^{10} + 60R^7 - 11200R, \quad (2.154)$$

$$E_5(R) = R^{15} + 140R^{12} - 2800R^9 + 78400R^6 + \\ + 313600R^3 - 6272000, \quad (2.155)$$

$$E_6(R) = R^{21} + 280R^{18} - 18480R^{15} + 627200R^{12} + \\ + 17248000R^9 - L, \quad (2.156)$$

где  $L = 1448332000R^6 + 193177600000R^3 - 38635520000$  и т.д. Соответствующее выражение для  $f(R)$  имеет вид [65-66]

$$f(R) \equiv f(R;1) = -\frac{1}{R}, \quad (2.157)$$

$$f(R) \equiv f(R;2) = -\frac{1}{R} - \frac{3R^2}{R^3 + 4}, \quad (2.158)$$

$$f(R) \equiv f(R;3) = \frac{3R^2}{R^3 + 4} - \frac{6R^2(R^3 + 10)}{R^6 + 20R^3 - 80}, \quad (2.159)$$

$$f(R) \equiv f(R;4) = -\frac{1}{R} + \frac{6R^2(R^3 + 10)}{R^6 + 20R^3 - 80} - \frac{9R^5(R^3 + 40)}{R^9 + 60R^6 + 1120}, \quad (2.160)$$

и т.д. Также интересно заметить, что функция  $f(R)$  может быть выражена так называемой  $\tau$ -функцией как [65-66]

$$f(R) \equiv f(R;n) = \frac{d}{dR} \left( \ln \left( \frac{\tau_{n-1}(R)}{\tau_n(R)} \right) \right), \quad (2.161)$$

где

$$\tau_n(R) = \begin{vmatrix} p_1(R) & p_3(R) & \cdot & p_{2n-1}(R) \\ p_1'(R) & p_3'(R) & \cdot & p_{2n-1}'(R) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(n-1)}(R) & p_3^{(n-1)}(R) & \cdot & p_{2n-1}^{(n-1)}(R) \end{vmatrix}. \quad (2.162)$$

Здесь  $p_j(R)$  – это полиномы, определяемые  $p_j(R) = 0$  для  $j < 0$  и

$$e^{\lambda R - \frac{4}{3}\lambda^3} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(R) \lambda^j. \quad (2.163)$$

#### 2.4.2 Неинтегрируемые $F(R)$ -гравитационные модели

Очевидно, что некоторые  $f(R)$ -гравитационные модели могут быть построены неинтегрируемыми ОДУ второго порядка. Рассмотрим примеры.

а) Наш первый пример это гипергеометрическое дифференциальное уравнение [12]

$$R(1-R)f'' + [c - (a+b+1)R]f' - abf = 0. \quad (2.164)$$

Оно имеет решение  $f(R) = {}_2F_1(a, b, c, R)$ , которое является

гипергеометрической функцией. Можем также рассмотреть  $t$ -версию уравнения

$$t(1-t)\ddot{f} + [c - (a+b+1)t]\dot{f} - abf = 0, \quad (2.165)$$

с решением  $f(t) = {}_2F_1(a, b, c, t)$ .

б) Другой пример – это случай, когда  $f(R)$  удовлетворяет уравнению Пиннея

$$f'' + \xi_1(R)f + \frac{\xi_2(R)}{f^3} = 0. \quad (2.166)$$

Если  $\xi_1 = 1, \xi_2 = k = const$ , то это уравнение имеет следующее решение [60]

$$f(R) = \cos^2 R + k^2 \sin^2 R. \quad (2.167)$$

Его " $t$ -форма" это  $f(t) = \cos^2 t + k^2 \sin^2 t$ , которое является решением уравнения Пиннея

$$\ddot{f} + \xi_1(R)f + \frac{\xi_2(t)}{f^3} = 0, \quad (2.168)$$

если  $\xi_1 = 1, \xi_2 = k = const$ .

в) Представим еще один пример. Пусть функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$f'' = 6f^2 - 0.5q_2, \quad (q_2 = const), \quad (2.169)$$

или

$$\ddot{f} = 6f^2 - 0.5q_2. \quad (2.170)$$

Эти уравнения допускают следующие решения

$$f(R) = \wp(R), \quad (2.171)$$

и

$$f(R) \equiv f(t) = \wp(t), \quad (2.172)$$

где  $\wp(R)$  и  $\wp(t)$  – это эллиптические функции Вейерштрасса.

## 2.5 $F(G)$ -гравитационные модели, вызванные ОДУ второго порядка

Следующая важная гравитационная теория – это  $F(G)$ -гравитация, где  $G$  является инвариантом Гаусса-Бонне. Теперь расширим результаты предыдущих параграфов для случая  $F(G)$ -гравитации, то есть рассмотрим  $F(G)$ -гравитацию, индуцированную ОДУ второго порядка. Как и в предыдущих случаях  $F(R)$ -гравитации, некоторые из этих  $F(G)$ -гравитационных моделей интегрируемы, а другие неинтегрируемы. Рассмотрим примеры [15; 68-71].

### 2.5.1 Интегрируемые $F(G)$ -гравитационные модели

В этом пункте, представляем класс интегрируемых  $F(G)$ - гравитационных моделей для случая метрики ФРУ, использующую опять уравнения Пенлеве. Действие  $F(G)$ -гравитации напишем как

$$S = \int \sqrt{-q} d^4x [R + f(G) + L_m], \quad (2.173)$$

или

$$S = \int \sqrt{-q} d^4x [F(G) + L_m] \quad (2.174)$$

Здесь

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\tau}R^{\mu\nu\sigma\tau} \quad (2.175)$$

– это инвариант Гаусса-Бонне, который для метрики ФРУ принимает вид

$$G = 24H^2(\dot{H} + H^2). \quad (2.176)$$

Уравнения ФРУ для действия (2.173) даются выражением

$$3H^2 = \rho_G + \rho_m, \quad 2\dot{H} + 3H^2 = -(p_G + p_m). \quad (2.177)$$

Здесь

$$\rho_G = Gf_G - f - 24H^3G)f_{GG}, \quad (2.178)$$

$$p_G = -\rho_G + 8H^2G^2 f_{GGG} - E, \quad (2.179)$$

где  $E = -192f_{GG}(4H^6\dot{H} - 8H^3\dot{H}\ddot{H} - 6H^2H^3 - H^4\ddot{H} - 3H^5\ddot{H} - 18H^4\dot{H})$  и  $f_G = d/dG$ , и т.д. Для построения интегрируемых  $f(G)$ -гравитационных моделей, предполагаем, что функция  $f(G)$  удовлетворяет некоторому ОДУ, а именно, одному из уравнений Пенлеве. Здесь приводим только список таких интегрируемых моделей, исследование которых оставляем на будущее.

1)  $F_I(G)$ -модели.

а)  $F_{IA}(G)$ -модель:

$$f_{GG} = 6f^2 + G, \quad (2.180)$$

или

$$F_{GG} = 6F^2 + G. \quad (2.181)$$

б)  $F_{IB}(G)$ -модель:

$$\ddot{f} = 6f^2 + t,$$

или

$$\ddot{F} = 6F^2 + t.$$

2)  $F_{II}(G)$ -модель.

а)  $F_{IIA}(G)$ -модель:

$$f_{GG} = 2f^3 + Gf + \alpha, \quad (2.182)$$

или

$$F_{GG} = 2F^3 + GF + \alpha. \quad (2.183)$$

б)  $F_{IIB}(G)$ -модель:

$$\ddot{f} = 2f^3 + tf + \alpha.$$

или

$$\ddot{F} = 2F^3 + tF + \alpha.$$

3)  $F_{III}(G)$ -модели.

а)  $F_{IIIA}(G)$ -модель:

$$f_{GG} = \frac{1^2}{f_G} - \frac{1}{G}(f_G - \alpha f^2 - \beta) + \gamma f^3 + \frac{\delta}{f}, \quad (2.184)$$

или

$$F_{GG} = \frac{1^2}{F_G} F_G^2 - \frac{1}{G}(F_G - \alpha F^2 - \beta) + \gamma F^3 + \frac{\delta}{F}. \quad (2.185)$$

б)  $F_{IIIB}(G)$ -модель:

$$\ddot{f} = \frac{1}{f} \dot{f}^2 - \frac{1}{t} (\dot{f} - \alpha f^2 - \beta) + \gamma f^3 + \frac{\delta}{f},$$

ИЛИ

$$\ddot{F} = \frac{1}{F} \dot{F}^2 - \frac{1}{t} (\dot{F} - \alpha F^2 - \beta) + \gamma F^3 + \frac{\delta}{F}.$$

4)  $F_{IV}(G)$ -модели.

а)  $F_{IVA}(G)$ -модель:

$$f_{GG} = \frac{1}{2f} f_G^2 + 1.5f^3 + 4Gf^2 + 2(G^2 - \alpha)f + \frac{\delta}{f}, \quad (2.186)$$

ИЛИ

$$F_{GG} = \frac{1}{2F} F_G^2 + 1.5F^3 + 4GF^2 + 2(G^2 - \alpha)F + \frac{\delta}{F}. \quad (2.187)$$

б)  $F_{IVB}(G)$ -модель:

$$\ddot{f} = \frac{1}{2f} \dot{f}^2 + 1.5f^3 + 4tf^2 + 2(t^2 - \alpha)f + \frac{\delta}{f},$$

ИЛИ

$$\ddot{F} = \frac{1}{2F} \dot{F}^2 + 1.5F^3 + 4tF^2 + 2(t^2 - \alpha)F + \frac{\delta}{F}.$$

5)  $F_V(G)$ -модели.

а)  $F_{VA}(G)$ -модель:

$$\begin{aligned} f_{GG} = & \left( \frac{1}{2f} + \frac{1}{f-1} \right) f_G^2 - \frac{1}{G} (f_G - \gamma f) + \\ & + G^{-2} (f-1)^2 (\alpha f + \beta f^{-1}) + \frac{\delta f (f+1)}{f-1}, \end{aligned} \quad (2.188)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} F_{GG} = & \left( \frac{1}{2F} + \frac{1}{F-1} \right) F_G^2 - \frac{1}{G} (F_G - \gamma F) + \\ & + G^{-2} (F-1)^2 (\alpha F + \beta F^{-1}) + \frac{\delta F (F+1)}{F-1}. \end{aligned} \quad (2.189)$$



б)  $F_{VB}(G)$ -модель:

$$\begin{aligned}\ddot{f} &= \left( \frac{1}{2f} + \frac{1}{f-1} \right) \dot{f}^2 - \frac{1}{R} (\dot{f} - \gamma f) + \\ &+ t^{-2} (f-1)^2 (\alpha f + \beta f^{-1}) + \frac{\delta f (f+1)}{f-1},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\ddot{F} &= \left( \frac{1}{2F} + \frac{1}{F-1} \right) \dot{F}^2 - \frac{1}{R} (\dot{F} - \gamma F) + \\ &+ t^{-2} (F-1)^2 (\alpha F + \beta F^{-1}) + \frac{\delta F (F+1)}{F-1}.\end{aligned}$$

б)  $F_{VI}(G)$ -модели.

а)  $F_{VA}(G)$ -модель:

$$\begin{aligned}f_{GG} &= 0.5 \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{f-1} + \frac{1}{f-G} \right) f_G^2 - \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G-1} + \frac{1}{f-G} \right) f_G + \\ &+ G^{-2} (G-1)^{-2} f (f-1) (f-G) [\alpha + \beta G f^{-2} + \\ &+ \gamma (G-1) (f-1)^{-2} + \delta G (G-1) (f-G)^{-2}],\end{aligned}\tag{2.190}$$

или

$$\begin{aligned}F_{GG} &= 0.5 \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F-1} + \frac{1}{F-G} \right) F_G^2 - \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G-1} + \frac{1}{F-G} \right) F_G + \\ &+ G^{-2} (G-1)^{-2} F (F-1) (F-G) [\alpha + \beta G F^{-2} + \\ &+ \gamma (G-1) (F-1)^{-2} + \delta G (G-1) (F-G)^{-2}].\end{aligned}\tag{2.191}$$

б)  $F_{VIB}(G)$ -модель:

$$\begin{aligned}\ddot{f} &= 0.5 \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{f-1} + \frac{1}{f-G} \right) \dot{f}_G^2 - \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G-1} + \frac{1}{f-G} \right) \dot{f} + \\ &+ t^{-2} (t-1)^{-2} f (f-1) (f-t) [\alpha + \beta t f^{-2} + \gamma (t-1) (f-1)^{-2} + \\ &+ \delta t (t-1) (f-t)^{-2}],\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\ddot{F} &= 0.5 \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F-1} + \frac{1}{F-G} \right) \dot{F}_G^2 - \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G-1} + \frac{1}{F-G} \right) \dot{F} + \\ &+ t^{-2} (t-1)^{-2} F (F-1) (F-t) [\alpha + \beta t F^{-2} + \gamma (t-1) (F-1)^{-2} + \\ &+ \delta t (t-1) (F-t)^{-2}].\end{aligned}$$

Таким образом, все эти модели являются интегрируемыми, то есть они допускают  $n$ -солитонные решения, бесконечное число коммутирующих интегралов, представления Лакса и т.д.

### 2.5.2 Неинтегрируемые $f(G)$ -гравитационные модели

Теперь приведем краткий список некоторых неинтегрируемых  $F(G)$ -гравитационных моделей которые могут быть построены с помощью неинтегрируемых ОДУ второго порядка. Давайте рассмотрим примеры.

#### 1) Гипергеометрические дифференциальные уравнения [12]

$$G(1-G)f_{GG} + [c - (a+b+1)G]f_G - abf = 0, \quad (2.193)$$

или

$$t(1-t)\ddot{f} + [c - (a+b+1)t]\dot{f} - abf = 0. \quad (2.194)$$

Заметим, что эти уравнения имеют следующие решения  $f(G) = {}_2F(a, b, c, G)$  и  $f(G) \equiv f(t) = {}_2F(a, b, c, t)$  соответственно.

#### 2) Уравнение Пиннея

$$f_{GG} + \xi_1(G)f + \frac{\xi_2(G)}{f^3} = 0, \quad (2.195)$$

или

$$\ddot{f} + \xi_1(t)f + \frac{\xi_2(t)}{f^3} = 0. \quad (2.196)$$

Если  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = k = const$ , то эти уравнения имеют следующие решения

$$f(G) = \cos^2 G + k^2 \sin^2 G, \quad (2.197)$$

и

$$f(G) \equiv f(t) = \cos^2 t + k^2 \sin^2 t \quad (2.198)$$

соответственно.

#### 3) Наша последняя модель дается уравнением

$$f_{GG} = 6f^2 - 0.5q_2, \quad (q_2 = const), \quad (2.199)$$

или

$$\ddot{f} = 6f^2 - 0.5q_2, \quad (2.200)$$

которая допускает следующие решения

$$f(G) = \wp(G), \quad (2.201)$$

и

$$f(G) \equiv f(t) = \wp(t), \quad (2.202)$$

соответственно. Здесь  $\wp(G)$  и  $\wp(t)$  являются эллиптическими функциями Вейерштрасса.

## 2.6 Описание в терминах скалярных полей

Как известно, скалярные поля играют существенную роль в современной космологии, так как эти поля являются возможными кандидатами на роль инфляционных полей, приводящих к раздуванию в ранней Вселенной, и на роль вещества ТЭ, ответственного за настоящее космическое ускорение. Для описания выше представленных моделей с теоретической точки зрения необходимо введение скалярного поля  $\phi$  и самовзаимодействующего потенциала  $U(\phi)$  со следующим лагранжианом:

$$L_m = 0.5\dot{\phi}^2 - U(\phi), \quad (2.203)$$

где  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ . Соответствующая плотность энергии и плотность даются выражением

$$\rho = 0.5\dot{\phi}^2 + U(\phi), \quad p = 0.5\dot{\phi}^2 - U(\phi). \quad (2.204)$$

Рассмотрим  $P_{II}$ -космологию (подпункт 2.3.2). Тогда получаем, что

$$\dot{\phi} = \sqrt{-2(2N^3 + tN + \alpha)dt}, \quad U = 3\dot{N}^2 + 2N^3 + tN + \alpha. \quad (2.205)$$

Следовательно, для частного решения (2.77) получим

$$\phi = \phi_0 - 4t^{-0.5}, \quad U = 3t^{-4} - 2t^{-3}. \quad (2.206)$$

Это дает

$$U = 2^{-16}3(\phi - \phi_0)^8 - 2^{-11}(\phi - \phi_0)^6, \quad (2.207)$$

где  $\phi = const$ . Аналогично, можем найти выражения для  $\phi$  и его потенциала самовзаимодействия для других примеров, рассмотренных выше.

## 2.7 Двумерные обобщения

Вышерассмотренные ФРУ модели являются одномерными. Здесь представим их двумерные обобщения [65-66].

а) В качестве примера, давайте рассмотрим  $P_{II}$ -модель. Введем новую функцию  $v = v(y, \mu)$  следующим образом

$$v(y, \mu) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\mu}} N(t), \quad (2.208)$$

где  $N(t)$  – это решение  $P_{II}$ -уравнения (2.79),  $y = t\sqrt[3]{3\mu}$  это новая "временная" координата,  $\mu$  – это некоторый физический параметр. Здесь в качестве примера, принимаем  $\mu = \Lambda$ , где  $\Lambda$  – космологическая константа.

Тогда функция  $v = v(y, \Lambda)$  подчиняется следующему уравнению [65-66]

$$v_{\Lambda} - 6v^2v_y + v_{yyy} = 0. \quad (2.209)$$

Это хорошо известное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ), которое является интегрируемым.

б) Аналогично, можем построить двумерные обобщения других моделей. Например, пусть  $v$  имеет вид

$$v(y, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\Lambda}} f(R), \quad (2.210)$$

где  $f(R)$  – это решение  $F_{II}$ -уравнения (2.137),  $y = R\sqrt[3]{3\Lambda}$ . Тогда функция  $v = v(y, \Lambda)$  опять удовлетворяет уравнению (2.209). Если возьмем  $v$  в виде:

$$v(y, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{9\Lambda^2}} [N'(t) + N^2(t)], \quad (2.211)$$

где  $N(t)$  является решением  $P_{II}$ -уравнения (2.79), тогда функция  $v$  удовлетворяет уравнению КдФ [65-66]

$$v_{\Lambda} - 6vv_y + v_{yyy} = 0, \quad (2.212)$$

которое также интегрируемо. Для  $F_{II}$ -модели (2.137),  $v$  дается выражением

$$v(y, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{9\Lambda^2}} [f'(R) + f^2(R)], \quad (2.213)$$

и  $y = R\sqrt[3]{3\Lambda}$ , где  $f(R)$  – это решение уравнения (2.137).

в) Теперь рассмотрим двумерное обобщение уравнений (2.91) и (2.139). Пусть  $y = t\mu^{-1}$  и  $N(t)$  является решением  $P_{III}$ -уравнения (2.91) с  $\alpha = -\beta = 0.5$ ,  $\gamma = \delta = 0$ . Тогда функция

$$v(y, \mu) = i \ln N(t), \quad (2.214)$$

удовлетворяет уравнению синус-Гордона [65-66; 72]

$$v_{y\mu} = \sin v. \quad (2.215)$$

Если  $y = R\mu^{-1}$  и  $v(y, \mu) = i \ln f(R)$ , тогда  $f(R)$  удовлетворяет уравнению (2.139).

## 2.8 Реконструкция решений уравнения Эйнштейна с помощью уравнений Рамануджана и Шези

Уравнение Эйнштейна для метрики ФРУ играет фундаментальную роль в космологии. Прямой поиск точных решений уравнения Эйнштейна даже в случае этой простой метрики является трудной задачей. Оказывается полезным построение решений уравнений Эйнштейна, используя известные решения других уравнений, которые являются эквивалентными или связаны с уравнением Эйнштейна. Одним из известных дифференциальных уравнений из теории чисел является уравнение Рамануджана. Оно очень хорошо изучено. В частности, известно, что уравнение Рамануджана является эквивалентным известному уравнению Шези-III. В литературе, представлено много точных решений уравнения Рамануджана и уравнения Шези-III. Оба этих уравнения играют важную роль в теории чисел. Целью этого параграфа является установление связи между тремя уравнениями, а именно уравнением Эйнштейна, уравнением Рамануджана и уравнением Шези-III.

### 2.8.1 Уравнение

В этом параграфе вкратце напомним некоторые основные факты об уравнении Эйнштейна для метрики ФРУ. Начнем со стандартного гравитационного действия

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + L_m], \quad (2.216)$$

где  $R$  является скалярной кривизной,  $L_m$  – лагранжиан для материи. Рассмотрим метрику ФРУ (1.74). Тогда уравнение Эйнштейна имеет вид

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (2.217)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (2.218)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.219)$$

Перепишем выражение (2.218) в следующем виде

$$\dot{F} = \frac{F^2 - E}{12}, \quad (2.220)$$

где

$$F = -18H, \quad E = -108p = 108(2\dot{H} + 3H^2). \quad (2.221)$$

Теперь введем новую функцию  $J$  в следующем виде

$$J = FE - 3\dot{E} = -2 \cdot 18^2 (\ddot{H} + 9H\dot{H} + 9H^3), \quad (2.222)$$

и потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению:  $2\dot{J} = FJ - E^2$ . Таким образом, окончательно приходим к следующей системе:

$$\dot{F} = \frac{F^2 - E}{12}, \quad (2.223)$$

$$\dot{E} = \frac{FE - J}{3}, \quad (2.224)$$

$$\dot{J} = \frac{FJ - E^2}{2}. \quad (2.225)$$

Это и есть уравнение Рамануджана [118-119]. Можем переписать его следующим образом

$$qF_q = \frac{F^2 - E}{12}, \quad (2.226)$$

$$qE_q = \frac{FE - J}{3}, \quad (2.227)$$

$$qJ_q = \frac{FJ - E^2}{2}, \quad (2.228)$$

где  $q = e^t$ . Тогда система (2.226)-(2.228) имеет следующее решение [120]

$$F = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n}, \quad (2.229)$$

$$E = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n}, \quad (2.230)$$

$$J = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1 - q^n}, \quad (2.231)$$

которые, фактически, являются Эйзенштейновскими рядами Рамануджана. Если исключим  $E$  и  $J$  из системы (2.223)-(2.225), то получим следующее дифференциальное уравнение для  $F$ :

$$\ddot{F} = F\dot{F} - 1.5\dot{F}^2. \quad (2.232)$$

Это уравнение после масштабного преобразования

$$F = 2y, \quad (2.233)$$

примет вид

$$\ddot{y} = 2y\dot{y} - 3\dot{y}^2. \quad (2.234)$$

Это и есть уравнение Шези-III [121]. Недавно, было показано, что уравнение Шези-III (2.234) имеет применения в нескольких областях математической и теоретической физики, включая магнитные монополи [122], самодвойственные уравнения Янга-Миллса и Эйнштейна [123-124], и теорию топологических полей [125]. В дополнение, уравнение Шези-III было выведено как специальное упрощение гидродинамического типа уравнений [126], так же как стационарные, несжимаемые уравнения Прандля для граничных слоев [127]. Недавно в работе [128] была изучена геометрия некоторых уравнений Шези. Заметим, что уравнение Шези-III (2.234) является эквивалентным следующим уравнениям

$$\dot{A} = BC - A(B + C), \quad (2.235)$$

$$\dot{B} = AC - B(A + C), \quad (2.236)$$

$$\dot{C} = AB - C(A + B), \quad (2.237)$$

если положить

$$y = -2(A + B + C), \quad (2.238)$$

$$\dot{y} = 2(AC + BC + AB), \quad (2.239)$$

$$\ddot{y} = -12ABC. \quad (2.240)$$

Это классическое уравнение Дарбу-Халфена [65], которое появляется в анализе Дарбу по трижды ортогональным поверхностям и позднее решенное Халфеном. Уравнение Дарбу-Халфена (2.235)-(2.237) также является

эквивалентным уравнениям Эйнштейна в вакууме для Римановой самодуальной метрики Бьянки-IX [129-130].

### 2.8.2 Решения

Как известно, уравнение Шези-III допускает некоторые точные решения [65; 120; 131-133]. Например, оно имеет следующие решения:

$$y_1 = c_1 = const, \quad y_2 = -\frac{6}{t}, \quad y_3 = \frac{\alpha}{t^2} - \frac{6}{t}, \quad y_4 = 4 \frac{d}{dt} \log \theta_1'(0, t), \quad \alpha = const \quad (2.241)$$

и

$$y_5(t) = \pi i F(e^{2\pi i t}), \quad \text{Im}(t) > 0. \quad (2.242)$$

В этом параграфе построим решения уравнения Эйнштейна (2.217)-(2.219), соответствующие решениям  $y_1, y_2, y_3$  уравнения Шези-III (2.234), которые связаны с решениями уравнений Рамануджана (2.223)-(2.225).

#### і) Пример 1

Прежде всего, рассмотрим решение  $y_2$  (2.241). Соответствующее решение уравнения Рамануджана (2.223)-(2.225) дается формулой

$$F_2 = -\frac{12}{t}, \quad E_2 = 0, \quad J_2 = 0. \quad (2.243)$$

Для решения  $y_2$  получим следующее решение уравнения Эйнштейна

$$a = a_0 t^{\frac{2}{3}}, \quad (2.244)$$

$$H = \frac{2}{3t}, \quad (2.245)$$

$$\rho = \frac{4}{3t^2}, \quad (2.246)$$

$$p = 0. \quad (2.247)$$

Следовательно, имеем

$$\rho + p = \frac{4}{3t^2}. \quad (2.248)$$

Также можем непосредственно проверить то, что уравнение непрерывности (2.219) тождественно выполняется. Уравнение параметра состояния это  $\omega = 0$ .



ii) Пример 2

Теперь рассмотрим случай, когда  $y = y_1 = c_1 = -9H_0 = const$ . Тогда уравнение Рамануджана (2.223)-(2.225) имеет следующее решение

$$F_1 = -18H_0, \quad E_2 = 324H_0^2, \quad J_2 = -5832H_0^3. \quad (2.249)$$

Для решения  $y_1$  получаем

$$a = a_0 e^{H_0 t}, \quad (2.250)$$

$$H = H_0, \quad (2.251)$$

$$\rho = 3H_0^2, \quad (2.252)$$

$$p = -3H_0^2. \quad (2.253)$$

В этом случае, уравнение непрерывности (2.219) тождественно выполняется и уравнением параметра состояния является  $\omega = -1$ .

iii) Пример 3

Теперь рассмотрим решение  $y_3$  (2.241). Соответствующим решением уравнения Рамануджана (2.223)-(2.225) является

$$F_3 = 2\left(\frac{\alpha}{t^2} - \frac{6}{t}\right), \quad E_3 = \frac{4\alpha^2}{t^4}, \quad J_3 = \frac{8\alpha^3}{t^6}. \quad (2.254)$$

В этом случае масштабный фактор

$$a = a_0 t^{\frac{2}{3}} e^{9t}. \quad (2.255)$$

Для уравнения Эйнштейна имеем

$$H = -\frac{1}{9}\left(\frac{\alpha}{t^2} - \frac{6}{t}\right), \quad (2.256)$$

$$\rho = \frac{1}{27}\left(\frac{\alpha}{t^2} - \frac{6}{t}\right)^2, \quad (2.257)$$

$$p = -\frac{\alpha^2}{27t^4}. \quad (2.258)$$

Используя

$$\rho + p = \frac{4}{3t^2} - \frac{4\alpha}{9t^3}, \quad (2.259)$$

можем непосредственно проверить то, что уравнение непрерывности (2.219) тождественно выполняется. Уравнение параметра состояния есть

$$\omega = -\frac{\alpha^2}{(\alpha - 6t)^2}. \quad (2.260)$$

### Выводы по 2 разделу

В настоящем разделе мы рассмотрели некоторые космологические модели ФРУ с параметрическим УС, где  $e$ -фолдинг  $N$  играет роль параметра состояния. Для построения космологической модели в явном виде потребовали, чтобы  $N$  являлось решением некоторых линейных и нелинейных ОДУ второго порядка. Если такие ОДУ интегрируемы, тогда соответствующие модели ФРУ также интегрируемы. Это значит что такие модели допускают все характеристики интегрируемых систем такие как  $n$ -солитонные решения, коммутирующие интегралы, представления Лакса и т.д.

Построили интегрируемые модели ФРУ, индуцированные уравнениями Пенлеве. Также расширили наши результаты для модифицированных  $F(R)$ - и  $F(G)$ -гравитационных теорий. Нашли явные виды решений для  $f(R)$ - и  $f(G)$ -функций для плоской Вселенной ФРУ, заполненной некоторой экзотической жидкостью с параметрическим УС. Затем описали одну из рассмотренных моделей как космологическую модель ФРУ, имеющую скалярное поле и нашли его потенциал самовзаимодействия. Заметим, что все ФРУ модели, рассмотренные выше, являются одномерными. Также обсудили полученные двумерные решения некоторых моделей. В этом случае, в качестве второй координаты взяли некоторый физический параметр  $\mu$ , например, космологическую константу  $\Lambda$ .

Основная идея нашей работы – это реконструкция некоторых гравитационных моделей, используя решения некоторых дифференциальных уравнений (в нашем случае, ОДУ второго порядка). Здесь хотели бы заметить, что этот подход работает не только для ОДУ второго порядка и может быть расширен на другие ОДУ и даже на частные дифференциальные уравнения. Давайте вкратце покажем это. В качестве примера, можем рассмотреть случай  $N$ -решения следующего уравнения

$$\dot{N}^2 = 4N^3 - q_2 N - q_3, \quad (2.261)$$

где  $g_1, g_2$  – это некоторые константы. Его решение это  $N(t) = \wp(t)$ , то есть эллиптические функции Вейерштрасса. Соответствующее УС дается выражением

$$p = -\rho - 12\wp^2(t) + 2q_2. \quad (2.262)$$

$F$ -версии уравнения (2.261) это  $\dot{f}^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$ ,  $f_R^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$  и

$f_G^2 = 4f^3 - g_2f - g_3$ . Другие интересные модели следуют из уравнения Бернулли:

$$\dot{N} = q_1(t)N^n + q_2(t)N. \quad (2.263)$$

Например, если  $n=2$ ,  $q_1 = -t^2$ ,  $q_2 = 2t^{-1}$ , тогда уравнение Бернулли имеет решение  $N = t^2(0.2t^5 + const)^{-1}$ .  $f$ -версия этого решения это  $f(R) = R^2(0.2R^5 + const)^{-1}$  и  $f(G) = G^2(0.2G^5 + const)^{-1}$ . В заключение, хотим отметить, что было бы интересно проверить связь моделей с моделями  $F(R)$ - и  $F(G)$ -гравитации, объединяющими инфляцию с ТЭ [73-75]. Этот важный вопрос будет предметом дальнейшего исследования.

В настоящем разделе изучено уравнение Эйнштейна в метрике ФРУ. Установлена связь между уравнениями Эйнштейна, Рамануджана и Шези-III. Используя этот результат, который использует некоторые известные решения уравнения Рамануджана и уравнения Шези-III, построены некоторые точные решения уравнения Эйнштейна. Заметим, что оказывается интересным найти связь между уравнением Эйнштейна и другими уравнениями, известными из других областей физики и математики. Например, здесь пытаемся показать, как можно вывести известное уравнение Лоренца для осциллятора из уравнения Эйнштейна, если берем некоторые ограничения для решений уравнения Эйнштейна. Фактически, давайте перепишем (2.218) в следующем виде

$$X_N = \sigma(Y - X), \quad (2.264)$$

где

$$X = H^2, \quad Y = \frac{(\sigma - 3)X - p}{\sigma}, \quad N = \ln a, \quad \sigma = const. \quad (2.265)$$

Теперь введем новую функцию  $Z$  в виде

$$Z = \frac{\delta X - Y - Y_N}{X}, \quad (2.266)$$

где  $\delta = const$ . Тогда эти три функции  $X, Y, Z$  удовлетворяют уравнениям

$$X_N = \sigma(Y - X), \quad (2.267)$$

$$Y_N = X(\delta - Z) - Y. \quad (2.268)$$

Следующий наш шаг – это следующее ограничение для  $Z$ , а именно оно должно подчиняться дополнительному уравнению  $Z_N = XY - \beta Z$ . Так, окончательно получим систему:

$$X_N = \sigma(Y - X), \quad (2.269)$$

$$Y_N = X(\delta - Z) - Y, \quad (2.270)$$

$$Z_N = XY - \beta Z. \quad (2.271)$$

Это и есть уравнение Лоренца для осциллятора. Также как и уравнение Рамануджана и уравнение Шези-III, уравнение Лоренца для осциллятора моделирует некоторый подкласс решений уравнения Эйнштейна. Заметим, что уравнение Лоренца (2.269) может быть переписано как дифференциальное уравнение 3-го порядка для  $X(t)$  [134-136]:

$$X\ddot{X} - \dot{X}\ddot{X} + X^3\dot{X} + \sigma X^4 + (\beta + \sigma + 1)X\ddot{X} + (\sigma + 1)(\beta X\dot{X} - \dot{X}^2) + \beta(1 - \delta)\sigma X^2 = 0. \quad (2.272)$$

### 3 МОДЕЛИ ТИПА ДИРАКА-БОРНА-ИНФЕЛЬДА И МОДЕЛИ ГАЗА ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ В $f$ -ЭССЕНЦИИ

В этом разделе рассмотрена космологическая модель с фермионным полем и с неканоническим кинетическим членом ( $f$ -эссенция). Представлены некоторые важные редукции этой модели, а также ее обобщения. Также находим некоторые точные решения модели и проверяем влияние такого гравитационно-фермионного взаимодействия на наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной. Далее, обсуждаем космологические применения точных моделей. Показываем, что модель  $f$ -эссенции соответствует  $\Lambda$ CDM модели, но не является стандартной моделью холодной ТМ, не содержащей излучения. Также, модель  $f$ -эссенции не имеет решения типа статической Вселенной Эйнштейна. Далее обсуждаем несколько фермионных моделей типа ДБИ как некоторые частные редукции  $f$ -эссенции, соответственно, а также найдены их эквиваленты газу Чаплыгина.

Недавние данные из сверхновой типа  $Ia$  и космического микроволнового фонового излучения указывают на пространственно-плоскую и ускоренно-расширяющуюся Вселенную [42-43].

В контексте космологии ФРУ с гравитацией Эйнштейна, это ускорение объясняется доминированием компоненты с отрицательным давлением, называемой ТЭ. К настоящему времени, природа ТЭ остается загадкой. Теоретически, простейшим кандидатом для такой компоненты является маленькая положительная космологическая константа, но есть трудности, связанные с точной настройкой и проблемой совпадения [9]. Поэтому, для объяснения природы ТЭ многие авторы предложили динамические модели ТЭ, такие как квинтэссенция, фантом,  $k$ -эссенция, квинтом и т.д. [76-78].

Предполагая достоверность теории гравитации, для объяснения настоящего этапа ускоренного расширения Вселенной предлагается существование экзотической, свободно доминирующей составляющей энергетического содержания Вселенной, известной как ТЭ, с необычными физическими свойствами. Другая возможность – это связь с модифицированием ОТО в больших масштабах [12-13; 32; 79-83]. В космологии, исследования по конституентам, ответственным за ускоренные периоды в эволюции Вселенной, имеют большой интерес. Загадочная ТЭ была предложена как причина поздне-временной динамики текущей ускоренной фазы Вселенной.

Недавно, теории, описываемые действием с нестандартными кинетическими членами  $k$ -эссенции были объектами интенсивного исследования. Такие теории были впервые изучены в контексте  $k$ -инфляция [84], и потом модели  $k$ -эссенции были предположены как динамическая ТЭ для решения проблемы космического совпадения [48; 85–87]. Модели  $k$ -эссенции имеют также аттрактор решений: это значит, что дифференциальные решения модели  $k$ -эссенции дают решение, представляющее настоящее состояние Вселенной независимо от выбора начальных условий, наложенных на значение

скалярного поля. Таким образом, в модели  $k$ -эссенции решается проблема совпадения. Такие модели  $k$ -эссенции с неканоническими формами лагранжиана в некоторых случаях не могут определить определенную динамику для скалярного поля. Недавно, несколько попыток сделаны для объяснения ускоренного расширения с помощью выбора фермионных полей как гравитационные источники энергии [26-27; 88–104; 143]. В частности, было показано, что фермионное поле играет очень важную роль в: 1) сохранении изотропной формы начального анизотропного пространства-времени; 2) космологических решениях без сингулярности; 3) предсказывании поздне-временного ускорения. В настоящем разделе мы изучаем космологическую модель с фермионным полем – так называемую  $f$ -эссенцию. Проверяем влияние такого гравитационно-фермионного взаимодействия на ускоренное расширение Вселенной. Формулировка гравитационно-фермионной теории была обсуждена подробно в [105-108], поэтому представим здесь только результаты.

### 3.1 Основы $f$ -эссенции

В настоящем пункте рассматриваем фермионное поле  $\psi$  для  $f$ -эссенции, минимально связанной с гравитационным полем  $g_{\mu\nu}$ , которое дается действием следующего вида

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(Y, \psi, \bar{\psi})] \quad (3.1)$$

Здесь лагранжиан  $K$  зависит от фермионного поля  $\psi$ , его сопряжения  $\bar{\psi}$  и канонического члена  $Y$ . В общем, канонический кинетический член  $Y$  имеет вид

$$Y = 0.5i[\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - (D_\mu\bar{\psi})\Gamma^\mu\psi]. \quad (3.2)$$

Будем работать с метрикой пространства-времени (1.74), то есть с метрикой ФРУ. Для этой метрики, тетрада выбирается в виде

$$(e_a^\mu) = \text{diag}(1, 1/a, 1/a, 1/a), \quad (e_\mu^a) = \text{diag}(1, a, a, a). \quad (3.3)$$

Матрицы Дирака для искривленного пространства-времени  $\Gamma^\mu$  имеют вид

$$\Gamma^0 = \gamma^0, \quad \Gamma^1 = a^{-1}\gamma^1, \quad \Gamma^2 = a^{-1}\gamma^2, \quad \Gamma^3 = a^{-1}\gamma^3, \quad (3.4)$$

$$\Gamma_0 = \gamma^0, \quad \Gamma_1 = a\gamma^1, \quad \Gamma_2 = a\gamma^2, \quad \Gamma_3 = a\gamma^3. \quad (3.5)$$

Следовательно, получим

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_1 = 0.5\dot{a}\gamma^1\gamma^0, \quad \Omega_2 = 0.5\dot{a}\gamma^2\gamma^0, \quad \Omega_3 = 0.5\dot{a}\gamma^3\gamma^0. \quad (3.6)$$

Теперь мы можем написать уравнения движения  $f$ -эссенции. Имеем

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (3.7)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (3.8)$$

$$K_Y \dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\psi - i\gamma^0 K_{\bar{\psi}} = 0, \quad (3.9)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\bar{\psi} + iK_{\psi}\gamma^0 = 0, \quad (3.10)$$

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + p_f) = 0, \quad (3.11)$$

где  $Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi)$  и

$$\rho_f = YK_Y - K, \quad p_f = K, \quad (3.12)$$

являются плотностью энергии и давление фермионного поля. Если  $K = Y - V$ , тогда из системы (3.7)-(3.11) получим соответствующие уравнения модели Эйнштейна-Дирака.

### 3.2 Решение

В этом параграфе хотим построить решение определенной модели  $f$ -эссенции. Пусть  $K = K(Y, u)$ , где  $u = \bar{\psi}\psi$ . Теперь рассмотрим подмодель  $K = A + B$ , где полагаем, что  $A_2 = \alpha Y^n$ ,  $B_2 = \beta u^m$ , то есть случай  $K = \alpha Y^n + \beta u^m$ . Пусть  $a = a_0 t^\lambda$ . Тогда имеем следующее решение

$$Y = \left\{ \left[ -\frac{6m\lambda^2 - 4(m+1)\lambda}{\alpha m} \right] t^{-2} \right\}^{\frac{1}{n}}, \quad u = \left\{ \left[ \frac{-4\lambda}{\beta m} \right] t^{-2} \right\}^{\frac{1}{m}}, \quad (3.13)$$

где

$$\lambda = \frac{2n - 2m + 2mn}{3mn}, \quad a_0 = \sqrt[3]{\frac{c}{\alpha n} \left[ -\frac{6m\lambda^2 - 4(m+1)\lambda}{\alpha m} \right]^{\frac{1-n}{n}} \left[ \frac{-4\lambda}{\beta m} \right]^{\frac{1}{m}}}. \quad (3.14)$$

Следующие формулы являются полезными для дальнейших расчетов

$$u = ca^{-3} K_Y^{-1}, \quad \psi_j = c_j a^{-1.5} K_Y^{-0.5} e^{i\gamma^0 \int K_2 K_Y^{-1} dt}, \quad (3.15)$$

где  $c = |c_1|^2 + |c_2|^2 - |c_3|^2 - |c_4|^2$ ,  $c_j = const$ .

### 3.2.1 Космологические приложения некоторых моделей $f$ -эссенции

Наша модель для некоторых значений параметров  $(m, n)$  может быть ускоряющейся и замедляющейся. Но благодаря наблюдательным данным сегодня должно быть ускоряющееся расширение. Необходимым и достаточным условием для ускоренного расширения является  $\ddot{a} > 0$ . Из  $a = a_0 t^\lambda$  наблюдаем, что для фазы ускорения имеем  $\lambda(\lambda - 1) > 0$ . Это значит, что имеем  $\lambda < 0$ , или  $\lambda > 1$ . Допуская, что  $a_0 > 0$ , необходимо проверить следующую функцию двух переменных  $(m, n)$  для положительности

$$f(m, n) \equiv \lambda(\lambda - 1) = -\frac{2(n - m + mn)(-2n + 2m + mn)}{9m^2n^2}. \quad (3.16)$$

Отсюда, найдем только два значения  $\lambda$  которые дают ускоренное расширение. Параметр замедления  $q$  в терминах параметра Хаббла определяется как

$$q = -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right). \quad (3.17)$$

Поскольку  $H = \frac{\lambda}{t}$ , мы получим

$$q = -\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right). \quad (3.18)$$

Для расширяющейся Вселенной,  $q > -1$ . Таким образом, имеем  $\lambda > 0$ . Это условие совместно с (3.16) указывает на то, что единственное возможное значение параметра  $\lambda$ , при котором наблюдается ускоренное расширение, это  $\lambda > 1$ . В терминах набора параметров  $(m, n)$  в результате получаем

$$\frac{2n - 2m + 2mn}{3mn} > 1 \quad (3.19)$$

Действительно для (3.19), существует четыре различных вида решений, которые суммируем здесь:

**Случай 1:**  $m, n > 0$ . В этом случае, имеем следующие допустимые решения

$$m > \frac{2n}{n+2}. \quad (3.20)$$

Это условие, при котором модель описывает ускоренное расширение.

**Случай 2:**  $m, n < 0$ . В этом случае, имеем две возможности



$$m > \frac{2n}{n+2}, \quad n+2 > 0 \quad (3.21)$$

$$m < \frac{2n}{n+2}, \quad n+2 < 0. \quad (3.22)$$

Этим условиям соответствует модель с ускоренным расширением.

**Случай 3:**  $m > 0, n < 0$ . Как и случай 2, в этом случае, имеем две возможности

$$m < \frac{2n}{n+2}, \quad n+2 > 0 \quad (3.23)$$

$$m > \frac{2n}{n+2}, \quad n+2 < 0. \quad (3.24)$$

Оба этих условия указывают на то, что модель описывает ускоренное расширение.

**Случай 4:**  $m < 0, n > 0$ . Как и в случае 1, в этом случае, есть только одна возможность

$$m < \frac{2n}{n+2}. \quad (3.25)$$

Таким образом, наше решение для некоторых значений параметров  $m, n$  описывает ускоренное расширение.

Теперь обсуждаем параметры состояния  $r, s$ . Они были введены для характеристики модели пространственно-плоской Вселенной ( $k=0$ ) с холодной ТМ (пылью) и ТЭ [110]. Они были определены с помощью следующих выражений:

$$r \equiv \frac{\ddot{a}}{aH^3} = \frac{t(\lambda-1)}{\lambda^2}, \quad (3.26)$$

$$s \equiv \frac{r-1}{3(q-\frac{1}{2})} = -\frac{2t\lambda-t-\lambda^2}{3\lambda(3\lambda-2)}. \quad (3.27)$$

Как результат, мы получим соотношение между  $r$  и  $s$  в следующем виде

$$s = -\frac{2(r-1)\lambda}{3\lambda-2}. \quad (3.28)$$

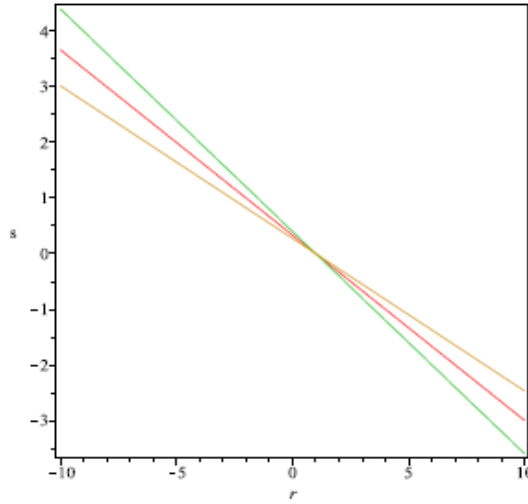


Рисунок 3.1 - График функции (3.28) для некоторых значений  $\lambda > 1$

На рисунке 3.1 показан график функции (3.28) для некоторых значений  $\lambda > 1$ . Космологическая константа имеет фиксированное уравнение параметра состояния ( $\omega = -1$ ) и фиксированную гравитационную константу Ньютона. Здесь 1,0 соответствует  $\Lambda$ CDM. Более того {1,1} представляет стандартную модель холодной ТМ, не содержащей излучения пока статическая Вселенная Эйнштейна соответствует  $\{-\infty, \infty\}$  [111]. Интересно заметить, что из (3.28) можем заключить, что наша модель  $f$ -эссенции соответствует  $\Lambda$ CDM, поскольку она имеет точку {1,0} для любого значения  $\lambda \neq \frac{2}{3}$ . Точка {1,1} которая представляет стандартную модель холодной ТМ, не содержащей излучения, присутствует в нашей модели  $f$ -эссенции. Также, наша модель  $f$ -эссенции не имеет аналога статической Вселенной Эйнштейна, соответствующей фиксированной точке  $\{-\infty, \infty\}$ .

### 3.3 Модели $f$ -эссенции типа Дирака-Борна-Инфельда

Вернемся к действию (3.1)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(Y, \psi, \bar{\psi})]. \quad (3.29)$$

Для метрики ФРУ соответствующая система уравнений принимает форму (3.7)-(3.11). Теперь мы хотим представить некоторые примеры фермионных моделей типа ДБИ (или  $f$ -ДБИ для краткости). Сперва, необходимо сделать обзор некоторых существующих ДБИ и тахионных моделей. Ранее, использование тахиона как скалярного поля с отрицательной и неканонической кинетической энергией было исследовано в некоторых моделях теории струн. Тахионы используются как для космологии, так и специально для лучшего понимания процесса распада  $D$ -бран [112-113]. Это приводит к изучению роли

тахииона в космологии как вращающегося тахиона, который является скалярным полем  $\phi$  и имеет параметры УС между  $(-1,0)$  [114]. Таким образом, тахион может быть подходящим кандидатом для инфляции при высоких энергетических режимах [115]. Также он может быть рассмотрен как кандидат для ТЭ также в некоторых расширенных версиях теории гравитации Эйнштейна [117].

### 3.3.1 Тахионные модели

Представим некоторые примеры тахионных моделей, которые следуют из  $f$ -эссенции. Рассмотрим примеры.

i) Сперва, рассмотрим следующую тахионную модель

$$K = -U\sqrt{1-\alpha Y}, \quad (3.30)$$

где

$$U = U(\bar{T}, T), \quad Y = 0.5i(\bar{T}\gamma^0\dot{T} - \dot{\bar{T}}\gamma^0 T). \quad (3.31)$$

Здесь  $T$  является фермионным тахионным полем. Тогда получим следующее УС

$$p = -\rho \mp \sqrt{\rho^2 - U^2}, \quad (3.32)$$

где

$$\rho = \frac{0.5U}{\sqrt{1-\alpha Y}} + 0.5U\sqrt{1-\alpha Y}. \quad (3.33)$$

ii) Пусть лагранжиан  $f$ -эссенции имеет вид

$$K = -U\sqrt{1-\alpha Y^2}, \quad (3.34)$$

где

$$U = U(\bar{T}, T), \quad Y = 0.5i(\bar{T}\gamma^0\dot{T} - \dot{\bar{T}}\gamma^0 T), \quad (3.35)$$

и  $T$  является фермионным тахионным полем. Тогда получим следующее УС

$$p = -\frac{U^2}{\rho}, \quad (3.36)$$

где

$$\rho = \frac{U}{\sqrt{1-\alpha Y^2}}. \quad (3.37)$$

Таким образом модель соответствует газу Чаплыгина [109].

### 3.3.2 Модели ТЭ

а) Теперь рассмотрим следующую модель типа ДБИ

$$K_2 = \varepsilon U \left( \sqrt{1 - \alpha \frac{Y}{U}} - 1 \right) + V, \quad (3.38)$$

где

$$U = U(\bar{\psi}, \psi), \quad Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi), \quad V = V(\bar{\psi}, \psi), \quad (3.39)$$

и  $\psi$  является классическим коммутирующим фермионным полем. Тогда получим следующее УС

$$p = -2\bar{\rho} \pm \sqrt{4\bar{\rho}^2 - 2\varepsilon^2 U^2} + V - \varepsilon U, \quad (3.40)$$

где  $\bar{\rho} = \rho - \varepsilon U + V$  и плотность энергии дается формулой

$$\rho = -0.5\varepsilon U \sqrt{1 - \alpha \frac{Y}{U}} - \frac{0.5\varepsilon U}{\sqrt{1 - \alpha \frac{Y}{U}}} + \varepsilon U - V. \quad (3.41)$$

б) Наш второй пример задается следующим лагранжианом

$$K = \varepsilon U \left( \sqrt{1 - \alpha \frac{Y^2}{U}} - 1 \right) + V, \quad (3.42)$$

где

$$U = U(\bar{\psi}, \psi), \quad Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi), \quad V = V(\bar{\psi}, \psi), \quad (3.43)$$

и  $\psi$  является классическим коммутирующим фермионным полем. Тогда получим следующее УС

$$p = -\frac{\varepsilon^2 U^2}{\rho - \varepsilon U + V} - \varepsilon U + V, \quad (3.44)$$

где плотность энергии дается формулой

$$\rho = -\frac{\varepsilon U}{\sqrt{1 - \alpha \frac{Y^2}{U}}} + \varepsilon U - V. \quad (3.45)$$

Так как  $V = \varepsilon U$  тогда эта модель станет

$$p = -\frac{\varepsilon^2 U^2}{\rho}, \quad (3.46)$$

что соответствует газу Чаплыгина [109]. Заметим здесь, что соответствие между моделями типа ДБИ и газа Чаплыгина было обсуждено ранее в [116].

### 3.4 Интегрируемые модели $f$ -эссенции

Одними из интересных подклассов моделей  $f$ -эссенции являются интегрируемые модели [22; 58-59; 82]. Пусть лагранжиан  $f$ -эссенции имеет форму

$$K_2 = F(Y) - V(\bar{\psi}, \psi). \quad (3.47)$$

Как пример, здесь рассмотрим следующую определенную модель  $f$ -эссенции, когда  $F(Y)$  подчиняется уравнению

$$F_{YY} = 2F^3 + YF + \alpha, \quad (3.48)$$

где  $\alpha$  является некоторой константой. Это не что иное как  $P_{II}$ -уравнение. Оно интегрируемо. Теперь полные уравнения  $f$ -эссенции принимают вид

$$3H^2 - \rho_f = 0, \quad (3.49)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p_f = 0, \quad (3.50)$$

$$F_Y \dot{\psi} + 0.5(3HF_Y + \dot{F}_Y)\psi + i\gamma^0 V_{\bar{\psi}} = 0, \quad (3.51)$$

$$F_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HF_Y + \dot{F}_Y)\bar{\psi} - iV_{\psi} \gamma^0 = 0, \quad (3.52)$$

$$F_{YY} - 2F^3 - YF - \alpha = 0, \quad (3.53)$$

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + p_f) = 0. \quad (3.54)$$

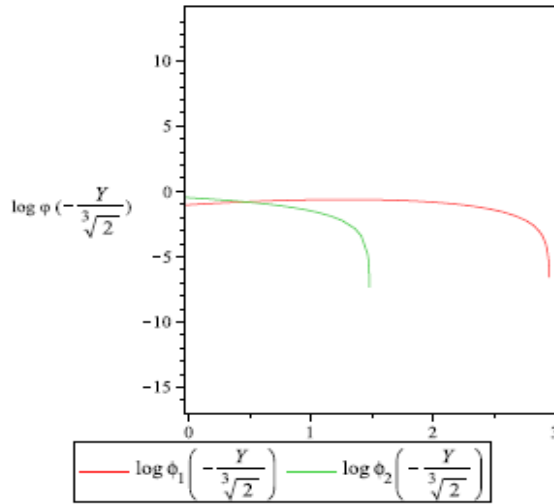


Рис 3.2 - График ненормированного  $\log(\phi(-2^{-1/3}Y))$

Для построения решений этой системы начнем с уравнения (3.53). Уравнение (3.53) имеет следующие частные решения [22; 50-52; 58-59; 70-71].

$$F \equiv F(Y;1.5) = \psi - (2\psi^2 + Y)^{-1}, \quad (3.55)$$

$$F \equiv F(Y;1) = -\frac{1}{Y}, \quad (3.56)$$

$$F \equiv F(Y;2) = \frac{1}{Y} - \frac{3Y^2}{Y^3 + 4}, \quad (3.57)$$

$$F \equiv F(Y;3) = \frac{3Y^2}{Y^3 + 4} - \frac{6Y^2(Y^3 + 10)}{Y^6 + 20Y^3 - 80}, \quad (3.58)$$

$$F \equiv F(Y;4) = -\frac{1}{Y} + \frac{6Y^2(Y^3 + 10)}{Y^6 + 20Y^3 - 80} - \frac{9Y^5(Y^3 + 40)}{Y^9 + 60Y^6 + 11200}, \quad (3.59)$$

$$F \equiv F(Y;0.5\varepsilon) = -\varepsilon\psi, \quad (3.60)$$

и т.д. Здесь

$$\psi = (\ln \phi)_Y, \quad \phi(Y) = C_1 Ai(-2^{-1/3}Y) + C_2 Bi(-2^{-1/3}Y), \quad (3.61)$$

где  $C_i = const$  и  $Ai(x), Bi(x)$  являются функциями Эйри. Рисунок 3.2 показывает график ненормированного  $\log(\phi(-2^{-1/3}Y))$  для  $C_1=1, C_2=0$  (заменили это через  $\log(\phi_1(-2^{-1/3}Y))$ ) и для  $C_1=0, C_2=1$  (заменили это через  $\log(\phi_2(-2^{-1/3}Y))$ ).

### Выводы по 3 разделу

Ускоряющееся расширение Вселенной является одним из наибольших интегрирующих вызовов в современной физике. Если сохраним теорию Эйнштейна как геометрическую часть модели и подумаем о материальных полях как источниках такого ускорения, то имеем много выборов для этого. Одно из них это скалярное поле, с канонической или неканонической формой. Каноническое скалярное поле не может описать ускоренное расширение корректно и это полезно только в раздуваемом сценарии. Естественное расширение канонического скалярного поля является неканоническим, в котором работаем с общими формами кинетической энергии. Существуют различные виды таких моделей известных как  $k$ -эссенция. В настоящем разделе мы рассмотрели новую модель,  $f$ -эссенцию, в которой классические Дираковские фермионы играют роль источника ТЭ. Исследовали определенные формы лагранжианов таких моделей. В случае отсутствия взаимодействия между скалярным и фермионным полями (без взаимодействия типа Юкавы) нашли некоторые точные решения. Для такого вида решений показали, что модель допускает ускоряющееся расширение и масштабный параметр ведет себя согласно степенному закону. Анализируя параметры состояния  $r, s$ , показали, что наша модель  $f$ -эссенции соответствует  $\Lambda$ CDM, но не является стандартной моделью холодной ТМ, не содержащей излучения. Также, наша точная модель  $f$ -эссенции не может иметь какой-либо статической Вселенной Эйнштейна. Далее рассмотрим несколько фермионных моделей типа ДБИ как некоторое частное упрощение  $f$ -эссенции и найдены им эквивалентные модели газа Чаплыгина. Показали, что можем реконструировать модель типа ДБИ, тахионную модель и модель газа Чаплыгина в такой модели  $f$ -эссенции с некоторыми специфичными формами лагранжиана.

## 4 КОСМОЛОГИЯ $g$ -ЭССЕНЦИИ СО СКАЛЯРНО-ФЕРМИОННЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

В данном разделе, мы рассматриваем две частные модели  $g$ -эссенции со взаимодействием типа Юкавы между скалярным полем  $\phi$  и классическим Дираковским полем  $\psi$ . Для однородной, изотропной и плоской Вселенной ФРУ, заполненной  $g$ -эссенцией, найдены некоторые точные решения этих моделей. Реконструированы соответствующие скалярный и фермионный потенциалы.

Недавние результаты экспериментальных исследований типа сверхновых  $Ia$  и космического микроволнового фонового излучения и т.д. [42-43] показали, что наша Вселенная в настоящее время является пространственно-плоской и ускоренно-расширяется. Ускоренное расширение Вселенной объясняется доминированием компоненты с отрицательным давлением, так называемой ТЭ. До настоящего времени природа ТЭ остается неизвестной. В литературе было предложено много кандидатов на ТЭ. Среди которых квинтэссенция ( $\omega > -1$ ), фантом ( $\omega < -1$ ),  $k$ -эссенция ( $\omega > -1$  или  $\omega < -1$ ), квинтом ( $\omega$  пересекает  $-1$ ) и т.д. Заметим, что ускоренное расширение Вселенной может также быть описана с помощью модифицированной теорий гравитации как  $F(R)$ ,  $F(G)$ ,  $F(T)$ ,  $F(R,T)$  и т.д. [32]. Как известно, простейшей моделью ТЭ является космологическая константа с плотностью энергии порядка энергии вакуума  $\rho \approx (10^{-3} \text{ эВ})^4$  неизменяющейся по времени. Однако, эта модель космологической константы имеет проблему точной настройки и совпадения.

Одной из наиболее интересных моделей ТЭ является  $k$ -эссенция [48; 84]. Недавно, была предложена другая модель ТЭ – так называемая  $f$ -эссенция [49], которая является фермионным аналогом  $k$ -эссенции. Также, была предложена  $g$ -эссенция, которая является некоторой гибридной конструкцией  $k$ -эссенции и  $f$ -эссенции [27; 49-51; 174].

Насколько нам известно, в литературе есть относительно малое количество работ по моделям ТЭ со скалярными и фермионными полями и с взаимодействиями типа Юкавы [137-141]. Ниже мы изучаем космологию  $g$ -эссенции с взаимодействием типа Юкавы.

### 4.1 Обобщенная модель с взаимодействием типа Юкавы

Рассмотрим действие  $g$ -эссенции

$$S = \int d^4x [R + 2K(X, Y, \phi, \psi, \bar{\psi})]. \quad (4.1)$$

Система уравнений движения для действия (4.1) имеет вид:

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (4.2)$$



$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (4.3)$$

$$K_X \ddot{\phi} + (\dot{K}_X + 3HK_X) \dot{\phi} - K_\phi = 0, \quad (4.4)$$

$$K_Y \dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y) \psi - i\gamma^0 K_\psi = 0, \quad (4.5)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y) \bar{\psi} + iK_\psi \gamma^0 = 0, \quad (4.6)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (4.7)$$

Для простоты, в данном пункте, мы рассмотрим лагранжиан следующего вида

$$K = \varepsilon X + \sigma Y - V_1(\phi) - V_2(u) - \eta U_1(\phi) U_2(u), \quad (4.8)$$

где  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – являются некоторыми постоянными. Заметим, что  $\varepsilon = 1$  ( $\varepsilon = -1$ ) соответствует обычному (фантомному) случаю. Система уравнений движения (4.2)-(4.7) для лагранжиана (4.1) примет вид

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (4.9)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon \ddot{\phi} + 3\varepsilon H \dot{\phi} + \eta U_2 U_{1\phi} + V_{1\phi} = 0, \quad (4.11)$$

$$\sigma \dot{\psi} + \frac{3}{2} \sigma H \psi + iV_2' \gamma^0 \psi + i\eta U_1 U_2' \gamma^0 \psi = 0, \quad (4.12)$$

$$\sigma \dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2} \sigma H \bar{\psi} - iV_2' \bar{\psi} \gamma^0 - i\eta U_1 U_2' \bar{\psi} \gamma^0 = 0, \quad (4.13)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.14)$$

где

$$\rho = 0.5\varepsilon \dot{\phi}^2 + V_1 + \eta U_1 U_2 + V_2, \quad (4.15)$$

$$p = 0.5\varepsilon \dot{\phi}^2 - V_1 - V_2 + V_2' u. \quad (4.16)$$

Построим точные аналитические решения системы (4.9)-(4.14).

Для этого рассмотрим решение типа де-Ситтера. Тогда имеем

$$a = a_0 e^{bt}, \quad (4.17)$$

$$\phi = \phi_0 e^{\kappa t}, \quad (4.18)$$

$$\psi_l = \frac{c_l}{a_0^{1.5} e^{1.5\beta t}} e^{-iD}, \quad (l=1,2), \quad (4.19)$$

$$\psi_k = \frac{c_k}{a_0^{1.5} e^{1.5\beta t}} e^{iD}, \quad (k=3,4), \quad (4.20)$$

где  $c_j$  подчиняются следующему условию:  $c = |c_1|^2 + |c_2|^2 - |c_3|^2 - |c_4|^2$  и

$$D = \frac{i}{\sigma} \left( \frac{\varepsilon a_0^3 \phi_0^2 \kappa^2}{c(2\kappa+3\beta)} e^{(2\kappa+3\beta)t} + \frac{\eta a_0^3 U_{10} U_{20}}{c(l+n+3\beta)} \left( 1 + \frac{n}{3\beta} \right) e^{(l+n+3\beta)t} + D_0 \right). \quad (4.21)$$

Выражения для потенциалов примут вид

$$V_1(\phi) = \frac{\varepsilon \phi_0^2 \kappa (\kappa + 3\beta) (n + 3\beta)}{2(4\kappa - n + 3\beta)} \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 + V_{10}, \quad (4.22)$$

$$V_2(u) = \frac{3\varepsilon \phi_0^2 \kappa \beta (2\kappa - n - 3\beta)}{2(4\kappa - n + 3\beta)} \left( \frac{u a_0^3}{c} \right)^{\frac{2\kappa}{3\beta}} - V_{10} + 3\beta^2, \quad (4.23)$$

$$U_1(\phi) = -\frac{2\varepsilon \phi_0^2 \kappa^2 (\kappa + 3\beta)}{\eta U_{20} (4\kappa - n + 3\beta)} \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{\frac{2\kappa-n}{\kappa}}, \quad (4.24)$$

$$U_2(u) = U_{20} \left( \frac{u a_0^3}{c} \right)^{\frac{n}{3\lambda}}, \quad (4.25)$$

где  $V_{10}, n = const$ . В этом случае, уравнения параметров состояния и замедления имеют вид  $\omega = q = -1$ , то есть имеем пространство-время де-Ситтера.

## 4.2 МГЧ и космология решаемых моделей $f$ -эссенции

Модель МГЧ принадлежит к классу объединенных моделей ТЭ и ТМ. В этом параграфе смоделировали МГЧ в рамках космологии  $f$ -эссенции. Выводим уравнения, связывающего МГЧ и  $f$ -эссенцию, и решаем его для получения в точном виде выражения для давления и плотность энергии МГЧ. В качестве частных примеров нашли решения для положительного и отрицательного давлений при определенном выборе свободных параметров. Также вычислили параметр состояния, который описывает пересечение фантома.

Некоторые космологические наблюдения доказывают, что в настоящее время Вселенная претерпевает ускоренное расширение [42-43]. Из результатов работы спутника WMAP, который собрал данные о космическом микроволновом фоновом излучении, можно предположить, что за космическое ускорение отвечает так называемая ТЭ [170]. Такой новый элемент Вселенной, ответственный за ускоренное расширение должен, в соответствии с УФ, иметь давление, меньшее, чем  $-1/3$  плотности энергии. Отметим, что понятие космической среды, обладающей отрицательным давлением, не является новым в космологии. Самым первым предположением о ТЭ является космологическая константа, обозначаемая как  $\Lambda$ . Первоначально Эйнштейном было предложено построить теоретическую модель Вселенной так, что сферическая конфигурация материи во Вселенной сбалансирована с отрицательным давлением космологической константы. Тем самым создавая статическую Вселенную, в соответствии с понятиями, введенными многими учеными того времени. Происхождение космического ускорения, обнаруженного в недавнее время, нуждается во введении  $\Lambda$ , но это сталкивается с серьезными проблемами точной настройки (значение  $\Lambda$  по величине на несколько порядков больше, чем оцененное из эмпирических результатов) и проблема космического совпадения (плотность энергии материи и компонента ТЭ в настоящее время приблизительно такие же). Тогда теоретики начали изучение других кандидатов на роль ТЭ. Существует много теоретических моделей ТЭ, опубликованных в литературе, включая квинтэссенцию, фантомную энергию, газ Чаплыгина, тахионную и дилатонную ТЭ и т.д. [76]. Модели квинтэссенции и фантомной энергии базируются на пространственно-однородных и время-зависимых скалярных полях, в соответствии с космологическим принципом. Лагранжианы квинтэссенции (фантомной энергии) имеют положительную (отрицательную) энергию. Квинтэссенция все еще сталкивается с проблемой точной настройки параметров ее потенциала, в то время как фантомная энергия дает возможности испарения Большого Разрыва и черной дыры [156].

Квинтэссенция как модель ТЭ основывается на подходящем выборе потенциальной функции или потенциальной энергии скалярных полей. Также возможно, что космическое ускорение может появиться из-за модификации кинетической энергии скалярных полей. Такие модификации выражаются неканонически. Кинетически управляемое космическое ускорение было первоначально предложено как модель для инфляции, а именно  $k$ -инфляции [84], и потом как модель для ТЭ, а именно  $k$ -эссенция [85-87; 144-148; 150-151; 155-169; 173]. Эта модель не зависит от точной настройки и антропных аргументов.  $k$ -эссенция была предложена как возможное средство для объяснения проблемы совпадения во Вселенной, начинающей ускоряться только в настоящую эпоху [164].  $k$ -эссенция основана на идее решения динамического аттрактора, которое приводит к тому, что она действует как космологическая константа только при возникновении доминирования материи. Следовательно,  $k$ -эссенция в настоящее время опережает плотность материи и индуцирует космическое ускорение. В некоторых моделях  $k$ -эссенции, космическое ускорение продолжается все время, в то время как в

других она продолжается конечное время [86].

В последние годы, модель  $k$ -эссенции получила большое внимание. Все еще необходимо систематическое исследование возможного космологического поведения  $k$ -эссенции. Совсем недавно, была предложена модель под названием  $g$ -эссенция [174], которая является более обобщенной версией  $k$ -эссенции. Фактически,  $g$ -эссенция содержит, как частные случаи, две важные модели:  $k$ -эссенцию и  $f$ -эссенцию. Заметим, что  $f$ -эссенция является фермионным эквивалентом  $k$ -эссенции.

В литературе существует относительно мало работ по моделям ТЭ с фермионными полями. Однако, в недавние годы было сделано несколько приближений для объяснения ускоренного расширения, используя фермионные поля как гравитационные источники энергии [49; 88-104; 143-174]. В частности, было показано, что фермионное поле играет очень важную роль в:

- (1) изотропизации изначально анизотропного пространства-времени;
- (2) формировании сингулярности свободных космологических решений;
- (3) объяснении поздне-временного ускорения.

Очень привлекательным предположением для описания темного сектора являются так называемые объединенные модели. Прототипом такой модели является газ Чаплыгина. В объединенных моделях, ТЭ и ТМ описываются с помощью единой жидкости, которая ведет себя как обычная материя в прошлом, и как космологическая константа в будущем. В этом смысле, она интерполирует различные периоды эволюции Вселенной, включая настоящий этап ускоренного расширения. Модель газа Чаплыгина приводит к очень хорошим результатам, когда она противопоставляется наблюдательным данным типа сверхновой  $Ia$ . Что касается данных энергетического спектра материи, статистический анализ приводит к результатам, конкурирующим с моделью  $\Lambda$ CDM, но объединенный (называемый квартэссенцией) сценарий должен быть изучен в начале. Это значит, что только компонента без давления является обычной барионной компонентой, в противном случае существует конфликт между ограничениями, полученными из энергетического спектра материи и анализа суперновой. Заметим, что в литературе было предложено много вариаций модели газа Чаплыгина. Одна из них это так называемая модель МГЧ. Важно то, что модель МГЧ принадлежит к классу объединенных моделей ТЭ и ТМ. В этом контексте, важно изучить отношение между МГЧ и другими унифицированными моделями ТЭ и ТМ. Например, в работе [36] было установлено соотношение между МГЧ и  $k$ -эссенцией. В данном параграфе смоделировали МГЧ в рамках космологии  $f$ -эссенции. Уравнение, связывающего МГЧ и  $f$ -эссенцию. Затем решили его для нахождения в точном виде давления и плотности энергии МГЧ. В качестве частного примера, нашли решения для положительного и отрицательного давления при соответствующем выборе свободных параметров.

#### 4.2.1 Основные элементы модели $f$ -эссенции

Рассмотрим некоторые основные элементы модели  $f$ -эссенции. Ее

действие имеет вид [49, 171]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(Y, \psi, \bar{\psi})], \quad (4.26)$$

где  $\psi$  и  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  обозначают фермионное поле и его сопряжение, соответственно, крест означает комплексное сопряжение и  $R$  это скаляр Риччи. Фермионные поля считаются здесь как классически коммутирующие поля [88-104; 143]. Здесь мы понимаем под классическим фермионным полем это набор четырех комплексных функций пространства-времени, которые преобразуются согласно спинорному представлению Лоренцевской группы. Существование таких полей является ключевым в этом пункте, поскольку, несмотря на факт, что фермионы описываются квантованными фермионными полями, которые не имеют классического предела, допускаем, что такие классические поля существуют и используем их как материальные поля, связанные с гравитацией. Возможное подтверждение существования классических фермионных полей дается в приложении [104]. Так, для более всестороннего и физически подробного обсуждения свойств таких классических фермионных полей, обратимся к этой фундаментальной работе [104]. Ниже,  $K$  – является плотностью лагранжиана фермионного поля, канонический кинетический член которого имеет вид

$$Y = \frac{1}{2} i [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi]. \quad (4.27)$$

Здесь  $\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$  – являются обобщенные матрицы Дирака-Паули, удовлетворяющие алгебре Клиффорда

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (4.28)$$

где скобки обозначают анти-коммутиационное соотношение.  $e_a^\mu$  обозначает тетраду, тогда как ковариантная производная дается формулой

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Omega_\mu \psi, \quad D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu. \quad (4.29)$$

Фермионная связь  $\Omega_\mu$  определяется формулой

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\rho\sigma} [\Gamma_{\mu\delta}^\rho - e_b^\rho \partial_\mu e_\delta^b] \Gamma^\sigma \Gamma^\delta, \quad (4.30)$$

где  $\Gamma_{\mu\delta}^\rho$  обозначают символы Кристоффеля.

Рассмотрим пространство-время ФРУ (1.74). Для этой метрики, тетрада выбирается как

$$(e_a^\mu) = \text{diag}(1, 1/a, 1/a, 1/a), \quad (e_\mu^a) = \text{diag}(1, a, a, a). \quad (4.31)$$

Матрицы Дирака искривленного пространства-времени  $\Gamma^\mu$  дается формулами

$$\Gamma^0 = \gamma^0, \Gamma^j = a^{-1}\gamma^j, \Gamma^5 = -i\sqrt{-g}\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = \gamma^5, \quad (4.32)$$

$$\Gamma_0 = \gamma^0, \quad \Gamma_j = a\gamma^j, \quad (j=1,2,3). \quad (4.33)$$

Следовательно, получим

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_j = 0.5\dot{a}\gamma^j\gamma^0 \quad (4.34)$$

и

$$Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi).$$

Заметим, что гамма-матрица записывается в форме Дирака, то есть

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

где  $I = \text{diag}(1,1)$  и  $\sigma^k$  – это матрицы Паули, имеющие следующий вид

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

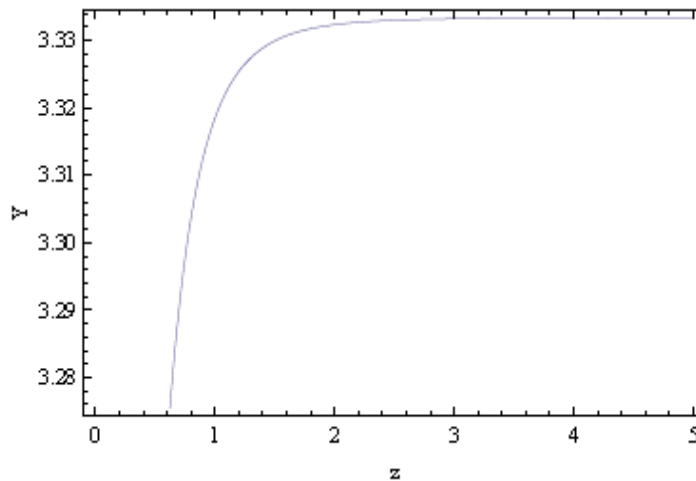


Рисунок 4.1 - Эволюция  $Y$  в зависимости от  $z$  из (4.49). Другие параметры фиксированы при  $C=0.5$ ,  $B=0.4$ ,  $W=0.3$  и  $\alpha=0.5$

Уравнения движения для модели  $f$ -эссенции для метрики ФРУ примут вид

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (4.37)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (4.38)$$

$$K_Y \dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\psi - i\gamma^0 K_{\bar{\psi}} = 0, \quad (4.39)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\bar{\psi} + iK_{\psi}\gamma^0 = 0, \quad (4.40)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.41)$$

где

$$\rho = YK_Y - K, \quad p = K, \quad (4.42)$$

это плотность энергии и давление фермионного поля. Если  $K = Y - V$ , тогда из системы (4.37)-(4.41) получим соответствующие уравнения модели Эйнштейна-Дирака. Заметим, что  $f$ -эссенция - это частный случай  $g$ -эссенции для которой плотность энергии и давление даются формулой

$$\rho = 2XK_X + YK_Y - K, \quad p = K, \quad (4.43)$$

где  $X = 0.5\dot{\phi}^2$  - является канонический кинетический член для скалярного поля  $\phi$ .

#### 4.2.2 Точно решаемые космологические модели $f$ -эссенции

В этом пункте, рассмотрим некоторые точно решаемые частные модели  $f$ -эссенции, связанные с МГЧ по формуле  $p = A\rho - \frac{B}{\rho^\alpha}$  [50].

**Случай:**  $A = 0$

Пренебрежение баротропным членом в МГЧ дает

$$p = -\frac{B}{\rho^\alpha}. \quad (4.44)$$

Это называется обобщенным газом Чаплыгина (ОГЧ) [109]. Недавно было предложено использование пертурбативного анализа и энергетического спектра наблюдательных данных так, что модель МГЧ не может быть хорошим кандидатом для космической среды, если только  $A = 0$ , то есть обычная модель ОГЧ оказывается интересной [154]. Как хорошо известно, соответствующая плотность энергии и давления даются формулами

$$\rho = [B + Ca^{-3(1+\alpha)}]^{-\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (4.45)$$

$$p = -B[B + Ca^{-3(1+\alpha)}]^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad (4.46)$$

где  $C$  – является постоянной интегрирования. Из [50], (4.45) и (4.46) получаем точные выражения для плотности энергии и давления

$$\rho = \left[ \frac{B}{1 - (WY)^\alpha} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (4.47)$$

$$p = -B^{\frac{1}{1+\alpha}} [1 - (WY)^\alpha]^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad (4.48)$$

где  $W = const$ . Решение для  $Y$  определяется из (4.45) и (4.47):

$$Y = W^{-1} C^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} [C + Ba^{3(1+\alpha)}]^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (4.49)$$

Поведение выражения (4.49) показано на рисунке 4.1, где видим, что кинетическая энергия  $f$ -эссенции возрастает и потом остается постоянной при высших красных смещениях. Заметим, что это заключение зависит ключевым образом от выбранного значения свободных параметров.

### Общий случай

В этом пункте, рассмотрим общий случай, когда  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ . В этом случае мы должны решить следующую систему

$$\rho = YK_Y - K, \quad (4.50)$$

$$K = A\rho - \frac{B}{\rho^\alpha}, \quad (4.51)$$

или

$$\rho = Yp_Y - p, \quad (4.52)$$

$$p = A\rho - \frac{B}{\rho^\alpha}. \quad (4.53)$$

Решая (4.50) для  $K$ , придем к

$$p \equiv K = EY + Y \int \frac{\rho}{Y^2} dY, \quad (4.54)$$

где  $E$  – является постоянной интегрирования. Заметим, что если  $\rho = V(\bar{\psi}, \psi)$  тогда из (4.54), следует, что  $K = EY - V(\bar{\psi}, \psi)$ , то есть это чисто Дираковский случай. Уравнения (4.53) и (4.54) дают выражение



$$EY + Y \int \frac{\rho}{Y^2} dY = A\rho - \frac{B}{\rho^\alpha}, \quad (4.55)$$

которое имеет следующее решение:

$$(1+A)\rho^{1+\alpha} - (WY)^{\frac{n(1+\alpha)}{\alpha}} \rho^{n(1+\alpha)} - B = 0, \quad (4.56)$$

где  $W = const$  и

$$n = \frac{\alpha(1+A)}{A + \alpha(1+A)}. \quad (4.57)$$

Из (4.57) следует, что  $A$  и  $\alpha$  связаны соотношением

$$A = -\frac{(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha + n} \quad \text{или} \quad \alpha = -\frac{nA}{(n-1)(1+A)}. \quad (4.58)$$

Поиск аналитических решений (4.56) является сложной работой. Найдем некоторые частные решения для некоторых значений  $n$ .

Рассмотрим случай, когда  $A = -1$ . Тогда  $n = 0$  и (4.50)-(4.51) принимают вид

$$\rho = YK_Y - K, \quad (4.59)$$

$$K = -\rho - B\rho^{-\alpha}. \quad (4.60)$$

Следовательно, получим

$$\alpha B \ln \rho - (1+\alpha)^{-1} \rho^{1+\alpha} = \ln(C_1 Y)^{-B}. \quad (4.61)$$

Рассмотрим некоторые частные решения этого уравнения. Если  $\alpha = 0$ , тогда имеем

$$\rho = \ln(C_1 Y)^B, \quad (4.62)$$

и для давления

$$p = \ln(C_1 Y)^{-B} - B. \quad (4.63)$$

Соответствующее параметр уравнение состояния дается формулой

$$\omega = -1 - [\ln(C_1 Y)]^{-1}. \quad (4.64)$$

В качестве второго примера рассмотрим случай  $\alpha = -1$ . Тогда для

плотности энергии и давления получим

$$\rho = C_2 Y^{\frac{B}{1+B}} \quad (C_2 = const), \quad (4.65)$$

и

$$p = -(1+B)C_2 Y^{\frac{B}{1+B}}. \quad (4.66)$$

Соответствующее параметр уравнение состояния дается формулой

$$\omega = -1 - B. \quad (4.67)$$

### **Выводы по 4 разделу**

В этом разделе нами рассмотрены частный случай  $g$ -эссенции с взаимодействиями типа Юкавы между скалярным и фермионным полями. Построены некоторые примеры точных аналитических решений этой модели. Получены соответствующие скалярный и фермионный потенциалы. Эти результаты показывают, что  $g$ -эссенция с взаимодействиями типа Юкавы может описать ускоренное расширение Вселенной.

Смоделировали МГЧ в космологии  $f$ -эссенции. Использование МГЧ оказывается полезным, как инструмент для объяснения ТЭ и ТМ в единой точке зрения, в то время как космология  $f$ -эссенция очень удобна для описания космического ускорения позднего времени [176-186]. Таким образом, соответствие МГЧ с  $f$ -эссенцией оказывается полезным для изучения того, как эти две модели связаны друг с другом. Изучили эту связь с помощью дифференциального уравнения (4.56) связывающего МГЧ и  $f$ -эссенцию. Решения этого уравнения дает точные выражения для давления и плотности энергии МГЧ. Отметим, что  $f$ -эссенция построенного с МГЧ имеет один дополнительный параметр, а именно  $W$  наряду с  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ . Как специальный случай, находим решения отрицательного (4.48), (4.64) давления при подходящих выборах свободных параметров. Решение для отрицательного давления является важным для описания космического расширения с ускорением. Мы также, предварительно, изучили модель с УС для баротропного и ОГЧ [186-204].

В настоящем разделе мы изучили только соответствие МГЧ с  $f$ -эссенцией. Однако будет более интересным изучить динамические свойства этой модели. Например, интересно проверить является ли такая модель полезной для модели инфляции при ранней космической эпохи и при космическом ускорении в настоящее время. Следующим важным моментом является сравнения теоретических результатов этой модели с наблюдательными данными и ограничение ее свободных параметров, в частности  $W$ . Также наблюдательные ограничения на параметр состояния  $\omega$  будут указывать на то, соответствует ли данная версия модели космологической константе, квинтэссенций или фантомной энергии. Закончим

настоящий раздел с надеждой на то, что преимущества и недостатки  $f$ -эссенции будут уточнены в будущих исследованиях.

Здесь рассматривается один из старых методов нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, обсуждаются модификации метода. Применение метода иллюстрируется на примере нахождения точных решений уравнения Фишера и нелинейного ОДУ седьмого порядка. Показано, что этот метод является одним из наиболее эффективных подходов для нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Обсуждаются преимущества и недостатки метода [175].

Окончательно, отметим, что этот раздел является логическим продолжением работы [36], где изучено отношение между  $k$ -эссенцией и МГЧ. Действие  $k$ -эссенции имеет вид [205-214]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(X, \phi)], \quad (4.92)$$

где кинетический член  $X$  для скалярного поля  $\phi$  (для метрики ФРУ) имеет вид

$$X = 0.5\dot{\phi}^2. \quad (4.93)$$

Соответствующие уравнения для метрики ФРУ имеют вид

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (4.94)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (4.95)$$

$$K_x \ddot{\phi} + (\dot{K}_x + 3HK_x)\dot{\phi} - K_\phi = 0, \quad (4.96)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.97)$$

где плотность энергии и давление скалярного поля даются выражениями

$$\rho = 2XK_x - K, \quad p = K. \quad (4.98)$$

В этом случае, общая система уравнений для  $k$ -эссенции и МГЧ имеет вид

$$\rho = 2Xp_x - p, \quad (4.99)$$

$$p = A\rho - \frac{B}{\rho^\alpha}. \quad (4.100)$$

Совместимость этих условия для уравнений (4.99)-(4.100) дается в работе [36]

$$(1+A)\rho^{1+\alpha} - (WX)^{\frac{n(1+\alpha)}{2\alpha}} \rho^{n(1+\alpha)} - B = 0, \quad (4.101)$$

где  $W = W(\phi)$  и

$$n = \frac{\alpha(1+A)}{A+\alpha(1+A)}. \quad (4.102)$$

Также в работе [36] найдены различные типы решаемых космологий  $k$ -эссенции совместимые с моделью МГЧ для различных значений  $n$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация содержит теоретические результаты по ряду точных космологических решений. По данным диссертационной работы можно сделать следующие выводы.

– Построен новый класс интегрируемых моделей Фридмана индуцированные уравнением Пенлеве.

– Рассмотрены некоторые космологические модели ФРУ с параметрическим УС, где  $e$ -фолдинг  $N$  играет роль параметра состояния. Для построения космологической модели в явном виде потребовали, чтобы  $N$  являлось решением некоторых линейных и нелинейных ОДУ второго порядка. Если такие ОДУ интегрируемы, тогда соответствующие модели ФРУ также интегрируемы.

– Изучено уравнение Эйнштейна в метрике ФРУ. Установлена связь между уравнениями Эйнштейна, Рамануджана и Шеши-III. Используя этот результат, который использует некоторые известные решения уравнения Рамануджана и уравнения Шеши-III, построены некоторые точные решения уравнения Эйнштейна. Таким образом, впервые продемонстрирована связь между известными уравнениями математической физики и уравнениями гравитационного поля.

– Рассмотрена космологическая модель с фермионным полем и с неканоническим кинетическим членом ( $f$ -эссенция). Наша точная модель  $f$ -эссенции не может иметь какой-либо статической Вселенной Эйнштейна. Рассмотрели несколько фермионных моделей типа ДБИ как некоторое частное упрощение  $f$ -эссенции и найдены им эквивалентные модели газа Чаплыгина. Показали, что можем реконструировать модель типа ДБИ, тахионную модель и модель газа Чаплыгина в такой модели  $f$ -эссенции с некоторыми специфичными формами лагранжиана.

– Рассматриваем две частные модели  $g$ -эссенции со взаимодействием типа Юкавы между скалярным полем  $\phi$  и классическим Дираковским полем  $\psi$ . Для однородной, изотропной и плоской Вселенной ФРУ, заполненной  $g$ -эссенцией найдены некоторые точные решения этих моделей. Реконструированы соответствующие скалярный и фермионный потенциалы.

– Смоделировали МГЧ в космологии  $f$ -эссенции. Использование МГЧ оказывается полезным как инструмент для объяснения ТЭ и ТМ в объединенном смысле, в то время как космология  $f$ -эссенции существенно удобна для описания космического ускорения только в настоящее время. Таким образом, соответствие МГЧ с  $f$ -эссенцией оказывается полезным для изучения того, как эти две модели связаны друг с другом;

– Найдены различные типы решаемых космологий  $k$ -эссенции совместимые с моделью МГЧ.

Таким образом, поставленные задачи в диссертации полностью решены и выполнен весь объем исследования.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Guth A.H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Physical Review D*. - 1981. - Vol. 23. - P. 347–356.
- 2 Starobinsky A.A. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations // *Physics Letters B*. - 1982. - Vol. 117. - P. 175–178.
- 3 Linde A. D. Chaotic inflation // *Physics Letters B*. - 1983. - Vol. 129. - P. 177–181.
- 4 Bardeen J.M., Steinhardt P.J., Turner M.S. Spontaneous Creation Of Almost Scale-Free Density Perturbations In An Inflationary Universe // *Physical Review D*. - 1983. - Vol. 28. - P. 679–693.
- 5 Sahni V. and Starobinsky A.A. The Case for a positive cosmological Lambda term // *International Journal of Modern Physics D*. - 2000. - Vol. 9 // DOI:10.1142/S0218271800000542.
- 6 Padmanabhan T. Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum // *Physics Reports*. - 2003. - Vol. 380. - P. 235-320.
- 7 Sahni V. and Starobinsky A. Reconstructing Dark Energy // *International Journal of Modern Physics D*. - 2006. - Vol. 15 // DOI:10.1142/S0218271806009704.
- 8 Padmanabhan T. Dark energy: mystery of the millennium // *American Institute of Physics Conference Proceedings*. - 2006. - Vol. 861 // DOI:<http://dx.doi.org/10.1063/1.2399577>.
- 9 Peebles P.J.E., Ratra B. The cosmological constant and dark energy // *Reviews of Modern Physics*. - 2003. - Vol. 75. - P. 559–606.
- 10 Perivolaropoulos L. Accelerating universe: observational status and theoretical implications // *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy. Lecture Notes in Physics*. - 2007. - Vol. 720. - P. 257-290.
- 11 Straumann N. Dark energy // *Approaches to Fundamental Physics. Lecture Notes in Physics*. - 2007. - Vol. 721. - P. 327-397.
- 12 Nojiri S., Odintsov S.D. Unified cosmic history in modified gravity: From  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models // *Physics Reports*. - 2011. - Vol. 505. - P. 59-144.
- 13 Nojiri S., Odintsov S.D. Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. - 2007. - Vol. 04. - P. 115-146.
- 14 Bamba K., Nojiri S. and Odintsov S.D. The future of the universe in modified gravitational theories: approaching a finite-time future singularity // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. - 2008. - Vol. 2008 // DOI:10.1088/1475-7516/2008/10/045.
- 15 Cognola G., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D. and Zerbini S. Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem // *Physical Review D*. - 2006. - Vol. 73 // DOI:10.1103/PhysRevD.73.084007.
- 16 Padmanabhan T. Advanced topics in cosmology: a pedagogical introduction // *American Institute of Physics Conference Proceedings*. - 2006. - Vol. 843. - P. 111-166.

- 17 Myrzakulov R.  $F(T)$  gravity and  $k$ -essence // General Relativity and Gravitation. - 2012. - Vol. 44. - P. 3059-3080.
- 18 Baojiu L., Thomas P.S., Barrow J.D. Large-scale structure in  $f(T)$  gravity // Physical Review D. - 2011. - Vol. 83 // DOI:10.1103/PhysRevD.83.104017.
- 19 Lopez-Revelles A., Myrzakulov R. and Saez-Gomez D. Ekpyrotic universes in  $F(R)$  Horava-Lifshitz gravity // Physical Review D. - 2012. - Vol. 85 // DOI:10.1103/PhysRevD.85.103521.
- 20 Bamba K., Myrzakulov R., Nojiri S. and Odintsov S.D. Reconstruction of  $f(T)$  gravity: Rip cosmology, finite-time future singularities, and thermodynamics // Physical Review D. - 2012. - Vol. 85 // DOI:10.1103/PhysRevD.85.104036.
- 21 Myrzakulov R. Knot Universes in Bianchi Type I Cosmology // Advances in High Energy Physics. - 2012. - Vol. 2012 // DOI:<http://dx.doi.org/10.1155/2012/868203>.
- 22 Esmakhanova K., Myrzakulov N., Nugmanova G., Myrzakulov Y., Chechin L., Myrzakulov R. Dark energy in some integrable and nonintegrable FRW cosmological models // International Journal of Modern Physics D. - 2011. - Vol. 20. - P. 2419-2446.
- 23 Aktas C., Aygun S. and Yilmaz I. Behaviors of dark energy and mesonic scalar field for anisotropic universe in  $f(R)$  gravity // Physics Letters B. - 2012. - Vol. 707. - P. 237-242.
- 24 Мырзакулов Е. Анизотропные модели  $f(T)$  гравитации // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия естественно-технических наук. - 2012. - Т. 6, №91. - С. 71-78.
- 25 Yerzhanov K., Yesmakhanova K., Tsyba P., Myrzakulov N., Nugmanova G., Myrzakulov R.  $g$ -Essence as the cosmic speed-up // Astrophysics and Space Science. - 2012. - Vol. 341. - P. 681-688.
- 26 Esmakhanova K., Myrzakulov Y., Nugmanova G., Myrzakulov R. A note on the relationship between solutions of Einstein, Ramanujan and Chazy equations // International Journal of Theoretical Physics. - 2012. - Vol. 51. - P. 1204-1210.
- 27 Razina O., Myrzakulov Y., Serikbayev N., Nugmanova G., Myrzakulov R. Einstein-Cartan gravity with scalar-fermion interactions // Central European Journal of Physics. - 2012. - Vol. 10. - P. 47-50.
- 28 Jamil M., Ali S., Momeni D., Myrzakulov R. Bianchi type I cosmology in generalized Saez–Ballester theory via Noether gauge symmetry // The European Physical Journal C. - 2012. - Vol. 12 // DOI:10.1140/epjc/s10052-012-1998-x.
- 29 Setare M.R., Momeni D., Myrzakulov R. Entropic corrections to Newton's law // Physica Scripta. - 2012. - Vol. 85 // DOI:10.1088/0031-8949/85/06/065007.
- 30 Karami K., Sheykhi A., Jamil M., Myrzakulov R., Ghaffari S., Abdolmaleki A. Power-law entropy-corrected new agegraphic dark energy in Horava–Lifshitz cosmology // Canadian Journal of Physics. - 2012. - Vol. 90. - P. 473-479.
- 31 Momeni D., Myrzakulov Y., Tsyba P., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Fermionic DBI and Chaplygin gas unified models of dark energy and dark matter from  $f$ -essence // Journal of Physics: Conference Series. - 2012. - Vol. 354 // DOI:10.1088/1742-6596/354/1/012011.

- 32 Momeni D., Jamil M., Raza M., Myrzakulov R. Reconstruction of some cosmological models in  $f(R,T)$  cosmology // The European Physical Journal C. - 2012. - Vol. 72 // DOI:10.1140/epjc/s10052-012-1999-9.
- 33 Jamil M., Rashid M.A., Momeni D., Razina O. and Esmakhanova K. Fractional Action Cosmology with Power Law Weight Function // Journal of Physics: Conference Series. - Vol. 2012. - Vol. 354. - DOI:10.1088/1742-6596/354/1/012008.
- 34 Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Attractor solutions in  $f(T)$  cosmology // The European Physical Journal C. - 2012. - Vol. 72 // DOI:10.1140/epjc/s10052-012-1959-4.
- 35 Bahrehbakhsh A.F., Momeni D., Myrzakulov R. Massless Spin–Zero Particle and the Classical Action via Hamilton–Jacobi Equation in Go"del Universe // International Journal of Theoretical Physics. - 2012. - Vol. 51. - P. 2427-2432.
- 36 Sharif M., Yesmakhanova K., Rani S., Myrzakulov R. Solvable K-essence Cosmologies and Modified Chaplygin Gas Unified Models of Dark Energy and Dark Matter // The European Physical Journal C. - 2012. - Vol. 72 // DOI:10.1140/epjc/s10052-012-2067-1.
- 37 Pasqua A., Khodam-Mohammadi A., Jamil M., Myrzakulov R. Interacting Ricci dark energy with logarithmic correction // Astrophysics and Space Science. - 2012. - Vol. 340. - P. 199-208.
- 38 Momeni D., Majd N. and Myrzakulov R. p-wave holographic superconductors with Weyl corrections // Europhysics Letters. - 2012. - Vol. 97 // DOI:10.1209/0295-5075/97/61001.
- 39 Chakraborty S., Debnath U., Jamil M., Myrzakulov R. Statefinder Parameters for Different Dark Energy Models with Variable G Correction in Kaluza-Klein Cosmology // International Journal of Theoretical Physics. - 2012. - Vol. 51. - P. 2246-2255.
- 40 Debnath U., Chattopadhyay S., Hussain I., Jamil M., Myrzakulov R. Generalized second law of thermodynamics for FRW cosmology with power-law entropy correction // The European Physical Journal C. - 2012. - Vol. 72 // DOI:10.1140/epjc/s10052-012-1875-7.
- 41 Jamil M., Momeni D., Serikbayev N. S., Myrzakulov R. FRW and Bianchi type I cosmology of f-essence // Astrophysics and Space Science. - 2012. - Vol. 339. - P. 37-43.
- 42 Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae // The Astrophysical Journal. - 1999. - Vol. 517. - P. 565-586.
- 43 Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // The Astronomical Journal. - 1998, - Vol. 116. - P. 1009-1038.
- 44 Nojiri S., Odintsov S.D. and Tsujikawa S. Properties of singularities in the (phantom) dark energy universe // Physical Review D. - 2005. - Vol. 71 // DOI:10.1103/PhysRevD.71.063004.
- 45 Nojiri S. and Odintsov S.D. Inhomogeneous equation of state of the universe: Phantom era, future singularity, and crossing the phantom barrier // Physical Review D. - 2005. - Vol. 72 // DOI:10.1103/PhysRevD.72.023003.
- 46 Nojiri S., Odintsov S.D. Is the future universe singular: Dark Matter versus



modified gravity? // <http://arxiv.org/abs/0911.2781>.

47 Lopez-Revelles A.J. and Elizalde E. Universal procedure to cure future singularities of dark energy models // *General Relativity and Gravitation*. - 2012. - Vol. 44. - P. 751-770.

48 Tsyba P.Y., Kulnazarov I.I., Yerzhanov K.K., Myrzakulov R. Pure Kinetic  $k$ -essence as the Cosmic Speed-Up // *International Journal of Theoretical Physics*. - 2011. - Vol. 50. -P. 1876-1886.

49 Myrzakulov R. Fermionic  $k$ -essence // <http://arxiv.org/abs/1011.4337>.

50 Jamil M., Myrzakulov Y., Razina O., Myrzakulov R. Modified Chaplygin gas and solvable  $f$ -essence cosmologies // *Astrophysics and Space Science*. - 2011. - Vol. 336. - P. 315-325.

51 Tsyba P., Kulnazarov I., Yerzhanov K., Razina O., Myrzakul Sh., Myrzakulov R.  $g$ -essence with Yukawa Interactions // *The European Physical Journal C*. - 2011. - Vol. 71 // DOI:10.1140/epjc/s10052-011-1698-y.

52 Dzhunushaliev V., Folomeev V. and Myrzakulov R. On the self-similar motion of a gravitating Chaplygin fluid // *Physics Letters B*. - 2010. - Vol. 693. - P. 209-212.

53 Maison D. Phys. Are the Stationary, Axially Symmetric Einstein Equations Completely Integrable? // *Physical Review Letters*. - 1978. - Vol. 41. - P. 521–522.

54 Belinskii V.A., Zakharov V.E. Integration of the Einstein equations by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions // *Journal of Experimental and Theoretical Physics* - 1978. - Vol. 48. - P. 985.

55 Belinskii V.A., Zakharov V.E. Stationary gravitational solitons with axial symmetry // *Journal of Experimental and Theoretical Physics* - 1979. - Vol. 50. - P. 3.

56 Alekseev G.A. Thirty years of studies of integrable reductions of Einstein's field equations // <http://arxiv.org/abs/1011.3846>.

57 Alekseev G.A., Belinski V.A. Soliton Nature of Equilibrium State of Two Charged Masses in General Relativity // *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. - 2012. - Vol. 12. - P. 10-18.

58 Nugmanova G.N., Myrzakul Sh.R., Razina O.V., Esmakhanova K.R., Serikbayev N.S., Myrzakulov R. Some cosmological aspects of Horava-Lifshitz gravity: integrable and nonintegrable models // <http://arxiv.org/abs/1104.5374>.

59 Myrzakul Sh., Esmakhanova K., Myrzakulov K., Nugmanova G., Myrzakulov R. FRW cosmological models with integrable and nonintegrable differential equations of state // <http://arxiv.org/abs/1105.2771>.

60 Haas F. The damped Pinney equation and its applications to dissipative quantum mechanics // *Physica Scripta*. - 2010. - Vol. 81 // DOI:10.1088/0031-8949/81/02/025004.

61 Ermakov V.P. Transformation of differential equations // *Univ. Izv. Kiev*. - 1880. - Vol. 20. - P. 1–19.

62 Pinney E. The nonlinear differential equation  $y + p(x)y + cy^{-3} = 0$  // *Proceedings of the American Mathematical Society*. - 1950. - Vol. 1. - P. 681.

63 Kamenshchik A., Luzzi M. and Venturi G. Method of comparison equations and generalized Ermakov's equation // *Russian Physics Journal*. - 2009. - Vol. 52. - P.

1339-1351.

64 GuhaP., Choudhury A.G. and Grammaticos B. Dynamical Studies of Equations from the Gambier Family // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). - 2011. - Vol. 7 // DOI:<http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2011.028>.

65 Ablowitz M. J, Clarkson P. A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering // London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press. - 1991. Vol. 149. - P. 516.

66 Clarkson P.A. Painlevé transcendents // in NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press. - 2010.

67 Nojiri S., Odintsov S.D. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration // Physical Review D. - 2003. - Vol. 68 // DOI:[10.1103/PhysRevD.68.123512](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.123512).

68 Nojiri S., Odintsov S.D. Modified Gravity with  $\ln R$  Terms and Cosmic Acceleration // General Relativity and Gravitation. - 2004. - Vol. 36. - P. 1765-1780.

69 Nojiri S., Odintsov S.D. Modified Gauss–Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy // Physics Letters B. - 2005. - Vol. 631. - P. 1–6.

70 Elizalde E., Myrzakulov R., Obukhov V.V., Saez-Gomez D.  $\Lambda$ CDM epoch reconstruction from  $F(R,G)$  and modified Gauss-Bonnet gravities // Classical and Quantum Gravity. - 2010. - Vol. 27 // DOI:[10.1088/0264-9381/27/9/095007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/9/095007).

71 Myrzakulov R., Saez-Gomez D., Tureanu A. On the  $\Lambda$ CDM Universe in  $f(G)$  gravity // General Relativity and Gravitation. - 2011. - Vol. 43. - P. 1671-1684.

72 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Myrzakulov R. and Singleton D. Linear stability of spherically symmetric and wormhole solutions supported by the sine-Gordon ghost scalar field // Physical Review D. - 2010. - Vol. 82 // DOI:[10.1103/PhysRevD.82.045032](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.045032).

73 Nojiri S., Odintsov S.D. Unifying inflation with  $\Lambda$ CDM epoch in modified  $f(R)$  gravity consistent with Solar System tests // Physics Letters B. - 2007. - Vol. 657. - P. 238–245.

74 Cognola G., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D., Sebastiani L. and Zerbini S. Class of viable modified  $f(R)$  gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion // Physical Review D. - 2008. - Vol. 77 // DOI:[10.1103/PhysRevD.77.046009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.046009).

75 Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D., Sebastiani L. and Zerbini S. Nonsingular exponential gravity: A simple theory for early- and late-time accelerated expansion // Physical Review D. - 2011. - Vol. 83 // DOI:[10.1103/PhysRevD.83.086006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.086006).

76 Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // International Journal of Modern Physics D. - 2006. - Vol. 15 // DOI:[10.1142/S021827180600942X](https://doi.org/10.1142/S021827180600942X).

77 Frieman J., Turner M., Huterer D. Dark Energy and the Accelerating Universe // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. - 2008. - Vol. 46. - P. 385-432.

78 Caldwell R.R., Kamionkowski M. The Physics of Cosmic Acceleration //

- Annual Review of Nuclear and Particle Science. - 2009. - Vol. 59. - P. 397-429.
- 79 Montelongo Garcia N., Lobo F.S.N., Mimoso J.P. and Harko T.  $f(G)$  modified gravity and the energy conditions // Journal of Physics: Conference Series. - 2011. - Vol. 314 // DOI:10.1088/1742-6596/314/1/012056.
- 80 Francisco T., Lobo S.N., Nojiri S., Odintsov S.D.  $f(R,T)$  gravity // Physical Review D. - 2011. - Vol. 84 // DOI:10.1103/PhysRevD.84.024020.
- 81 Harko T.C., Lobo S.N.F., Nojiri S., Odintsov S.D.  $f(R,T)$  gravity // Physical Review D. - 2011. - Vol. 84 // DOI:10.1103/PhysRevD.84.024020.
- 82 Myrzakulov R. Accelerating universe from  $F(T)$  gravity // The European Physical Journal C. - 2011. - Vol. 71 // DOI:10.1140/epjc/s10052-011-1752-9.
- 83 Tsujikawa S. Modified Gravity Models of Dark Energy // Lectures on Cosmology. Lecture Notes in Physics. - 2010. - Vol. 800. - P. 99-145.
- 84 Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V.F.  $k$ -inflation // Physics Letters B. - 1999. - Vol. 458. - P. 209–218.
- 85 Armendariz-Picon C., Mukhanov V.F., Steinhardt P.J. Essentials of  $k$ -essence // Physical Review D. - 2001. - Vol. 63 // DOI:10.1103/PhysRevD.63.103510.
- 86 Armendariz-Picon C., Mukhanov V.F., Steinhardt P.J. A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration // Physical Review Letters. - 2000. - Vol. 85 - P. 4438–4441.
- 87 Chiba T., Okabe T., Yamaguchi M. Kinetically driven quintessence // Physical Review D. - 2000. - Vol. 62 // DOI:10.1103/PhysRevD.62.023511.
- 88 Ribas M.O., Devecchi F.P., Kremer G.M. Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology // Physical Review D. - 2005. - Vol. 72 // DOI:10.1103/PhysRevD.72.123502.
- 89 Samojeden L.L., Devecchi F.P., Kremer G.M. Fermions in Brans-Dicke cosmology // Physical Review D. - 2010. - Vol. 81 // DOI:10.1103/PhysRevD.81.027301.
- 90 Samojeden L.L., Kremer G.M., Devecchi F.P. Accelerated expansion in bosonic and fermionic 2D cosmologies with quantum effects // Europhysics Letters. - 2009. - Vol. 87 // DOI:10.1209/0295-5075/87/10001.
- 91 Ribas M.O., Kremer G.M. Fermion fields in Einstein-Cartan theory and the accelerated-decelerated transition in a primordial Universe // Gravitation and Cosmology. - 2010. - Vol. 16. - P. 173-177.
- 92 Cai Y.F., Wang J. Dark Energy Model with Spinor Matter and Its Quintom Scenario // Classical and Quantum Gravity. - 2008. - Vol. 25 // DOI:10.1088/0264-9381/25/16/165014.
- 93 Wang J., Cui S.-W., Zhang C.-M. Thermodynamics of Spinor Quintom // Physics Letters B. - 2010. - Vol. 683. - P. 101–107.
- 94 Ribas M.O., Devecchi F.P., Kremer G.M. Cosmological model with non-minimally coupled fermionic field // Europhysics Letters. - 2008. - Vol. 81 // DOI:10.1209/0295-5075/81/19001.
- 95 Rakhi R., Vijayagovindan G.V., Indulekha K. A cosmological model with fermionic field // International Journal of Modern Physics A. - 2010. - Vol. 25 // DOI:10.1142/S0217751X10049025.
- 96 Rakhi R., Vijayagovindan G.V., Noble P. A., Indulekha K. A cosmological

model with fermionic field and Gauss-Bonnet term // International Journal of Modern Physics A. - 2010. - Vol. 25. - P. 1267-1278.

97 Chimento L.P., Devecchi F.P., Forte M., Kremer G.M. Phantom cosmologies and fermions // Classical and Quantum Gravity. - 2008. - Vol. 25 // DOI:10.1088/0264-9381/25/8/085007.

98 Anischenko S.V., Cherkas S.L., Kalashnikov V.L. Cosmological production of fermions in a flat Friedman universe with linearly growing scale factor: exactly solvable model // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. - 2010. - Vol. 13. - P. 315-319.

99 Saha B. Nonlinear spinor field in cosmology // Physical Review D. - 2004. - Vol. 69 // DOI:10.1103/PhysRevD.69.124006.

100 Razina O.V., Myrzakulov Y.M., Serikbayev N.S., Myrzakul Sh.R., Nugmanova G.N., Myrzakulov R. G-essence cosmologies with scalar-fermion interactions // The European Physical Journal Plus. - 2011. - Vol. 126 // DOI:10.1140/epjp/i2011-11085-9.

101 Vakili B., Sepangi H.R. Time reparameterization in Bianchi type I spinor cosmology // Annals of Physics. - 2008. - Vol. 323. - P. 548-565.

102 Dereli T., Ozdemir N., Sert O. Einstein-Cartan-Dirac Theory in (1+2)-Dimensions // The European Physical Journal C. - 2013. - Vol. 73 // DOI:10.1140/epjc/s10052-013-2279-z.

103 Balantekin A.B., Dereli T. Exact cosmological solution of the coupled Einstein-Majorana fermion-scalar field equations // Physical Review D. - 2007. - Vol. 75 // DOI:10.1103/PhysRevD.75.024039.

104 Armendariz-Picon C., Greene P. Spinors, Inflation, and Non-Singular Cyclic Cosmologies // General Relativity and Gravitation. - 2003. - Vol. 35. -P. 1637-1658.

105 Weinberg S. Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons, New York, 1972, *ibid.* Cosmology Cambridge. New York. - 2007.

106 Wald R.M. General Relativity. The University of Chicago Press. Chicago. - 1984.

107 Ryder L.H. Quantum Field Theory. Cambridge University Press. Cambridge. - 1996.

108 Birrell N.D., Davies P.C.W. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press. Cambridge. - 1982.

109 Kamenshchik A.Y., Moschella U., Pasquier V. An alternative to quintessence // Physics Letters B. - 2001. - Vol. 511. - P. 265–268.

110 Sahni V., Saini T.D., Starobinsky A.A. and Alam U. Statefinder - a new geometrical diagnostic of dark energy // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. - 2003. - Vol. 77. - P. 201-206.

111 Jamil M., Debnath U. FRW Cosmology with Variable  $G$  and  $\Lambda$  // International Journal of Theoretical Physics. - 2011. - Vol. 50. - P. 1602-1613.

112 Sen A. Time and Tachyon // International Journal of Modern Physics A. - 2003. - Vol. 18 // DOI:10.1142/S0217751X03015313.

113 Gorini V., *et. al.* Tachyons, Scalar Fields and Cosmology // Physical Review D. - 2004. - Vol. 69 // DOI:10.1103/PhysRevD.69.123512.

- 114 Gibbons G.W. Cosmological evolution of the rolling tachyon // *Physics Letters B*. - 2002. - Vol. 537. - P. 1–4.
- 115 Mazumdar A., Panda S., Perez-Lorenzana A. Assisted inflation via tachyon condensation // *Nuclear Physics B*. - 2001. - Vol. 614. - P. 101–116.
- 116 Debnath U., Jamil M. Correspondence between DBI-essence and modified Chaplygin gas and the generalized second law of thermodynamics // *Astrophysics and Space Science*. - 2011. - Vol. 335. - P. 545-552.
- 117 Jamil M., Mahomed F.M., Momeni D. Noether symmetry approach in  $f(R)$ -tachyon model // *Physics Letters B*. - 2011. - Vol. 702. - P. 315–319.
- 118 Ramanujan S. *Notebooks* // Tata Institute of Fundamental Research. Bombay. - 1957. - 2 volumes.
- 119 Ramanujan S. *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers* // Narosa. New Delhi. - 1988.
- 120 Chakravarty S., Ablowitz M.J. Parameterizations of the Chazy equation // *Studies in Applied Mathematics*. - 2010. - Vol. 124. - P. 105–135.
- 121 Chazy J. Sur les  $e'$ quations diff $e'$ rentielles du troisi $e'$ me ordre et d'ordre sup $e'$ rieur dont l'integrale a ses points critiques fixes // *Acta Mathematica*. - 1911. - Vol. 34. - P. 317-385.
- 122 Atiyah M.F., Hitchin N.J. *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*// Princeton University Press. Princeton. - 1988.
- 123 Chakravarty S., Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Reductions of self-dual Yang-Mills fields and classical systems // *Physical Review Letters*. - 1990. - Vol. 65. - P. 1085-1087.
- 124 Hitchin N.J. Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations // *Journal of Differential Geometry*. - 1995. - Vol. 42. - P. 30-112.
- 125 Dubrovin B. *Geometry of 2D topological field theories* // *Integrable Systems and Quantum Groups. Lecture Notes in Mathematics*. - 1996. - Vol. 1620. - P. 120-348.
- 126 Ferapontov E.V., Odesskii A.V. Integrable Lagrangians and modular forms // *Journal of Geometry and Physics*. - 2010. - Vol. 60. - P. 896–906.
- 127 Rosenhead L. (ed.) *Laminary Boundary Layers*. // Clarendon Press. Oxford. - 1963.
- 128 Guillot A. The geometry of Chazy's third order homogeneous differential equations // *Funkcialaj Ekvacioj*. - 2012. - Vol. 55. - P. 67-87.
- 129 Gibbons G.W., Pope C.N. The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity // *Communications in Mathematical Physics*. - 1979. - Vol. 66. - P. 267-290.
- 130 Hitchin N.J. *Monopoles, Minimal Surfaces and Algebraic Curves* // *Seminaire de Mathematiques Superieuries*, 105, Presses de l'Universite de Montreal, Montreal.: - 1987.
- 131 Ablowitz M.J., Chakravarty S., Halburd R. The generalized Chazy equation and Schwarzian triangle functions // *Asian Journal of Mathematics*. - 1998. - Vol. 2. - P. 619-624.
- 132 Sasano Y. *Studies on the Chazy equations* // <http://arxiv.org/abs/0708.3537>.
- 133 Brezhnev Yu., Lyakhovich S., Sharapov A. Dynamical systems defining

Jacobi's theta-constants // Journal of Mathematical Physics. - 2011. - Vol. 52 // DOI:dx.doi.org/10.1063/1.3662961.

134 Sen T., Tabor M. Lie symmetries of the Lorenz model // Physica D: Nonlinear Phenomena. - 1990. - Vol. 44. - P. 313-339.

135 Tabor M., Weiss J. Analytic structure of the Lorenz system // Physical Review A. - 1981. - Vol. 24. - P. 2157-2167.

136 Yee T.-L., Conte R. Another integrable case in the Lorenz model // Journal of Physics A: Mathematical and General. - 2004. - Vol. 37. - P. L113-L115.

137 Zanusso O., Zambelli L., Vacca G.P., Percacci R. Gravitational corrections to Yukawa systems // Physics Letters B. - 2010, - Vol. 689. - P. 90-94.

138 Rodigast A., Schuster T. Gravitational Corrections to Yukawa and  $\phi^4$  Interactions // Physical Review Letter. - 2010. - Vol. 104 // DOI:10.1103/PhysRevLett.104.081301.

139 Loeb A., Weiner N. Cores in Dwarf Galaxies from Dark Matter with a Yukawa Potential // Physical Review Letter. - 2011. - Vol. 106. - DOI:10.1103/PhysRevLett.106.171302.

140 Miao S.P., Woodard R.P. Leading Log Solution for Inflationary Yukawa Theory // Physical Review D. - 2006. - Vol. 74 // DOI:10.1103/PhysRevD.74.044019.

141 Woodard R.P. Generalizing Starobinskii's Formalism to Yukawa Theory & to Scalar QED // Journal of Physics: Conference Series. - 2007. - Vol. 68 // DOI:10.1088/1742-6596/68/1/012032.

142 Ribas M.O., Devecchi F.P. and Kremer G.M. Fermionic cosmologies with Yukawa-type interactions // Europhysics Letters. - 2011. - Vol. 93 // DOI:10.1209/0295-5075/93/19002.

143 Cataldo M., Chimento L. Crossing the phantom divide with a classical Dirac field // Astrophysics and Space Science. - 2011. - Vol. 333. -P. 277-285.

144 Adabi F., Karami K., Felegary F., Azarmi Z. Interacting viscous entropy-corrected holographic scalar field models of dark energy with time-varying  $G$  in modified FRW cosmology // Research in Astronomy and Astrophysics. - 2012. - Vol. 12 // DOI:10.1088/1674-4527/12/1/002.

145 Barreiro T., Sen A. A. Generalized Chaplygin gas in a modified gravity approach // Physical Review D. - 2004. - Vol. 70 // DOI:10.1103/PhysRevD.70.124013.

146 Benaoum H.B. Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid // <http://arxiv.org/abs/hep-th/0205140>.

147 Bento M.C., Bertolami O., Sen A.A. Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy-Matter Unification // Physical Review D. - 2002. - Vol. 66 // DOI:10.1103/PhysRevD.66.043507.

148 Capozziello S., Matsumoto J., Nojiri S., Odintsov S. D. Dark energy from modified gravity with Lagrange multipliers // Physics Letters B. -2010. - Vol. 693. - P. 198208.

149 Carturan D., Finelli F. Cosmological effects of a class of fluid dark energy models // Physical Review D. - 2003. - Vol. 68 // DOI:10.1103/PhysRevD.68.103501.

- 150 Chiba T. Tracking  $k$ -essence // Physical Review D. -2002. -Vol. 66 // DOI:10.1103/PhysRevD.66.063514.
- 151 De Putter R., Linder E.V. Kinetic  $k$ -essence and Quintessence // Astroparticle Physics. - 2007. - Vol. 28. - P. 263-272.
- 152 Debnath U. Variable modified Chaplygin gas and accelerating universe // Astrophysics and Space Science. - 2007. - Vol. 312. - P. 295-299.
- 153 Debnath U., Banerjee A., Chakraborty S. Role of modified Chaplygin gas in accelerated universe. // Classical and Quantum Gravity - 2004. - Vol. 21 // DOI:10.1088/0264-9381/21/23/019.
- 154 Fabris J.C., Ogouyandjou C., Tossa J., Velten H.E.S. Ruling out the Modified Chaplygin Gas cosmologies // Physics Letters B. - 2011. - Vol. 694. - P. 289–293.
- 155 Farooq M. U., Rashid M. A., Jamil M. Interacting Entropy-Corrected New Agegraphic  $k$ -essence, Tachyon and Dilaton Scalar Field Models in Non-flat Universe // International Journal of Theoretical Physics. - 2010. - Vol. 49. - P. 2278-2287.
- 156 Jamil M., Rashid M. A. Interacting modified variable Chaplygin gas in a non-flat universe // The European Physical Journal C. - 2008. - Vol. 58. - P. 111-114.
- 157 Jamil M., Rashid M. A., Constraining the coupling constant between dark energy and dark matter // The European Physical Journal C. - Vol. 60. - P. 141-147.
- 158 Jamil M., Qadir M., Rashid M.A. Charged black holes in phantom cosmology // European. Physical Journal C. - 2008. - Vol. 58. - P. 325-329.
- 159 Jing H., Ya-Bo Wu. and Ming-Hui Fu. Dynamical Attractor of Modified Chaplygin Gas // Chinese Physics Letters. - 2008. - Vol. 25. - P. 347-350.
- 160 Karami K., Khaledian M. S., Jamil M. Reconstructing interacting entropy-corrected holographic scalar field models of dark energy in the non-flat universe // Physica Scripta. - 2011. - Vol. 83 // DOI: 10.1088/0031-8949/83/02/025901.
- 161 Liu D-j., Li X-z. Cosmic Microwave Background Radiation Constraints on a Modified Chaplygin Gas Model // Chinese Physics Letters. - 2005. - Vol. 22 // DOI:10.1088/0256-307X/22/7/011.
- 162 J. Lu., L. Xu., J. Li., B. Chang., Y. Gui., H. Liu. Constrains on modified Chaplygin gas from recent observations and a comparison of its status with other models // Physics Letters B. - 2008. - Vol. 662. - P. 87-91.
- 163 Malekjani M., Khodam-Mohammadi A., Taji M. Cosmological implications of interacting polytropic gas dark energy model in non-flat universe // International Journal of Theoretical Physics. - 2011. - Vol. 50. - P. 3112-3124.
- 164 Malquarti M., Copeland E. J., Liddle A. R.  $k$ -essence and the coincidence problem // Physical Review D. - 2003. - Vol. 68 // DOI:10.1103/PhysRevD.68.023512.
- 165 Saha B. Spinor Field in Bianchi type-I Universe: regular solutions // Physical Review D. - 2001. - Vol. 64 // DOI:10.1103/PhysRevD.64.123501.
- 166 Saha B. Spinor fields in Bianchi type-I Universe Physics of Particles and Nuclei // Physics of Particles and Nuclei. - 2006. - Vol. 37. - S13.
- 167 Saha B. Nonlinear spinor field in Bianchi type-I cosmology: Inflation, isotropization, and late time acceleration // Physical Review D. - 2006. - Vol. 74 //

DOI:10.1103/PhysRevD.74.124030.

168 Saha B., Shikin G.N. Nonlinear Spinor Field in Bianchi type-I Universe filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions // Journal of Mathematical Physics. - 1997. - Vol. 38 // DOI:org/10.1063/1.531944.

169 Scherrer R. Purely Kinetic  $k$  Essence as Unified Dark Matter // Physical Review Letter. - 2004. - Vol. 93 // DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.011301.

170 Sherwin B.D. et. al. Evidence for Dark Energy from the Cosmic Microwave Background Alone Using the Atacama Cosmology Telescope Lensing Measurements // Physical Review Letters. - 2011. - Vol. 107 // DOI:10.1103/PhysRevLett.107.021302.

171 Tsyba P., Yerzhanov K., Esmakhanova K., Kulnazarov I., Nugmanova G., Myrzakulov R. Reconstruction of  $f$ -essence and fermionic Chaplygin gas models of dark energy // <http://arxiv.org/abs/1103.5918>.

172 Wei H. Spinor Dark Energy and Cosmological Coincidence Problem // Physics Letters B. - 2011. - Vol. 695. - P. 307-311.

173 Yang R-J., Gao X.-T. Phase-space analysis of a class of  $k$ -essence cosmology // Classical and Quantum Gravity. - 2011. - Vol. 28 // DOI:10.1088/0264-9381/28/6/065012.

174 Yerzhanov K. K., Tsyba P. Yu., Myrzakul Sh. R., Kulnazarov I. I., Myrzakulov R. Accelerated expansion of the Universe driven by  $g$ -essence // <http://arxiv.org/abs/1012.3031>.

175 Radulescu M.I., Sirmas N. Shock instability in dissipative gases // <http://arxiv.org/abs/1108.3296>.

176 Myrzakulov Y., Esmakhanova K., Myrzakulov N., Nugmanova G., Myrzakulov R. Particular solutions of Einstein equation related with Ramanujan, Chazy and Lorentz oscillator equations and their cosmological applications // X International Conference on Gravitation. Astrophysics and Cosmology. Vietnam. Quy Nhon. - 2011. - P. 4.

177 Myrzakulov Y., Esmakhanova K., Myrzakulov N., Razina O.V., Nugmanova G., Myrzakulov R. Dark energy in some integrable and nonintegrable FRW models // X International Conference on Gravitation. Astrophysics and Cosmology. Vietnam. Quy Nhon. - 2011. - P. 14.

178 Myrzakulov Y., Yerzhanov K., Tsyba P., Razina O.V., Myrzakulov N., Esmakhanova K., Myrzakulov R. Accelerated expansion of the Universe from  $f$ -essence and  $g$ -essence // X International Conference on Gravitation. Astrophysics and Cosmology. Vietnam. Quy Nhon. - 2011. - P. 27.

179 Мырзакулов Е., Ержанов К.К. Релятивистское выражение для интенсивности излучения для  $f(T)$  гравитации // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. Серия естественно-технических наук. - 2013. - №2(93). - С. 71-75.

180 Мырзакулов Е., Ержанов К.К. Вселенная с трилистными узлами в космологии Бианки типа I // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. Серия естественно-технических наук. - 2013. - №2(93). - С. 76-81.

181 Myrzakulov Y., Razina O., Tsyba P., Yesmakhanova K., Myrzakulov R.



Dark energy in  $f(R,T)$  gravity // Материалы 8-й международной научной конференции посвященной 40-летию КарГУ имени академика Е.А. Букетова. Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент, Караганда. - 2012, июнь 18-20. - С. 53-57.

182 Мырзакулов Е., Ержанов К.К. Выражение для интенсивности излучения для  $f(T)$ -гравитации // Материалы международной конференции посвященной 75-летию академика НАН РК Абдильдина М.М. Актуальные проблемы современной физики, Алматы. - 2013, март 15-16. - С. 41.

183 Мырзакулов Е. Частный случай модели  $f(T)$ -гравитации с учетом теоремы Нетер // Материалы международной научной конференции студентов, магистрантов, и молодых ученых ЛОМОНОСОВ-2013: Астана, - 2013. Часть 1, - С.139-141.

184 Мырзакулов Е., Джунушалиев В. Дж., Фоломеев В.Н. Некоторые решения для модели толстой мембраны в рамках теории  $f(R)$  гравитации // Труды международной научной конференции посвященной 20 – летию Независимости Казахстана. Наука и образование – ведущий фактор стратегии «Казахстан – 2030», Сагиновские чтения №3., Караганда. - 2011, июнь 23-24. - Часть IV. - С. 236-238.

185 Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Energy conditions in generalized teleparallel gravity models // General Relativity and Gravitation. -2013. - Vol. 45. - N1. - P. 263-273.

186 Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Wormholes in a viable  $F(T)$  gravity // European Physical Journal C. - 2013. - Vol. 72. - P. 2267.

187 Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Observational Constraints on Non-minimally Coupled Galileon Model // European Physical Journal C. - 2013. -Vol. 73. - P. 2347.

188 Aslam A., Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Noether gauge symmetry of modified teleparallel gravity minimally coupled with a canonical scalar field // Canadian Journal of Physics. - 2013. - Vol. 91, N1. - P. 93-97.

189 Bamba K., Razina O., Yerzhanov K., Myrzakulov R. Cosmological evolution of equation of state for dark energy in  $g$ -essence models // International Journal of Modern Physics D. - 2013. - Vol. 22, N6. - P. 1350023.

190 Bamba K., Lopez-Revelles A., Myrzakulov R., Odintsov S.D., Sebastiani L. Cosmic history of viable exponential gravity: Equation of state oscillations and growth index from inflation to dark energy era // Classical and Quantum Gravity. - 2013. - Vol. 30, N1. - P. 015008.

191 Bamba K., Yesmakhanova K., Yerzhanov K., Myrzakulov R. Reconstruction of the equation of state for the cyclic universes in homogeneous and isotropic cosmology // Central European Journal of Physics. - 2013. - Vol. 11, N4. - P. 397-411.

192 Bamba K., Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Generalized second law of thermodynamics in  $f(T)$  gravity with entropy corrections // Astrophysics and Space Science. - 2013. - Vol. 344, N1. - P. 259-267.

193 Momeni D., Raza M., Setare M., Myrzakulov R. Analytical holographic superconductor with backreaction using AdS3/CFT2” // International Journal of

Theoretical Physics. - 2013. - Vol. 52, N8. - P. 2773-2783.

194 Momeni D., Myrzakulov R., Raza M. More on superconductors via gauge/gravity duality with nonlinear Maxwell field // Journal of Gravity. - 2013. - Vol. 2013. - P. 782512.

195 Rodrigues M.E., Houndjo M.J.S., Momeni D., Myrzakulov R. Planar Symmetry in  $f(T)$  gravity // International Journal of Modern Physics D. - 2013. - Vol. 22, N8. - P. 1350043.

196 Myrzakulov R., Sebastiani L., Zerbini S. Some aspects of generalized modified gravity models // International Journal of Modern Physics D. - 2013. - Vol. 22, N8. - P. 1330017.

197 Myrzakulov R., Sebastiani L., Zerbini S. Topological Static Spherically Symmetric vacuum Solutions in  $F(R,G)$  Gravity // General Relativity and Gravitation. - 2013. Vol. 45, N3. - P. 675-690.

198 Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Loop Quantum Corrections to Statefinder Parameters of Dark Energy // International Journal of Theoretical Physics. - 2013. - Vol. 52, N9. - P. 3283-3294.

199 Bravetti A., Momeni D., Myrzakulov R., Quevedo H. Geometrothermodynamics of higher dimensional black holes // General Relativity and Gravitation. - 2013. - Vol. 45, N8. - P. 1603-1617.

200 Farooq U., Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R. Reconstruction of  $f(T)$  and  $f(R)$  gravity according to  $(m,n)$ -type holographic dark energy // Canadian Journal of Physics. - 2013. - Vol. 91, N9. - P. 703-708.

201 Bravetti A., Momeni D., Myrzakulov R., Altaibayeva A. Geometrothermodynamics of Myers-Perry black holes // Advances in High Energy Physics. - 2013. - Vol. 2013. - Article ID 549808.

202 Cognola G., Myrzakulov R., Sebastiani L., Zerbini S. Einstein gravity with Gauss-Bonnet entropic corrections // Physical Review D. - 2013. - Vol. 88. - P. 024006.

203 Karami K., Jamil M., Ghaffari S., Fahimi K., Myrzakulov R. Holographic, new age graphic and ghost dark energy models in fractal cosmology // Canadian Journal of Physics. - 2013. - Vol. 91. - P. 770-776.

204 Aslam A., Jamil M., Myrzakulov R. Noether gauge symmetry for Bianchi type I model in  $f(T)$  gravity // Physica Scripta. - 2013. - Vol. 88. - P. 025003.

205 Myrzakulov R., Sebastiani L., Zerbini S. Inhomogeneous viscous fluids in FRW universe // Galaxies. - 2013. - Vol. 1, N2. - P. 83-95.

206 Momeni D., Myrzakulov R., Raza M. Holographic superconductors with Weyl Corrections via gauge/gravity duality // International Journal of Modern Physics A. - 2013. - Vol. 28, N19. - P. 1350096.

207 Aslam A., Jamil M., Momeni D., Myrzakulov R., Rashid M.A., Raza M. Noether Gauge Symmetry Approach in Quintom Cosmology // Astrophysics and Space Science. - 2013 // DOI:10.1007/s10509-013-1569-0.

208 Rodrigues M.E., Jardim D.F., Houndjo M.J.S., Myrzakulov R. Thermodynamics of black plane solution // General Relativity and Gravitation. - 2013. - Vol. 45, N11. - P. 2309-2323.

209 Sharif M., Rani S., Myrzakulov R. Analysis of  $F(R,T)$  Gravity Models

Through Energy Conditions // European Physical Journal Plus. - 2013. - Vol. 128, N11. - P. 123.

210 Rodrigues M.E., Houndjo M.J.S., Momeni D., Myrzakulov R. A Type of Levi-Civita's Solution in Modified Gauss-Bonnet Gravity // Canadian Journal of Physics. - 2013 // DOI:10.1139/cjp-2013-0414.

211 Di Criscienzo R., Myrzakulov R., Sebastiani L. Looking for empty topological whormhole spacetimes in  $F(R)$ -modified gravity // Classical and Quantum Gravity // <http://arxiv.org/abs/1306.4750>.

212 Myrzakulov R., Shahalam M. Statefinder hierarchy of bimetric and galileon models for concordance cosmology // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. - 2013. - Vol. 2013, N10. - P. 047.

213 Pasqua A., Chattopadhyay S., Myrzakulov R. A dark energy with higher order derivatives of  $H$  in the modified gravity  $f(R,T)$  // ISRN High Energy Physics. - 2013. (accepted).

214 Rodrigues M.E., Houndjo M.J.S., Tossa J., Momeni D., Myrzakulov R. Charged Black Holes in Generalized Teleparallel Gravity // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. - 2013. (accepted).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А – Список уравнений Шези

В работе [121] Шези сделал полную классификацию всех дифференциальных уравнений 3-го порядка в виде:

$$y''' = F(t, y, y', y''), \quad (1)$$

где  $F$  – это полиномы по  $y, y'$  и  $y''$  и локально аналитичны по  $z$ , и имеют свойство Пенлеве,  $y' = dy/dz$  и т.д. Здесь представляем список канонических приведенных уравнений Шези [132]

$$CE-I: y''' = -6y^2, \quad (2)$$

$$CE-II: y''' = -2yy'' - 2y^2, \quad (3)$$

$$CE-III: y''' = 2yy'' - 3y^2, \quad (4)$$

$$CE-IV: y''' = -3yy'' - 3y^2 - 3y^2y', \quad (5)$$

$$CE-V: y''' = -2yy'' - 4y^2 - 2y^2y', \quad (6)$$

$$CE-VI: y''' = -yy'' - 5y^2 - y^2y', \quad (7)$$

$$CE-VII: y''' = -yy'' - 2y^2 + 2y^2y', \quad (8)$$

$$CE-VIII: y''' = 6y^2y', \quad (9)$$

$$CE-IX: y''' = 12y^2 + 72y^2y' + 54y^4, \quad (10)$$

$$CE-Xa: y''' = 6y^2y' + \frac{3}{11}(9+7\sqrt{3})(y'+y^2)^2, \quad (11)$$

$$CE-Xb: y''' = 6y^2y' + \frac{3}{11}(9-7\sqrt{3})(y'+y^2)^2, \quad (12)$$

$$CE-XI: y''' = -2yy'' - 2y^2 + \frac{24}{n^2-1}(y'+y^2)^2, \quad (13)$$

$$CE-XII: y''' = 2yy'' - 3y^2 - \frac{24}{n^2-36}(6y'-y^2), \quad (14)$$

$$CE-XIII: y''' = 12yy'. \quad (15)$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б – Вывод уравнений движения $g$ -эссенции, $k$ -эссенции и $f$ -эссенции

В этом приложении хотим представить вывод уравнений движения для действия  $f$ -эссенции (4.26), то есть системы (4.37)-(4.41). Но, так как  $f$ -эссенция является точным частным случаем  $g$ -эссенции, рассматриваем более общий случай и даем вывод уравнений движения для  $g$ -эссенции. С этой целью рассмотрим следующее действие  $g$ -эссенции

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(X, Y, \phi, \psi, \bar{\psi})], \quad (1)$$

где  $R$  – является скалярной кривизной,  $X$  – является кинетическим членом для скалярного поля  $\phi$ ,  $Y$  – является кинетическим членом для фермионного поля  $\psi$  и  $K$  – это некоторая функция (лагранжиан) ее аргументов. В случае метрики ФРУ (1.74),  $R$ ,  $X$  и  $Y$  имеют вид

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (2)$$

$$X = 0.5 \dot{\phi}^2, \quad (3)$$

$$Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi), \quad (4)$$

соответственно. Подставляя (2)-(4) в (1) и интегрируя по пространственным переменным, приходим к эффективному лагранжиану в мини-суперпространстве  $\{a, \phi, \psi, \bar{\psi}\}$

$$L = -2(3a\dot{a}^2 - a^3K). \quad (5)$$

Вариация лагранжиана (5) по переменной  $a$  дает уравнение движения относительно масштабного фактора

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + a^2K = 0. \quad (6)$$

Теперь варьируя вышеупомянутый лагранжиан (5) по скалярному полю  $\phi$  получим его уравнения движения в виде

$$K_{,X}\ddot{\phi} + \dot{K}_{,X}\dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}K_{,X}\dot{\phi} - K_{,\phi} = 0. \quad (7)$$

Теперь вариация лагранжиана (5) по  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ , то есть соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжиана для фермионных полей дают

$$K_Y \gamma^0 \dot{\psi} + 1.5 \frac{\dot{a}}{a} K_Y \gamma^0 \psi + 0.5 \dot{K}_Y \gamma^0 \psi - i K_{\bar{\psi}} = 0, \quad (8)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 + 1.5 \frac{\dot{a}}{a} K_Y \bar{\psi} \gamma^0 + 0.5 \dot{K}_Y \bar{\psi} \gamma^0 + i K_{\psi} = 0. \quad (9)$$

Также, имеем условие "нулевой энергии", даваемое формулой

$$L_a \dot{a} + L_{\phi} \dot{\phi} + L_{\psi} \dot{\psi} + L_{\bar{\psi}} \dot{\bar{\psi}} - L = 0, \quad (10)$$

которое дает уравнение

$$-3a^{-2} \dot{a}^2 + 2XK_X + YK_Y - K = 0. \quad (11)$$

Собирая все полученное уравнения (6)-(9) и (11) и переписывая их в терминах параметра Хаббла  $H = (\ln a)_t$ , приходим к следующей замкнутой системе уравнений  $g$ -эссенции (для случая метрики ФРУ):

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (12)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (13)$$

$$K_X \ddot{\phi} + (\dot{K}_X + 3HK_X) \dot{\phi} - K_{\phi} = 0, \quad (14)$$

$$K_Y \dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y) \psi - i \gamma^0 K_{\bar{\psi}} = 0, \quad (15)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y) \bar{\psi} + i K_{\psi} \gamma^0 = 0, \quad (16)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\rho = 2XK_X + YK_Y - K, \quad p = K, \quad (18)$$

являются плотностью энергии и давлением  $g$ -эссенции. Ясно, что эти выражения для плотности энергии и давления представляют компоненты тензора энергии-импульса  $g$ -эссенции:

$$T_{00} = 2XK_X + YK_Y - K, \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -K. \quad (4.86)$$

Также отметим, что  $g$ -эссенция допускает два частных случая (редукции):  $k$ -эссенция и  $f$ -эссенция. В самом деле, пусть  $\psi = 0$ . Тогда  $Y = 0$  и система (12)-(17) примет вид

$$3H^2 - \rho = 0, \quad (4.87)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0, \quad (4.88)$$

$$K_x \ddot{\phi} + (\dot{K}_x + 3HK_x) \dot{\phi} - K_\phi = 0, \quad (4.89)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.90)$$

где

$$\rho = 2XK_x - K, \quad p = K. \quad (4.91)$$

Это и есть система уравнений  $k$ -эссенции. Теперь рассмотрим случай когда  $\phi = 0$ , то есть чисто фермионный случай. Тогда  $X = 0$ ,  $K = K(Y, \bar{\psi}, \psi)$  и система (12)-(17) примет вид уравнений  $f$ -эссенции, то есть (4.37)-(4.41).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю искреннюю благодарность своим научным руководителям кандидату физико-математических наук, доценту Кобланды Канаевичу Ержанову и кандидату физико-математических наук Гулгасыл Нукербаевну Нугманову за постановку задачи, руководство и всестороннюю поддержку в период выполнения данной работы. Также выражаю огромную благодарность своему зарубежному консультанту профессору Дугласу Синглетону за плодотворную совместную работу и консультации во время моего визита в Департамент физики Калифорнийского государственного университета (Фресно, США). Также выражаю благодарность сотрудникам Евразийского международного центра теоретической физики и кафедры общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, за полезные обсуждения, помощь и за создание отличной рабочей атмосферы при выполнении данной диссертационной работы.